論著

數值預報發展簡史及其重要關鍵—「過濾作用」

（本文摘錄自筆者在美受訓筆記）　　喬鳳倫

An Introduction to the development of dynamic predicion and its Central Problem–"Filtering"

一、引　　言

在過去十年中天氣分析及預報由主觀的藝術演進而為一種純理論及純數學的程序，此種程序是由高速電腦計算得以完成。1955年以前，每日天氣分析及預報幾乎全部由人工製作，由主觀的經驗為主要決定因素，所以同一資料經不同分析人員工作後，產生不同的天氣圖，天氣預報因憑各預報員個別累積的經驗、片斷的統計及古時的天氣歌謠為基礎而產生不同的天氣預報，此種方法實非一科學的方法。目前若干國家天氣分析與預報，利用電腦的便利由天氣報告電碼的填入，校正錯誤及分析均由機器完成，而預測圖的製作是根據一套久已建立的物理學定理，由於表示大氣性質的方程式極為複雜，每次24小時的預測圖需要一百萬至一千萬個基本算術計算步驟，在往昔幾乎非人力所能完成，但現代電腦計算的能力每秒鐘可完成一萬至十萬個計算步驟，所以24小時的天氣預測圖僅需時若干分鐘。數值預報的發展，無可諱言是氣象科學經長期艱澀過程後的一大進步。

二、氣象學家要求解決的幾個問題及可能的方法

氣象學家要解決的幾個重要問題是：由於何種來自大氣以外的物理作用（如太陽的熱能），驅使大氣主要由西向東運行？由於何種大氣動力學的性質及外界條件決定大規模氣流的平均結構狀況？在何種條件下一主要向東運行的氣流變成曲折多波的氣流或渦旋？由於何種機械作用使一波動或渦旋發展加深，其能量來自何處？最後問題是：大規模氣流波動如何自一地移向另一地？

上述問題對天氣預報的重要性，可以下述簡單事實說明之，預報員在製作預報時，每每試行預測大規模氣流形態為第一步驟，因經驗說明大規模氣流與天氣發生密切關係。

為解決上列問題，可能有三種物理科學的方法可以利用：⑴實驗室中的實驗方法，⑵模型方法，⑶數學理論方法，此三種方法當然並不是個別利用，如實驗法及數學法均與模型法相關連。

第一種方法的重點是我們必須能控制來自大氣以外的能量，此能量直接影響大氣的運行，所以我們必須將此整個系統置於實驗室中才能加以控制，這顯見是不可能的事實。

在過去幾年中，科學家曾在實驗中製作大氣的模型（如支加哥大學著名的 Dishpan Experiment）以瞭解大氣一部份運行的性質，但由於實驗用的液體不能在動力學上、熱力學上、幾何學上及運動學上與眞實大氣相同，故由模型實驗結果僅瞭解大氣某部份特性而不能預測其發展。

最後祇剩藉用數學物理理論上發展的一途，所幸在物理方面已有十分完整的理論以處理液體及氣體的性質，此種理論即為大衆所熟知的動量、能量、及質量不滅的三定理，以數學公式表示之即運動方程式、熱力方程式，及連續方程式。此三方程式已為物理學家用以測出大氣中聲波及重力波的運行情形，氣象學家有理由相信此三方程式亦可示出大氣中大規模運行的氣象波的性質。

假若熱源為已知，則根據上述三個物理學定理所導引出的六個方程式及六個未知數（即溫度、氣壓、密度及速度的三個分速）可以求解出六個新變數之值而達預測的目的。

根據數學物理的預測方法，不僅可以付之實行並且是最簡單最直接的方法；經驗法及統計法雖可製作相當準確的天氣預測，但數值預報學者認為此等方法不可能代替數值預報的地位，因它們不能回答上述的基本問題並且不能簡單明瞭地解釋大氣運行的道理，如流體動力學方程式所能表示者。

三、數值預報的發展經過

早在1858年，整套的流體動力學方程式已由漢霍氏（Von Helmholtz）提出，此方程式被認為是解決氣象問題的一種方法，但在以後數十年內，在此方面毫無進展，推其原因有二：其一是數學公式太複雜，用數學術語來說，此問題乃三度空間中六個非直線的偏微分聯立方程式的求解，直至今日，尚無法獲得能適合一般邊界條件及原始條件的解答。雖在廿世紀

初期，用數值法 (Numerical method) 求解微分方程式已有發展，但因其需要大量的計算無法由人力完成。其二是資料的缺乏，在廿世紀以前，氣象觀測站極爲稀少，高空資料根本無法獲得，所以動力氣象學家實不知何種大氣運動狀況必須加以研究解釋，一切理論亦無法獲致證實。廿世紀以來，地面高空氣象資料雖不斷增加，但至今日我們尙嫌資料的不足。

第一次集中力量於發展動力氣象預報是挪威學派的氣象學者們，時在廿世紀初期（第一篇有關數值預報的論文，在 1902 年由 V. Bjerknes 發表）。基於 Helmholtz 的理論， V. Bjerknes、Solberg、Godske 及 J. Bjerknes 合力作有系統的所究，以特殊化（直線化）的流體力學方程式的解答，試以解釋大氣運動的性質。挪威學派的理想對今日數值預報供献至大，但當時因氣象資料的缺乏，惜未能對數值預報的中心問題獲致解決。

直到後來氣象學家發現流體動力方程式可用數值法 (Numerical method) 來解決時，動力預報才獲一新轉機。英籍氣像學家、數學家、經濟學家兼有統計學家資格的 L. F. Richardson，在第一次世界大戰期內，在前線救護車中，設計並實行以定差法 (finite differnce method) 求解氣象學上非直線的流體力學方程式，這是第一次眞正動力預報的嚐試，但他的結果在戰爭中遺失，後來在一堆煤堆中尋獲，而於1922年發表，是爲其著名的著作「數值法天氣預報(Weather Prediction by Numerical Process)」。 Richardson 的實驗並沒有成功，他所預測的大氣波動將以聲速移動且方向錯誤。當時猜想這種錯誤是由於不完全、不準確及無代表性的原始資料所造成，但未獲致結論。當時 Richardson 曾估計必需僱用 6,400 個人員從事計算才能趕上實際的天氣變化。由於此一龐大的人力財力估計，無人再願付出如此巨大代價作另一次實驗。此後人們對數值預報的興趣迅速凋萎而一蹶不振幾達廿年。

在1940年以後，數值預報的興趣再度興起，其主要原因有二：其一是由於世界大戰的需要，氣象觀測較前大爲增加，已有足夠的紀錄可資研究。於是發現流體的一般性質對大氣中產生天氣的機械作用並不重要。由於此一發現，說明在流體動力方程式作若干假定及修正並不嚴重影響預測大規模氣流性質的準確性，是以 Rossby 能發現以正壓模型即可預測大氣中大規模渦動的運行。原因之二是電腦的發明，在1946年前已有幾個電腦在設計及裝置中，其計算速度約一萬倍於一個熟練計算人員應用桌上計算機的速度，Richardson 的實驗在幾小時內即可完成。於是數值預報進入一新紀元。

於1946年由 Charney 及已故 Neumann 二教授領導一研究計劃，再從事數值預報的研究，此後數年內英、德、日各國動力氣象學家亦群起努力。初時將 Richardson 所用的方程式重行計算，發現 Richardson 的方法除由應用方格點所引起近似值的錯誤外，尙含有二種嚴重的缺點。第一種缺點是由實際大氣永遠接近於平衡狀態所引起，換言之，大氣水平氣壓梯度力幾乎與科氏力相平衡，而垂直浮力幾乎與重力相平衡，於是大氣大規模的加速運動非常微弱，常小於作用於單位質量上各個別外力的十分之一，故若要獲得加速度的精確度至十分之一，則各個外力的精確度必須小於百分之一，但事實上風及氣壓之測量其精確度不可能小於百分之一，且遠較此值爲大，即此一種原因，已足以導致 Riehardson 的失敗。第二種缺點是由於應用原始的流體動力方程式所引起，因波動方程式是一種拋物線型方程式，用定差法求解時，所用的時間增量 (Time increament) 必須小於此波動由一方格點移至下一方格點所需之時間爲小，否則某種波帶的不規則錯誤將形擴大而致計算的失敗，此種錯誤是所謂計算性不穩定 (Computational Instability)。大氣中聲波及重力波之速度極大，如我們所採用方格點間之距離爲一百哩，則所採用的時間增量必須小於十分鐘，如此則廿四小時的預測必須連續作一百四十四次十分鐘的預測，但我們深知天氣狀況具有相當的連續性，上述爲廿四小時預測作一百四十四次計算，旣不經濟且失時效。Richardson 在作實驗時所用時間增量爲六小時，遂導致嚴重錯誤。

綜觀 Richardson 失敗的原因，則得一啓示爲若以氣象預測爲目的，原始的流體動力方程式不能直接利用。由於聲波及其他快速波對氣象不發生作用，若能將流體動力方程式加以修訂，使其解法 (solution) 不含聲波及其他高速波動而僅含緩慢移動的氣象波，如此則計算性不穩定可減低至最小程度，去尋覓此種修正方法，是近十年來動力預測的中心問題。

此問題首由 Charney 由於1948年獲致解決，他的方法是聞名的「準地轉近似法」(Qusai Geostrophic Approximation)，以此法修正後之方程式其解恰能消除聲波及重力波之作用；並且在某種理想狀況下，此訂正後流體動力方程式與均密度、無垂直運動之「正壓模型」所具之方程式有相同形式，因均密度及無垂直運動之大氣中，不存有聲波及重力波。

上述「模型」的流體動力方程式首由 Charney，Fjortoft 及 Von Naumann 三人於1950年在電腦中求解，其結果，大體言之，已相當滿意，即以此簡最單的動力預測法，預測大規模渦動之運行，其準確性已可與具有豐富經驗的預報員所作之預測相比擬。但此簡單「模型」大氣含有相當嚴重的缺點，因其性質是由一動力學定律所控制，即所謂旋率 (Vorticity) 的保守性。在此一定律的限制下，反氣旋型及氣旋形旋率的數量及強度不隨時間而變化。用此「模型」大氣的結果，無法預測新生波動之發生。

於是數值預報學家要求具有更普通性的模型，對於此一目標的研究始自1951年，在過去六年中，已有十數個模型被建議，每一模型均能示出大氣中位能動能的互變以說明波動之生成及成長。直到目前，若干此種更具普通性的大氣「模型」尙在試驗之中，若以最簡單的斜壓模型（三層模型）爲實驗，以美國本土爲預測範圍，則廿四小時的預測圖需時約一小時，如以人力計算，一人工作約需時一年（筆者在美實習時，二人合作，每週工作十五小時，費時四個月）。若以北半球爲範圍，費時更多。如用更多層之模型，則頗不經濟而乏時效。故今日美國氣象局所發佈數值預報預測圖仍以正壓模型爲主。

綜上所述我們可以瞭解數值預報發展簡史並知道動力方法是預測大規模氣流型式最直接且具物理基礎的預測方法。目前數值預報的結果，因離理想的境界仍遠，但可樂觀地期望於今後五年至十年之時間內，新的模型，新的方程式，新的解法及新的計算技術不斷發展而獲致更完善的結果。

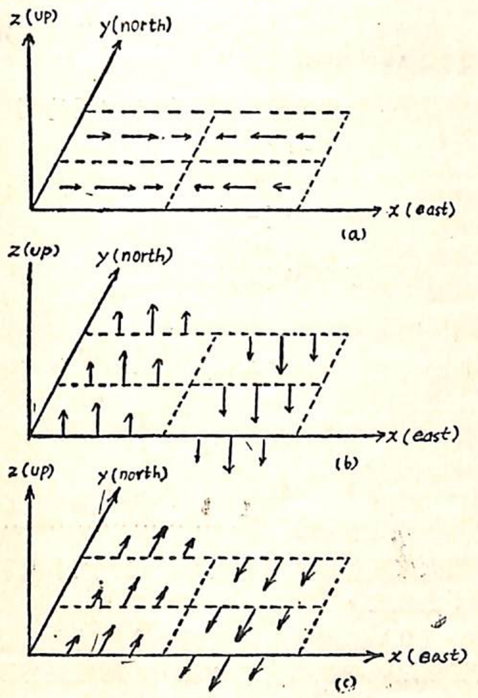

圖 1：(a) 向東運動之壓縮波
(b) 向東移動之垂直橫波
(c) 向東移動之水平橫波

四、過　濾　作　用

近代數值預報的發展，其主要關鍵是 Charney 在1948年所發現的「準地轉近似法」，此法的主要作用是將大氣中之聲波及重力波的效應從流體動力方程式中濾出，是即所謂過濾作用 (Filtering Effect)。此實爲數值預報發展中頗饒興趣之事件。故特詳細介紹其理論與方法，首先介紹基本方程式，再假定在絕熱及無黏性的大氣中求出聲波、重力波及氣象波的各個性質，然後再討論過濾作用。

大氣中之波動主要可分爲三種，第一種爲縱波或稱壓縮波，空氣質點移動方向與移動進行方向一致（圖1,a），是即聲波；第二種爲垂直橫波，空氣質點上下移動而波動在水平方向進行（圖1,b），是即重力波，第三種是水平橫波，空氣質點在水平方向運動，但與波動進行方向垂直（圖1,c），即氣象波。第一第二兩種波動爲物理學家所熟知，但第三種波動除氣象學家外，旁人罕加注意。

㈠基本方程式

若假定⑴地球是正圓，⑵所討論的範圍在中緯度，⑶大氣之厚度遠較地球半徑爲小，⑷大氣是準水平運動，⑸空氣質點之垂直加速度遠較地心加速度 g 爲小及⑹大氣無磨阻力諸情況下運動方程式可寫成爲

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}-w\frac{\partial u}{\partial z}+fv-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial z}-fu-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g$$

式中 u、v 及 w 各爲 x、y 及 z 方向之風速，f 爲科氏參變數，ρ 爲空氣密度，P 爲氣壓，g 爲重力加速度，t 爲時間。

連續方程式爲

$$\frac{\partial p}{\partial t}=-\nabla\cdot\rho\mathbb{V}$$

$$=-u\frac{\partial \rho}{\partial x}-v\frac{\partial \rho}{\partial y}-w\frac{\partial \rho}{\partial z}-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

若假定爲絕熱程序，則熱力方程式可寫成

$$\frac{dT}{dt}=\frac{\alpha}{C_P}\frac{dP}{dt}$$

式中 C_P 爲定壓比熱，T 爲溫度，α 爲比容。

狀態方程式爲

$$P=\rho RT$$

式中 R 爲大氣氣體常數。

以上自運動方程式至狀態方程式，共有六個方程

式內有六個變數，即u、v、w、ρ、P、T，且此六個方程式獨立存在，依照數學的觀念，此系統是完整的，然而此聯立方程式的解是否確定，尚待未來的研究。

如將狀態方程式對時間 t 微分則得

$$\frac{dP}{dt}=\rho R\frac{dT}{dt}+RT\frac{d\rho}{dt}$$

將此式代入熱力方程式並利用 $C_P=C_V+R$ 之關係則得

$$\frac{dP}{dt}=-\gamma P\nabla\cdot\mathbb{V}$$

式中 $\gamma=\frac{C_P}{C_V}$，C_V 爲定容比熱

爲簡明計，再排列上述各式如下

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-u\frac{\partial u}{\partial x}-v\frac{\partial u}{\partial y}-w\frac{\partial u}{\partial z}+fv-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-u\frac{\partial v}{\partial x}-v\frac{\partial v}{\partial y}-w\frac{\partial v}{\partial z}-fu-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}=-u\frac{\partial \rho}{\partial x}-v\frac{\partial \rho}{\partial y}-w\frac{\partial \rho}{\partial z}-\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}=-u\frac{\partial P}{\partial x}-v\frac{\partial P}{\partial y}-w\frac{\partial P}{\partial z}-\gamma P\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=-\rho g\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

㈡聲波

我們已知聲波爲壓縮波，爲討論聲波之性質，可將所有橫波除去，其方法是假定 $w=v=0$，並令 u 祗隨 x 而變化，且假定 $f=0$。此種假定對聲波不發生影響；但因 $w=0$，故重力波（垂直橫波）不復存在，因 $v=0$ 故氣象波（水平橫波）不再存在。於是

(1) 式可寫成 $\frac{\partial u}{\partial t}=-u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\cdots\cdots(6)$

(4) 式可寫成 $\frac{\partial P}{\partial t}=-u\frac{\partial P}{\partial x}-\gamma P\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\cdots\cdots(7)$

(6)(7)兩式所有解法的一般性，可以擾動法 (Perturbation method) 求解而獲得，先設在平衡狀態 (Equilibrlum State)下，$u=u_0$，$\rho=\rho_0$ 及 $P=P_0$，

於是 $\frac{\partial u_0}{\partial t}=\frac{\partial u_0}{\partial x}=\frac{\partial \rho_0}{\partial t}=\frac{\partial \rho_0}{\partial z}=\frac{\partial P_0}{\partial t}=\frac{\partial P_0}{\partial x}=0$。然後再使 $u=u_0+u'$，$\rho=\rho_0+\rho'$，$P=P_0+P'$。式中 u'，e' 及 P' 爲平衡狀態經擾動後與未擾動時之差值。於是

(6) 式可寫成 $\frac{\partial}{\partial t}(u_0+u')=-(u_0+u')\frac{\partial}{\partial x}(u_0+u')-\frac{1}{\rho_0+\rho'}\frac{\partial}{\partial x}(P_0+P')$

(7) 式可寫成 $\frac{\partial}{\partial t}(P_0+P')=-(u_0+u')\frac{\partial}{\partial x}(P_0+P')-\gamma(P_0+P')-\frac{\partial}{\partial x}(u_0+u')$

因 $|u'|<<|u_0|$，$|\rho'|<<|\rho_0|$ 及 $|P'|<<|P_0|$，故可將 u'、P' 及 ρ' 與其他值之乘積忽略，此步驟即所謂直線化，於是上兩式直線化後成爲

$$\frac{\partial u'}{\partial t}=-u_0\frac{\partial u'}{\partial x}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P'}{\partial x}\cdots\cdots\cdots\cdots(6')$$

$$\frac{\partial P'}{\partial t}=-u_0\frac{\partial P'}{\partial x}-\gamma P_0\frac{\partial u'}{\partial x}\cdots\cdots\cdots\cdots(7')$$

將 (7′) 式對時間 t 微分得

$$\frac{\partial^2 P'}{x t^2}=-u_0\frac{\partial^2 P'}{\partial x\partial t}-\gamma P_0\frac{\partial^2 u'}{\partial x\partial t}$$

將 (6′) 對 x 微分得

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x\partial t}=-u_0\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 P'}{\partial x^2}$$

上兩式聯合得

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}=-u_0\frac{\partial^2 P'}{\partial x\partial t}+\gamma P_0\left(u_0\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 d'}{\partial x^2}\right)$$

但由 (7′) 知

$$\frac{\partial u'}{\partial x}=\frac{1}{\gamma P_0}\left(u_0\frac{\partial P'}{\partial x}-\frac{\partial P'}{\partial t}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}=-\frac{1}{\gamma P_0}\left(u_0\frac{\partial^2 P'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P'}{\partial x\partial t}\right)$$

所以

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial x^2}=-2u_0\frac{\partial^2 P'}{\partial x\partial t}-\left(u_0^2-\frac{\partial P_0}{\rho_0}\right)\frac{\partial^2 P'}{\partial x^2}\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

(8) 式爲著名的波動方程式，它的解將爲下列形式

$$P'=Ae^{ik(x-ct)}$$

式中A爲振幅，k 爲波數，c 爲波速，t爲時間

於是

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial t^2}=Ae^{ik(x-ct)}(ikc)^2$$

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial x\partial t}=Ae^{ik(x-ct)}(-ikc)(ik)$$

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial x^2}=Ae^{ik(x-ct)}(ik)^2$$

代入 (8) 式得

$$(-ikc)^2+2u_0(ikc)(ik)+\left(u_0^2-\frac{\gamma P_0}{\rho_0}\right)(ik)^2=0$$

解此方程得

$$C=u_0\pm\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

$$=u_0\pm\sqrt{\gamma R T_0}\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

上式即爲大衆所熟悉的聲波速度公式，式中 T_0 爲平衡狀態下之溫度。

由於 (9) 式的推演，我們知流體動力方程式中，含有聲波之效應在內，若 $u_0≒0$，則聲波將以每時 700 浬之速度向不同方向進行。但值得注意的一點是聲波僅與介質的物理性質 (T_0) 有關，與振幅波長（頻率）無關。(待續)