

應用點樣維度法計算天氣吸引子的維度

李永安 邵耀亭

國立中央大學大氣物理研究所

(中華民國八十年十二月二十九日收稿；中華民國八十一年二月二十七日定稿)

摘 要

利用相空間重組方法和點樣維度法，我們分析了台灣地區六個測站（台北、台中、台南、恆春、台東、花蓮）的觀測時間序列資料。我們發現利用點樣維度法來估算天氣吸引子的維度不僅所得的結果比較準確和可靠而且能提供我們有關吸引子在相空間的不均勻性和誤差的估計。從點樣維度法所得的標準偏差的變化來看，如果只利用單一變數來重組天氣系統，那麼我們至少需要要有60年以上的資料長度才能比較可靠的估算天氣吸引子的維度。而利用多變數的時間序列來重組相空間的多頻法則可以有效的減少資料數有限所引起的吸引子維度的計算誤差。因為六個測站的資料都得到非常接近的吸引子維度，因此從動力系統的觀點而言，整個台灣地區是屬於同一動力系統。而台灣地區天氣吸引子的維度，比較可靠的估計應在8.5左右或以上。

關鍵詞：相空間重組方法，動力系統，吸引子，點樣維度。

一、前 言

傳統的波譜分析，一直是我們分析時間序列資料的重要方法。基本上，對於有週期性行為的時間序列而言，波譜分析是一個非常有效的方法，可以提供我們很多資訊。然而對於沒有週期性行為的混沌時間序列(chaotic time series)，波譜分析所能提供的訊息就非常的有限，甚至無法分辨時間序列是由隨機系統或決定性動力系統所造成的。近年來在非線性動力系統的研究領域裡，發展了一套相空間重組的方法(phase space reconstruction method; Taken, 1981)來處理與分析時間序列資料。相空間重組方法，簡單的說，就是利用時間序列資料和時間延遲坐標(time-lag coordinates)來重組動力系統在相空間的演化軌跡。由此我們就可以引用動力系統的理論從

重組的演化軌跡中來探討與分析這個時間序列的一些特徵。由於這套方法是從動力系統的觀點來分析時間序列，並不依賴週期函數來分解時間序列，因此它提供了我們一個分析處理混沌時間序列的有效方法。

從氣象應用的角度來看，由於觀測資料大多屬於混沌時間序列，波譜分析能提供的訊息並不多，因此利用相空間重組方法來分析資料就顯得非常的具有吸引力。事實上，從八十年代初期開始就陸續有學者利用這個方法來分析與氣象有關的資料。例如Nicolis and Nicolis (1984, 1985), Fraedrich (1986, 1987, 1989, 1990), Essex et al. (1987), Hense (1987), Tsonis and Elsner (1988), Keppenne and Nicolis (1989)等學者就利用相空間重組方法和相關的地質或氣象資料（如深海岩層資料、測站資料、ENSO指

數資料、和氣旋路徑坐標資料等)來研究氣候、短期天氣、氣旋、中尺度天氣和ENO等系統的吸引子維度和可預報度的極限。他們分析的結果顯示,中尺度以上的系統都具有低維度的吸引子,而可預報度的極限則從氣候的三萬年、天氣的三星期,到熱帶氣旋的一天左右。李永安(1990)也利用相空間重組方法來分析台北和恆春測站80年的每日平均地面氣壓和溫度資料。分析的結果顯示:(1)、台灣地區的天氣系統也具有低維度的吸引子;(2)、資料長度不足時會低估吸引子的維度;(3)、時間延遲參數的選擇會影響相關維度演算法對於吸引子維度的估算。另一方面,他也發現,從臺北的資料估算的吸引子維度要比從恆春的資料估算的要高,而從溫度資料估算的也比由氣壓資料估算的要高。這些現象,是否意謂著台灣地區的天氣系統具有強烈的不均勻性以至於不同的地理位置的資料會造成吸引子維度估計的差異,或者只是估計吸引子維度所用的方法的誤差而已,是值得我們深入探討的。

Holzfluss and Mayer-Kress (1986)指出由Grassberger and Procaccia (1983 a, b)所發明的吸引子的相關維度演算法不僅無法提供吸引子在相空間上不均勻性的訊息,更重要的是,這方法會扭曲相關函數與距離之間的尺度範圍(scaling range)因而造成在計算吸引子維度時產生誤差。相對的,點樣維度(pointwise dimension)演算法雖然在計算上比較耗時,可是它能避免上述相關維度演算法的缺點,因此他們建議在估計吸引子維度時應採用這個方法。

基於上述的結論,本文研究的主要目的有三:一是利用點樣維度法來探討吸引子維度在相空間的不均勻性和資料有限所產生的計算誤差;二是利用點樣維度法和台灣各地的資料來探討台灣各地氣候的差異;三是利用點樣維度法來比較單一資料、多頻資料和連結資料對於所計算的吸引子維度的影響。本文共分五節:第一節是引言;第二節是相空間重組方法的理論基礎和多頻法與連結法的簡介;第三節是點樣維度法的定義與計算方法的簡介;第四節是結果的分析;第五節是本文的結論。

二、相空間重組方法

在這節中我們將簡介相空間重組方法的基本理論與時間序列資料的應用。如果一個動力系統可以

用 n 個一階常微分方程式來描述,

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

那麼系統的演化路徑在由 x_1, x_2, \dots, x_n 所組成的 n 維相空間中就可以用位置向量,

$$\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}, \quad (2)$$

來表示。從數學上看,由於(1)式的 n 個變數方程組可以經由微分、代入消去的方法簡化成其中一個變數的 n 階常微分方程式,例如

$$\mathbf{x}_1^{(n)}(t) = F\{x_1(t), x_1'(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t)\}, \quad (3)$$

因此系統的演化路徑也可由 $x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}$ 所組成的 n 維相空間的位置向量,

$$\mathbf{x}_1^{(n)}(t) = \{x_1(t), x_1'(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t)\}, \quad (4)$$

來決定。Ruelle (1981),從差分(finite difference)是微分(differentiation)的近似的觀點,進一步指出實際上 $x_1(t), x_1'(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t)$ 可以用時間延遲變數 $x_1(t), x_1(t+\tau), \dots, x_1(t+(n-1)\tau)$ 來代替,在此 τ 是時間延遲常數(time lag)。因此系統的演化過程也可以用延遲相空間的位置向量

$$\mathbf{x}_1(t) = \{x_1(t), x_1(t+\tau), \dots, x_1(t+(n-1)\tau)\}, \quad (5)$$

來描述。因為(1)式和(3)式代表同樣的系統,基本上從相空間 x_1, x_2, \dots, x_n 轉換到相空間 $x_1(t), x_1'(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t)$ 再轉換到延遲相空間 $x_1(t), x_1(t+\tau), \dots, x_1(t+(n-1)\tau)$ 並不會失去任何有關系統演化的訊息,因此我們可以由單一變數的時間序列來重組動力系統在相空間的演化路徑。對一個離散(discrete)的觀測時間序列, $\mathbf{x}(t)$, 而言時間延遲變數 $x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(n-1)\tau)$ 遠比 $x, x', \dots, x^{(n-1)}$ 容易得到,所以(5)式在應用上是比較實際而方便的。不過有一點是需要特別注意的,因為 $x, x', \dots, x^{(n-1)}$ 坐標是線性獨立的,因此利用時間延遲坐標重組相空間時,在時間延遲常數 τ 的選擇上,也必需儘量使得 $x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(n-1)\tau)$ 愈線性獨立愈好。否則系統在相空間的結構很容易在坐標轉換過程中被扭曲了。

相空間重組方法並不限於利用單一時間序列而已。實際上如果有不只一個觀測資料的時間序列時,那麼我們也可以利用(a).多頻法和(b).連結法將這些觀測資料加以結合來重組動力系統的相空間。所謂多頻法,簡單的說,就是把多個變數的時間序列

和時間延遲坐標結合在一起來重組動力系統的相空間。因為在簡化(1)式的過程中，我們可以只簡化到少數幾個變數的多階方程式而微分變數仍可以用時間延遲變數來近似，因此多個變數的時間序列也可以和時間延遲坐標結合在一起被用來重組動力系統的相空間。例如，從同一個動力系統中我們得到兩個時間序列， $x(t)$ ， $y(t)$ ，那麼系統的演化路徑就可以用重組相空間中的位置向量

$$\mathbf{x}(t) = \{x(t), y(t), x(t+\tau), y(t+\tau), \dots\} \quad (6)$$

來描述。由於 $x(t)$ ， $y(t)$ 是不同的變數，因此在時間延遲常數 τ 相同的情況下，多頻法可以保證重組相空間的坐標有更好的線性獨立性質。

所謂連結法就是把屬於同一個動力系統位於不同地方或是不同變數的觀測時間序列連結在一起以增加時間序列的資料數。由於吸引子是動力系統的一個不變量，所以我們可以假設這些觀測時間序列只是同一個時間序列的不同部分而把它們前後連結在一起。例如，在同一個動力系統中有兩個觀測時間序列， $x_1(t)$ ， $x_2(t)$ 。連結法就是假設它們是同一個時間序列的不同部分，因此可以把它們連結在一起組成一個比較長的時間序列，

$$\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), \dots, x_1(t+N\tau), x_2(t), \dots, x_2(t+N\tau)\} \quad (7)$$

由於在計算吸引子維度時，隨著重組相空間的維度的增加，要達到相同的計算準確度所需要的資料數也隨之增加。另一方面，重組相空間的坐標的線性獨立性質也與所計算的吸引子維度的準確度有很密切的關係。因此，如何從有限的觀測時間序列資料中增加資料數和增加重組相空間坐標的線性獨立就很重要。本文除了利用單一變數的時間序列來重組相空間外，也將利用多頻法和連結法結合多個觀測資料時間序列來重組動力系統的相空間。

三、點樣維度的定義與計算方法

從過去的研究中我們知道，吸引子的維度與耗散動力系統的演化行為有非常密切的關係。大體而言，當動力系統的演化是週期性或準週期性的行為時，吸引子的維度是整數。可是當動力系統的演化是沒有週期的混沌(chaotic)行為時，不僅微小的初始誤差會被放大，造成預報能力的消失，而且會使

得吸引子在相空間的結構在某些方向有不連續的現象。這時吸引子的維度是非整數的，也就是所謂的碎度(fractal dimension)。所以在探討實際的動力系統的特徵時，如何從實驗資料中獲得吸引子維度的估計，一直是人們很有興趣的問題。

在眾多的碎度計算方法中，由於相關維度演算法(Grassberger and Procaccia, 1983 a,b)具有簡單明瞭易於計算的優點，因此最被廣為應用於吸引子維度的估計。然而Holzfuss and Mayer-Kiess (1986)也指出，此演算法在計算過程中會扭曲相關函數與距離的尺度關係，因此在計算吸引子維度時會產生誤差。另一方面，相關維度演算法只求得出吸引子在相空間的平均相關維度，因此也無法提供我們關於資料有限所產生的計算誤差範圍和吸引子在相空間的不均勻性。

Farmer et al. (1983)提出點樣維度的觀念。它是這樣定義的：如果 N 是相空間中所有點的總數，而 $N_i(r)$ 是落在以 x_i 為中心 r 為半徑的相空間體積內的資料數，那麼點樣維度， D_i ，就是從 $N_i(r)$ 與 r 具有的尺度關係所得的維度，

$$D_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{1}{N} N_i(r)}{\ln r} \quad (8)$$

因此吸引子的維度，我們可以取相空間中所有點樣維度的平均，

$$D = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N D_j \quad (9)$$

來代表。在實際應用時， $N_i(r)$ 可以用

$$N_i(r) = \sum_{j=1}^N \Theta(r - |x_i - x_j|), \quad (10)$$

來估計。 $\Theta(u)$ 是Heaviside函數，有 $u > 0$ ， $\Theta(u) = 1$ 和 $u < 0$ ， $\Theta(u) = 0$ 的特性。 $|x_i - x_j|$ 是相空間中兩點之間的距離。由於點樣維度法必需計算每一參考點的維度，相對於相關維度法而言，是比較費時費力的。然而也因為必需求得每一參考點的維度，尺度範圍不會在平均的過程中被改變，因此在計算吸引子維度時比較不會產生誤差。另一方面，由 D 的標準偏差(standard deviation)我們也可得知吸引子在相空間的不均勻性與資料數有限所造成的計算誤差範圍。

在實際計算吸引子維度時，有兩點必需特別注意的：(1)、由於我們並不知道天氣系統的維度，因

此必需在不同的重組相空間中求得維度D。當D隨相空間維度增加達到飽和時，這個飽和維度才是系統的吸引子維度；(2)、由於利用(10)式求 $N_i(\tau)$ 時，至少要計算 N^2 個兩點間的距離，十分費時。我們可以在求D時只隨機取一些參考點來做平均以節省計算所需的時間。我們曾試過每10,20,40,100天取一個參考點來做平均，所得的結果都非常的相似。因此在本文中，維度D都是用每40天取一個參考點來做平均所得的結果。

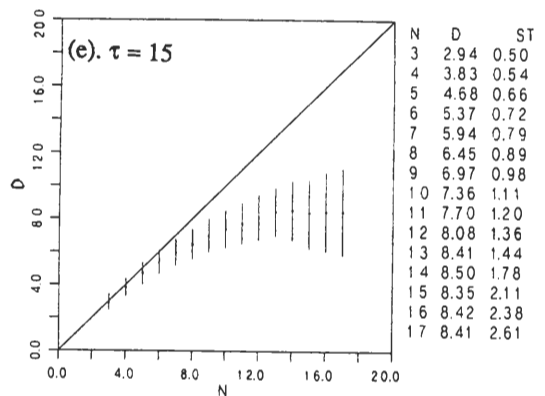
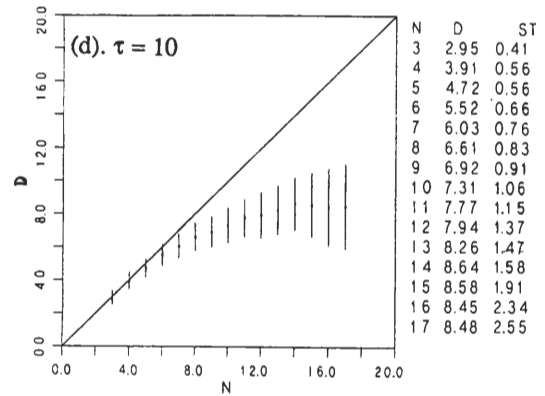
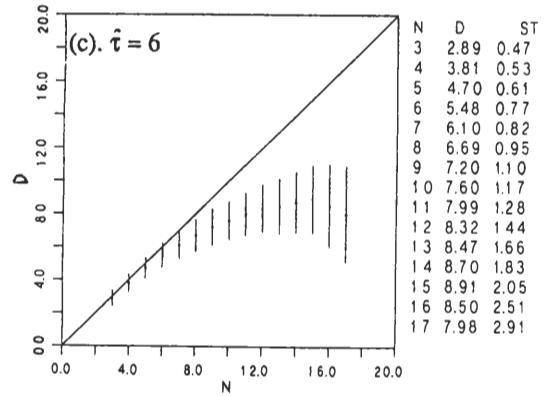
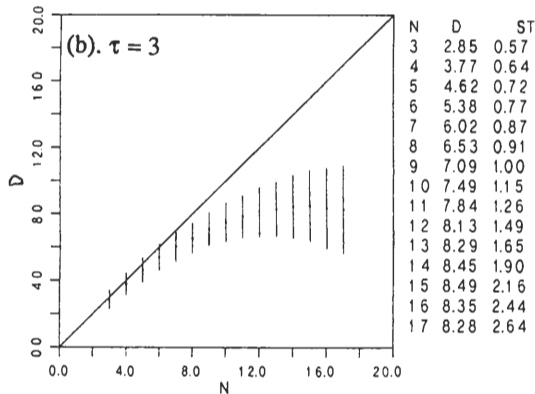
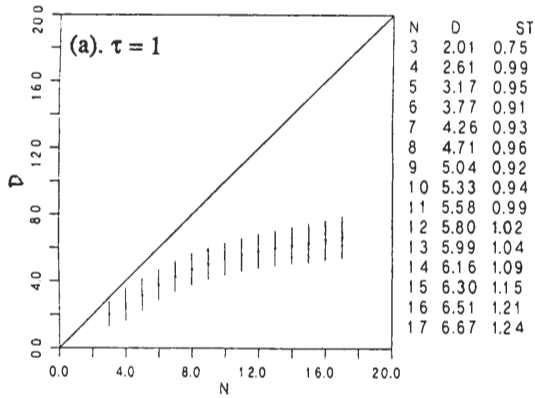


圖1 是利用恆春的壓力資料，在延遲時間 (a). $\tau=1$, (b). $\tau=3$, (c). $\tau=6$, (d). $\tau=10$, (e). $\tau=15$ 時，求得的D隨重組相空間維度N變化的情形。每個子圖的右邊是在不同的N時，D和它的標準偏差的值。

四、結果分析

這一節中我們利用相空間重組方法和點樣維度法來分析實際的觀測資料。所用的資料是中央氣象局所提供的台北、台中、台南、恆春、台東、花蓮等六個地面測站的每日平均氣壓和溫度。資料長度均為八十年(1910-1989)。

圖1是利用恆春的壓力資料，在延遲時間 $\tau=1,$

3, 6, 10, 15時，求得的D隨重組相空間維度N變化的情形。每個子圖的右邊是在不同的N時，D和它的標準偏差的值。首先，我們看到的是標準偏差隨著重組相空間維度的增加而增加。這主要是因為時間序列的資料數是固定的，並不會隨著重組相空間維度的增加而增加。當維度增加時，重組相空間中資料點的密度會相對的減少，增加了 $N_i(\tau)$ 的不均勻性，以至於D的標準偏差也跟著增加。另一方面，我

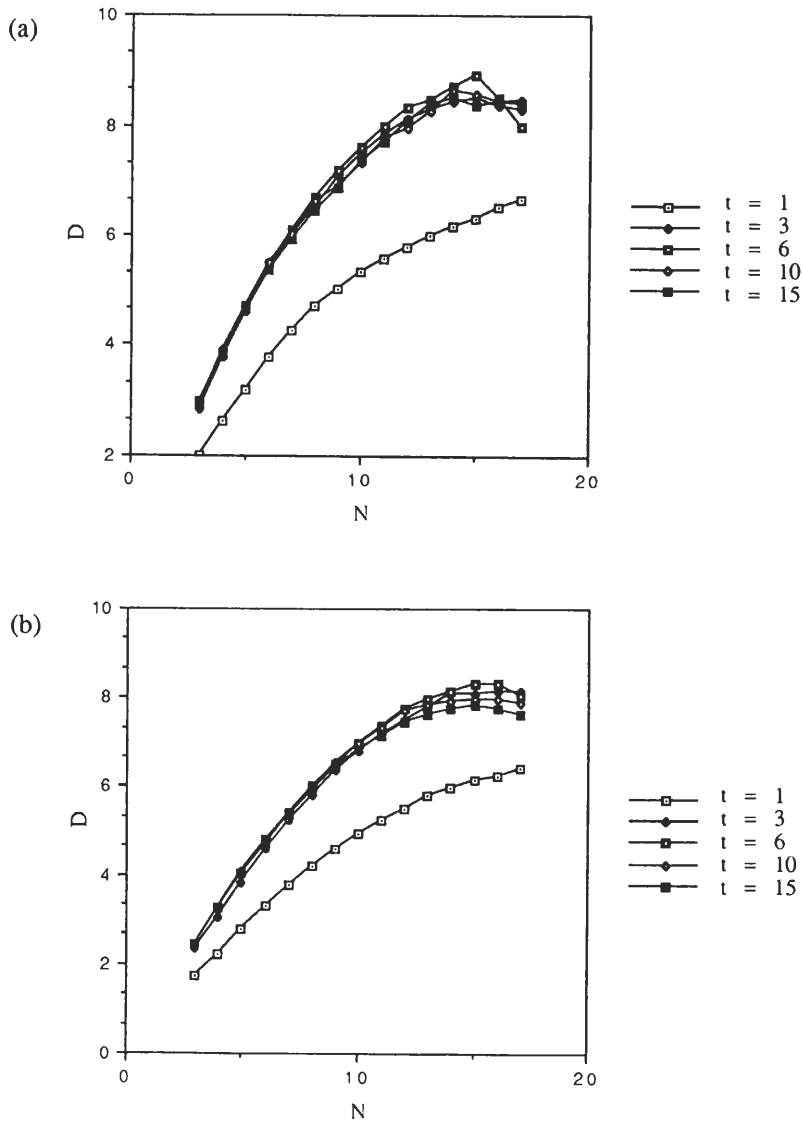


圖2 是分別由恆春的(a). 壓力與(b). 溫度資料，在 $\tau=1,3,6,10,15$ 時得到的D隨相空間維度N變化的圖。

們也發現 $\tau = 1$ 時，D的標準偏差值最小。這是因為 $\tau = 1$ 時，延遲座標之間的相關性很強，使得系統在重組相空間的路徑集中在坐標的對角軸上。 $N_i(\tau)$ 的不均勻性不會像其他的 t 值時那麼大，因此D的偏差值也就相對的較小。也因為延遲座標的相關性強，使得D在 $\tau = 1$ 時比其他 t 值都要低。

圖2a, b是分別由恆春的壓力與溫度資料，在 $\tau=1, 3, 6, 10, 15$ 時，得到的D值隨相空間維度N變化的圖。我們可以很明顯的看出，除了 $\tau = 1$ 時D值沒

有飽和外其餘的 τ 值時D值均達到飽和，而且飽和值非常接近。這結果與由相關維度法得到的（李，1990；圖2）比較，有明顯的差異。第一：當 $\tau = 1$ 時，相關維度法在N大時，所得之D值大於其他 τ 值所得的；而點樣維度法在 $\tau = 1$ 時所得的D值則一直低於其他 τ 值所得的。由於 $\tau = 1$ 時，延遲座標的相關性很強，重組的系統演化路徑會聚集在一起，理論上應該是會造成D值的低估。因此我們認為由點樣維度法得到的結果比由相關維度法得到的要合理。

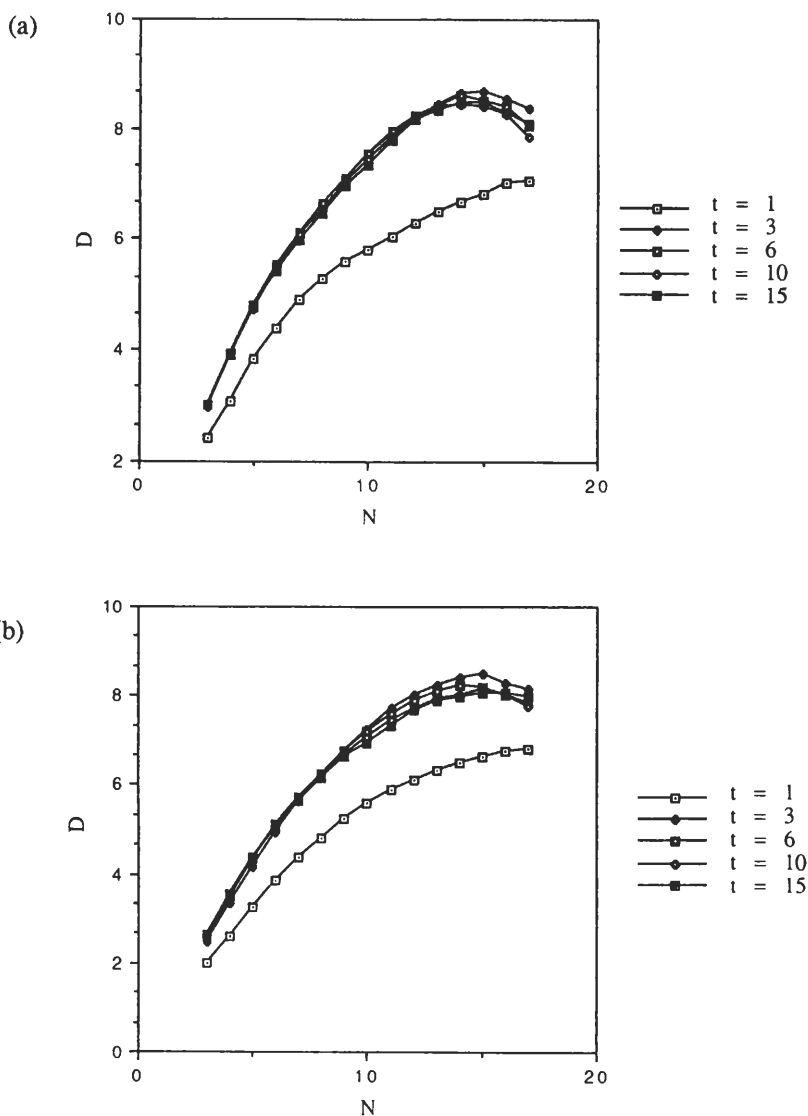


圖3 除了是由台北測站資料所得的外，其餘都和圖2相同。

第二：在不同的 τ 值，由點樣維度法所得的飽和D值都非常接近，而由相關維度法得到的則有明顯的差異。這顯示利用點樣維度法所計算的吸引子維度，對於 τ 值的選擇並不像相關維度法那麼敏感。相對而言，點樣維度法減低了估計吸引子維度時的不確定性。

圖3到圖7，除了分別是由台北、台中、台南、台東和花蓮測站資料所得的外，其餘都和圖2相同。其結果也和恆春資料所得的非常的類似。雖然各測站所處的地理位置不同，所顯現的氣候特徵也有

所差異，然而從時間序列資料所得的吸引子維度和標準偏差都非常的接近。因此，從動力系統的觀點而言，整個台灣地區是在同一個天氣動力系統的控制之下。另外值得注意的是，在所有的結果中，從壓力資料所得到的吸引子維度都比由溫度資料所得到的要高一些。這可能是因為系統中的某些變數彼此間並沒有交互作用，因此無法從多變數的(1)式完全簡化成單一變數的(3)式，以至於利用某些特定單一變數的時間序列資料並無法完整的重組系統在相空間的演化過程。所以，從上述的結果，我們認為

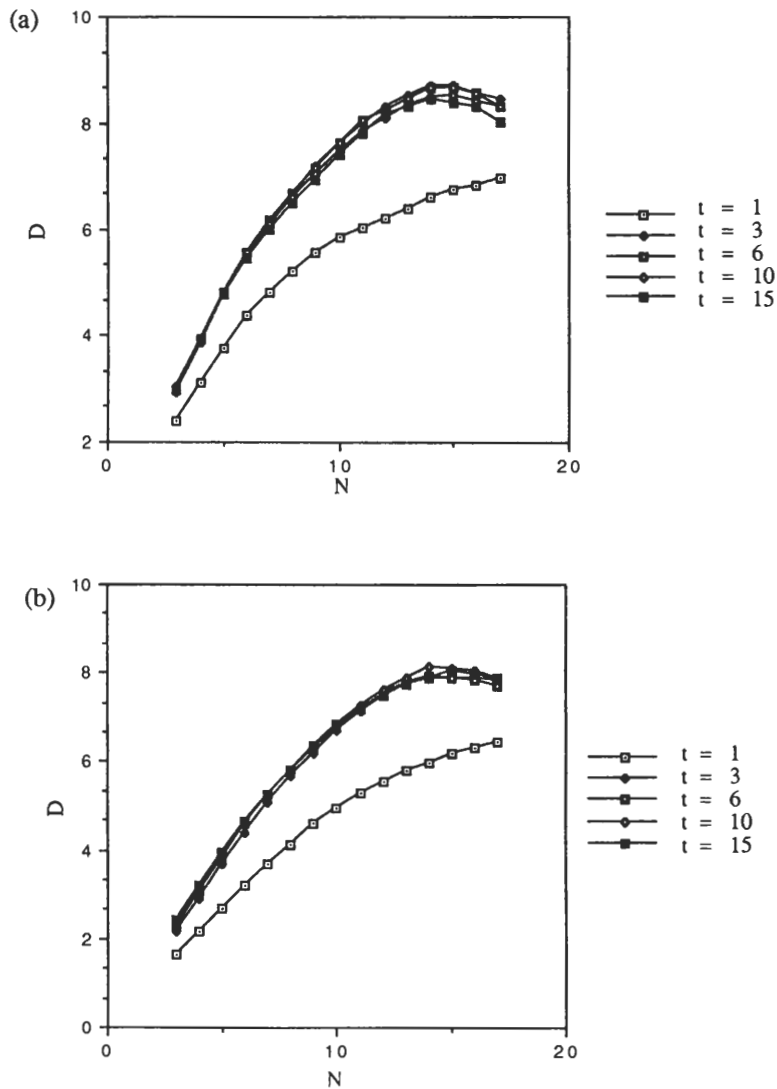


圖4 除了是由台中測站資料所得的外，其餘都和圖2相同。

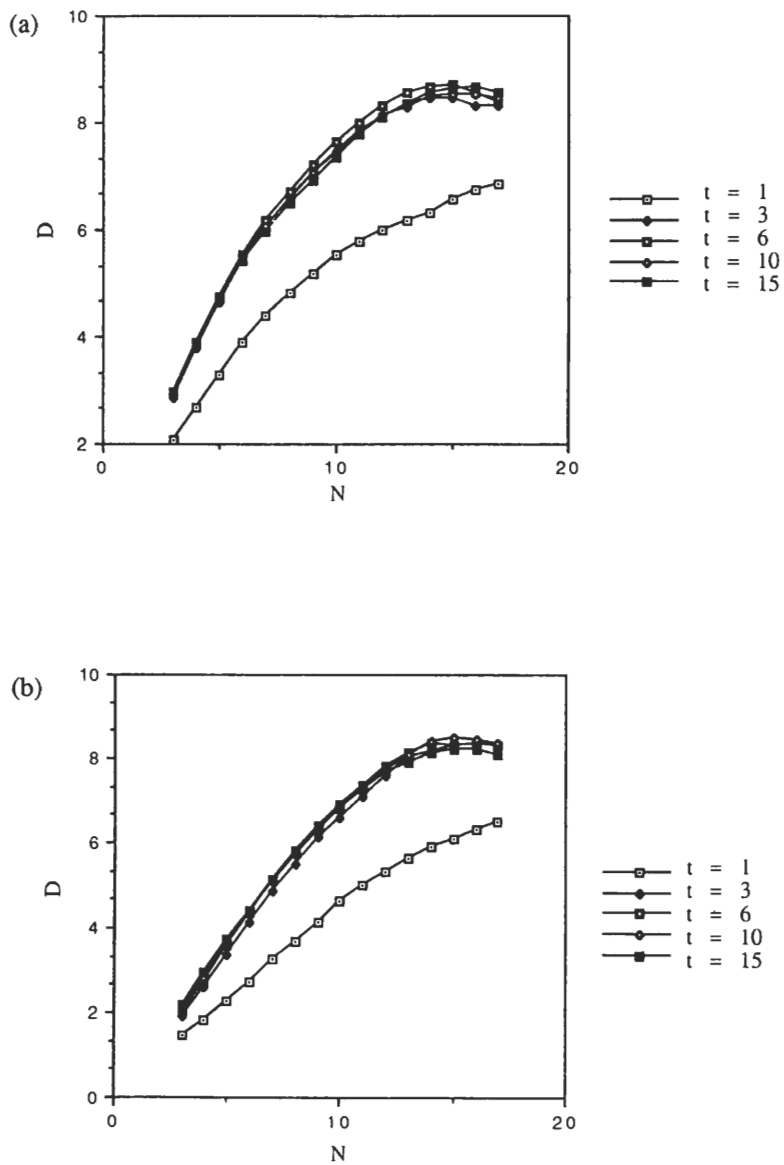


圖5 除了是由台東測站資料所得的外，其餘都和圖2相同。

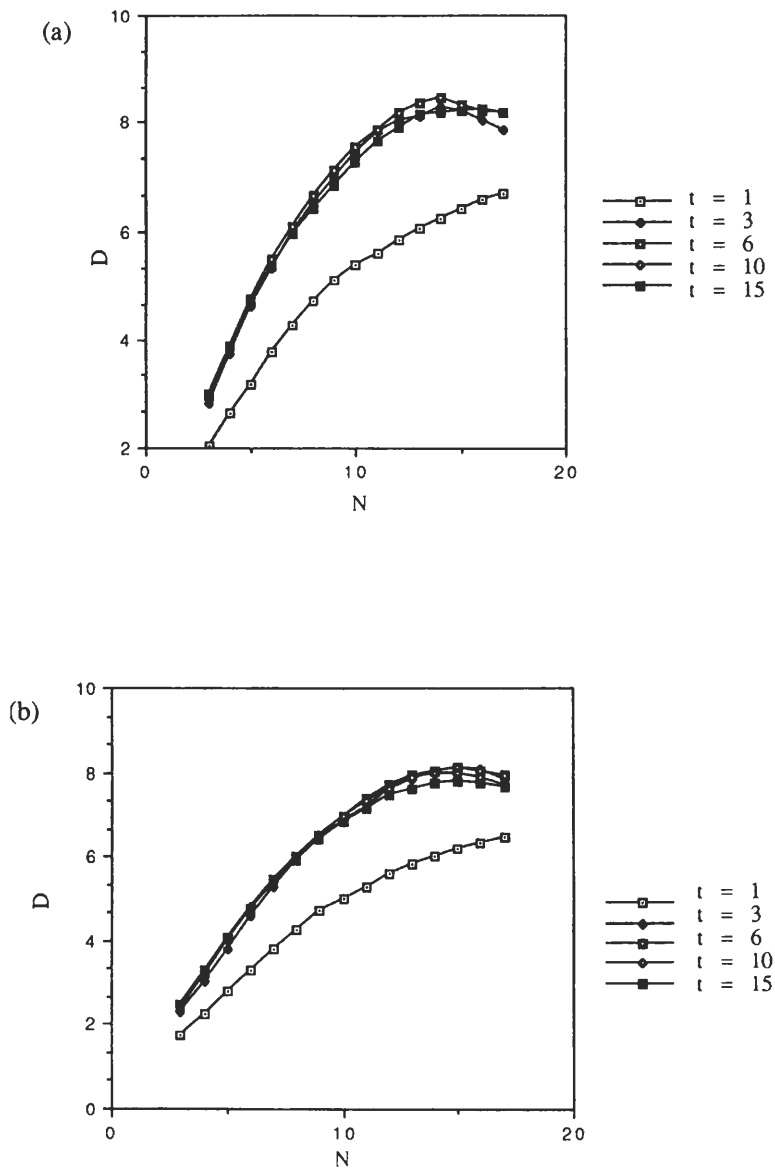


圖6 除了是由台南測站資料所得的外，其餘都和圖2相同。

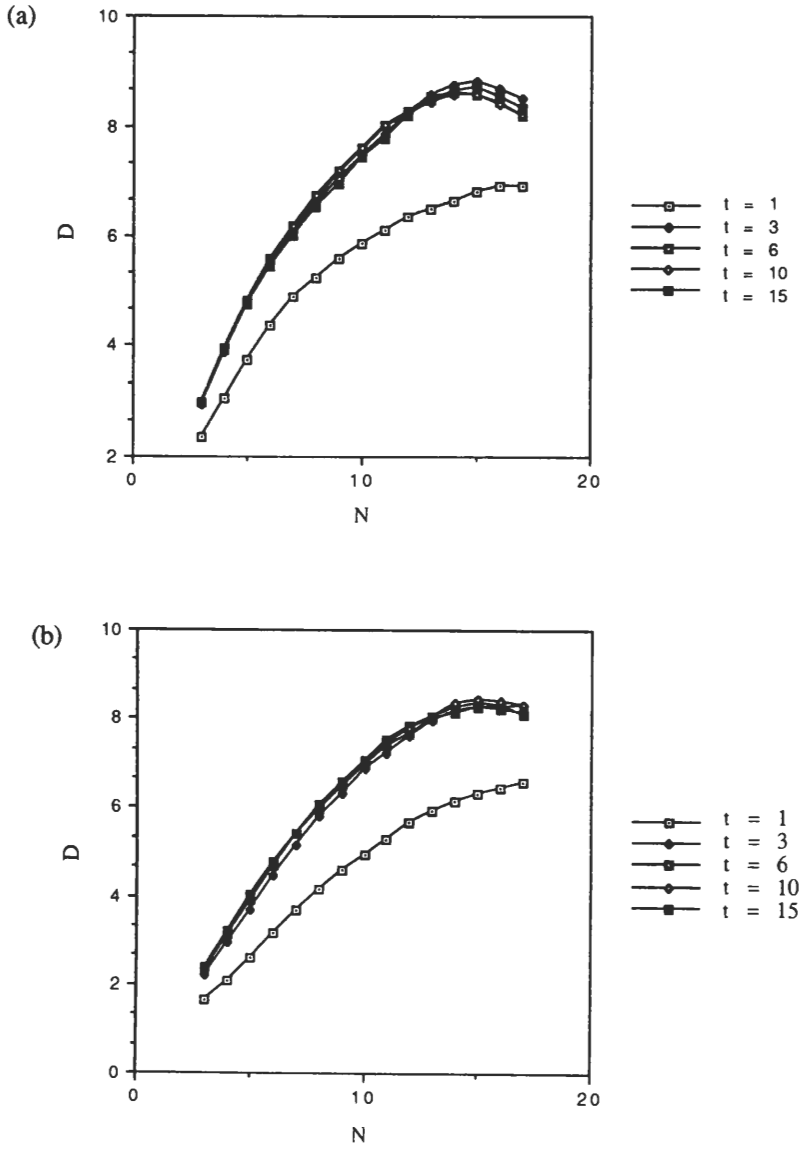


圖7 除了是由花蓮測站資料所得的外，其餘都和圖2相同。

利用壓力資料來重組相空間可能比利用溫度資料要來得完整而且適當些。當然，如果可以同時使用這兩種資料來重組相空間就更好了。

圖8與圖9是利用恆春壓力資料：在 $\tau = 3$ 時，利用20, 40, 60, 80年的資料所得到的D隨N的變化圖。結果與相關維度法所得到的非常相似（參見：李，1990；圖4），D的飽和值隨著資料長度的增加而增加。可是，值得注意的是，D的標準偏差隨著資料長度的增加，先是增加而後有減少的趨勢。由於偏差的可能來源有二：(1)、是吸引子本身在相空間的不均勻性導至每個參考點所計算的維度有所差異；(2)、是資料有限所造成的計算誤差。因此，隨著資料長度的增加，吸引子的演化路徑會拜訪相空間中

比較不常經過的地方，增加了 $N_i(r)$ 的不均勻性，以至於D的標準偏差也隨之增加。但是，隨著資料長度的增加，資料有限所造成的計算誤差應該會逐漸減小。所以我們認為標準偏差隨著資料長度的增加而增加的現象是吸引子本身在相空間的不均勻性所導至的。而當資料長度在60年以上時，標準偏差隨著資料長度的增加而逐漸減小的現象是因為資料有限所造成的計算誤差逐漸減小的緣故。這結果顯示，60年左右的資料長度才能使吸引子本身的不均勻性所導至的偏差量增加的現象與資料長度的增加所導至的偏差量減小的現象大致達到平衡。因此我們認為，如果只利用單一變數來重組天氣系統，那麼至少需要要有60年以上的資料長度才能比較可靠的估

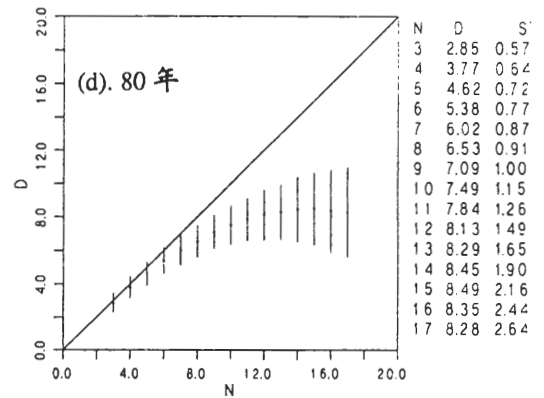
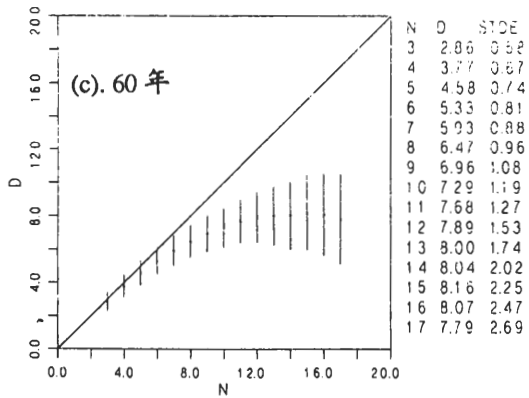
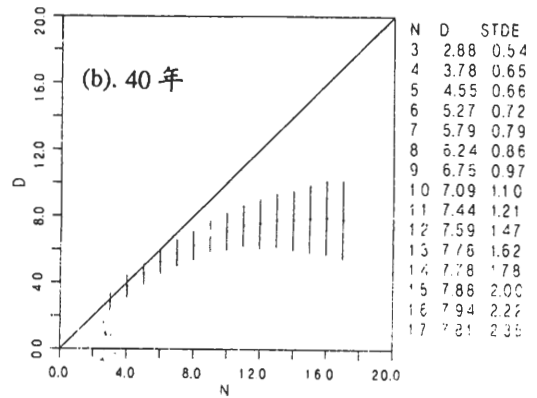
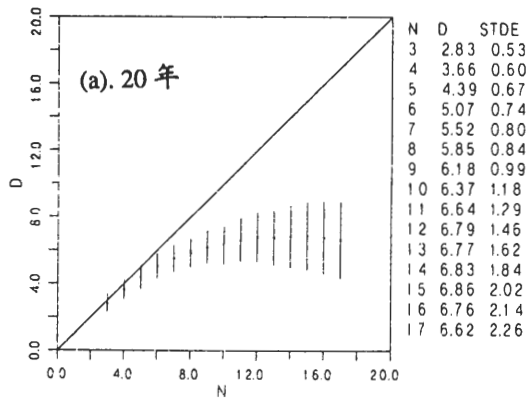


圖8 利用恆春的壓力資料在 $\tau=3$ 時，利用(a). 20年，(b). 40年，(c). 60年，(d). 80年的資料所得到的D隨N的變化圖。

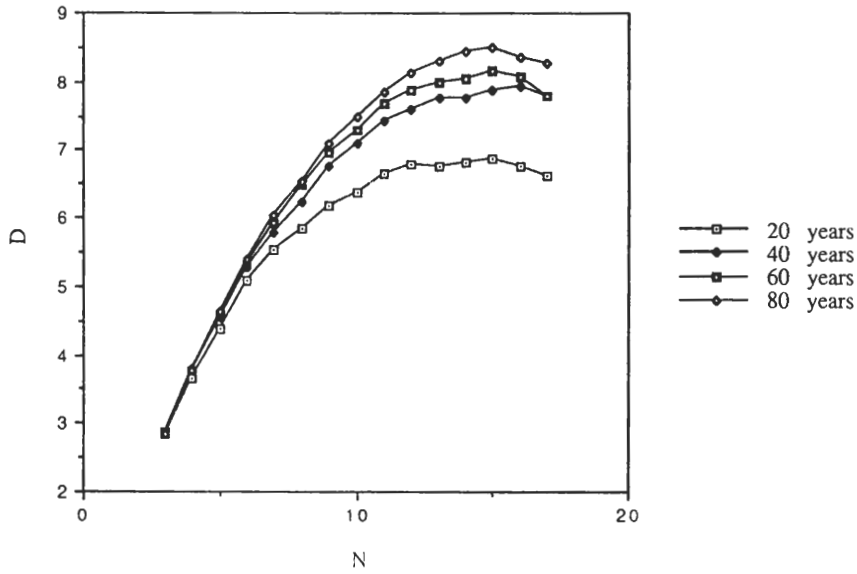
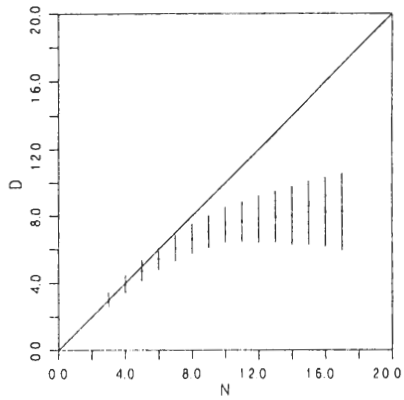
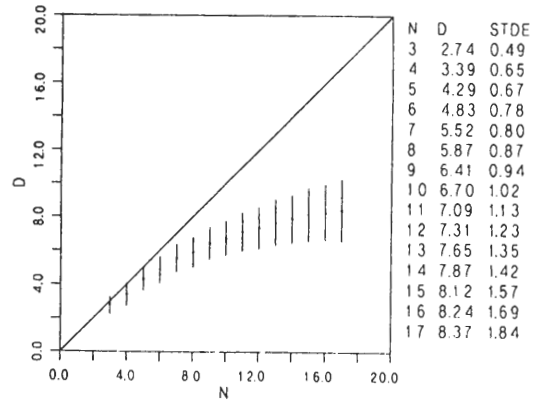


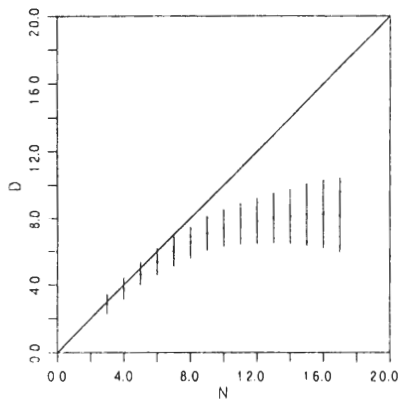
圖9 圖8 D隨N的變化的合併圖。



a、臺北測站



c、花蓮測站



b、恆春測站

圖10 利用多頻法結合八十年的溫度與壓力資料在 $\tau=3$ 時得到的D隨N的變化圖。(a). 台北 ; (b). 恆春 ; 和(c). 花蓮測站。

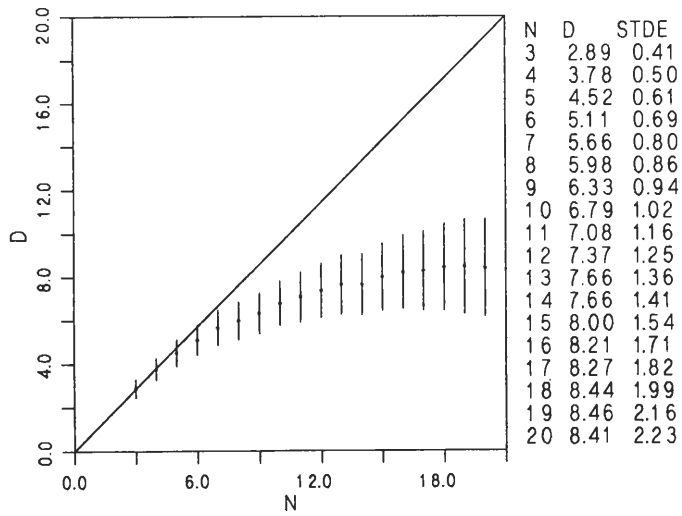


圖11 是利用多頻法結合中文所述的六個時間序列資料在 $\tau=3$ 時所得到的D隨N的變化圖。

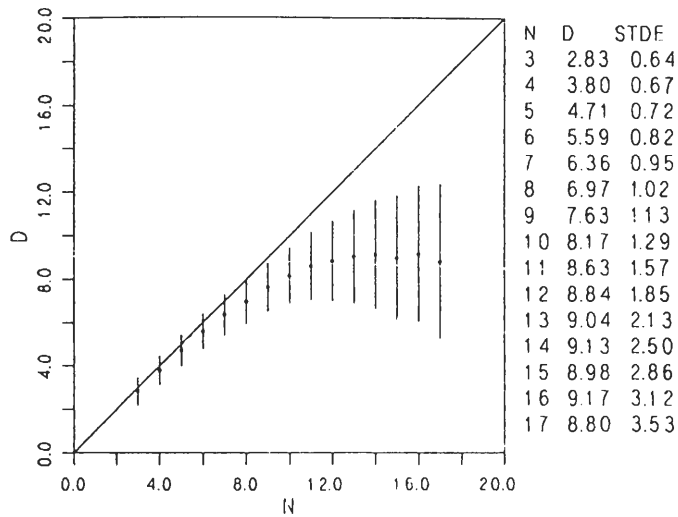


圖12 是利用連結法結合六個測站的時間序列得到的單一時間序列所計算出的D隨N的變化圖。

算天氣吸引子的維度。當然，如果要減少吸引子維度的計算誤差，我們就必需要有比60年更長的資料，或者利用更多的時間序列來重組相空間。

接下來，我們就是同時利用同一測站的溫度與壓力資料來重組相空間並且計算吸引子的維度。圖10a, b, c分別是台北、恆春和花蓮測站八十年的資料，在 $\tau = 3$ 時，得到的D隨N的變化圖。與圖1比較，我們可以看到標準偏差減少了。這是因為所用的資料數增加了而且重組相空間坐標之間的線性獨立性質也增強的緣故。這現象表示從多頻法所重組的相空間計算所得的吸引子維度比從單一變數所重組的相空間所得的維度更準確。為了進一步增加重組相空間坐標的線性獨立性質，我們基於前述的台灣地區屬於同一動力系統的結論，利用台北、台中、恆春的溫度與壓力資料製造了六個時間序列：(1)、台中壓力，(2)、台中溫度，(3)、台中壓力減台北壓力，(4)、台中溫度減台北溫度，(5)、恆春壓力減台中壓力和(6)、恆春溫度減台中溫度。由於壓力差與地轉風有關而南北溫度差則與垂直風切有關，因此用這六個時間序列來重組相空間應該比直接由三地的溫、壓資料來重組更具有坐標的線性獨立性質。至於重組相空間的維度高於6時，其他的維度坐標就用延遲坐標來表示。圖11是利用上述的六個時間序列所得到的D隨N的變化圖。很明顯的，標準偏差比圖10的更小了。這表示利用越多變數的時間序列來重組相空間，不僅可以增加坐標的線性獨立性，也可以獲得比較準確的結果。

我們還可以利用六個測站均屬於同一動力系統的結論，把各別時間序列當成是同一個時間序列的不同部分而把它們前後連接在一起以增加資料數。圖12就是利用連結法得到的時間序列所計算出的D隨N的變化圖。我們發現不僅標準偏差比個別時間序列所得到的要大很多，而且飽和的維度值也比個別時間序列得到的要高。這可能是因為不同的時間序列連接在一起時會產生資料的不連續所造成的。由這結果我們認為連結法並不是一個用來重組相空間的可靠方法。

五、結 論

從上節的結果分析中，我們可以得到下列的結論：

- (1) 從動力系統的觀點而言，雖然各地顯現的氣候特徵可能有所差異，整個台灣地區是屬於同一個動力系統。台灣地區天氣吸引子的維度，比較可靠的估計應在8.5左右或以上。這表示我們至少需要9個變數以上的動力系統才能模擬台灣地區天氣的演化過程。
- (2) 就吸引子維度的演算法而言，點樣維度法不僅比較可靠，而且能提供我們有關吸引子在相空間的不均勻性和誤差的估計。
- (3) 就利用單一資料來重組相空間而言，壓力資料可能比溫度資料要適合些。
- (4) 就資料長度而言，60年左右的資料長度才能使吸引子本身的不均勻性所導至的偏差量增加的現象與資料長度的增加所導至的偏差量減小的現象大致達到平衡。因此我們至少需要60年以上的資料長度才能比較可靠的估算天氣吸引子的維度。可是如果要進一步減少誤差，就必需有更長的資料。
- (5) 就重組相空間的方法而言，利用多變數的時間序列來重組相空間的多頻法，可以減少資料數有限所引起的吸引子維度之計算誤差。

相空間重組方法不僅讓我們可以從觀測時間序列來探討實際動力系統的特徵，而且也提供了我們一個分析混沌時間序列的有效方法。然而它的應用並不只限於被用來估計動力系統的吸引子維度而已。它也可以被使用於時間序列資料的濾波、可預報度的計算、動力系統的 Lyapunov exponents 的計算和實際系統演化的預報上。因此相空間重組方法的應用是值得我們去深入研究與推廣的。

致 謝

本文是在國科會專案計畫 NSC80-0202-M008-08與中央氣象局委託研究計畫 CWB80-01-04 支援下完成的。

參考文獻

- 李永安，1990：天氣吸引子維度的估算。大氣科學，18，4，327-336。

- Essex, C., T. Lookman, and M.A.H. Nereberg, 1987: The climate attractor over short time scales. *Nature*, 326, 64-66.
- Farmer, J. D., Ott, E. and Yorke, J. A., 1981: The dimension of chaotic attractors. *Physica*, 7D, 153-180.
- Fraedrich, K., 1986: Estimating the dimensions of weather and climate attractors. *J. Atmos. Sci.*, 432, 419-432.
- Fraedrich, K., 1987: Estimating weather and climate predictability on attractors. *J. Atmos. Sci.*, 44, 722-728.
- Fraedrich, K. and Leslie, M. L., 1989: Estimates of cyclone track predictability. I: Tropical cyclones in the Australian region. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 115, 79-92.
- Fraedrich, K. and Grotjahn, R. and Leslie, M. L., 1990: Estimates of cyclone track predictability. II: Fractal analysis of mid-latitude cyclones. *Q.J.R. Meteorol. Soc.*, 116, 317-335.
- Grassberger, P., and I. Procaccia, 1983a: Characterization of strange attractor. *Phys. Rev. Lett.*, 50, 346-349.
- Grassberger, P., and I. Procaccia, 1983b: Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica*, 9D, 189-208.
- Hense, A., 1897: On the possible existence of a strange attractor for the southern oscillation. *Beitr. Phys. Atmos.*, 60, 34-47.
- Holzfluss, J. and Mayer-Kress, G., 1986: An approach to error-estimation in the application of dimension algorithms. In *Dimensions and entropies in chaotic systems*, Mayer-Kress, G., Ed., Springer-Verlag, 114-122.
- Keppenne, C. L., and Nicolis, C., 1989: Global properties and local structure of the weather attractor over western Europe. *J. Atmos. Sci.*, 46, 2356-2370.
- Nicolis, C. and Nicolis, G., 1984: Is there a climatic attractor? *Nature*, 311, 529-532.
- Nicolis, C. and Nicolis, G., 1985: Reconstruction of the dynamics of the climate system from time-series data. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 83, 536-540.
- Ruelle, D., 1981: Chemical kinetics and differentiable dynamical systems. *Nonlinear phenomena in chemical dynamics*, A. Pacault and C. Vidal, Berlin, Eds. Springer-Verlag, 30-37.
- Takens, F., 1981: Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical systems and turbulence*. Warwick, Springer-Verlag, 366-381.
- Tsonis, A. A., and J. B. Elsner, 1988: The weather attractor over very short time scales. *Nature*, 333, 545-547.

The Application of Pointwise Dimension Algorithm to
Calculate the Dimension of Weather Attractor

Yung-An Lee Yao-Ting Shao

Institute of Atmospheric Physics
National Central University

(manuscript received 29 December 1991; in final form 27 February 1992)

ABSTRACT

By using phase space reconstruction method and pointwise dimension algorithm, we calculate the dimension of local weather attractor from observed time series data. We found that, from dynamic system point of view, the whole Taiwan area belongs to the same system. As for methods of estimation the dimension of attractor, pointwise dimension algorithm seems to give more reliable results. From the variation of error growth with data length, it seems that we need at least 60 year of data to obtain reliable estimation of the dimension of weather attractor.

Key Words: Phase space reconstruction method, dynamic system, attractor, pointwise dimension.