

穩定對稱颱風橫向環流的計算

曾憲瑗譯

Computation of Transverse Circulation in a Steady State, Symmetric Hurricane

一、引言

一般都同意颱風之三向分力，“切向者”（Tangential）為人所最熟悉，“沿徑者”（Radial）可以計算但含有很大誤差，“垂直者”（Vertical）僅能由其他方面推算。在一颱風中從一已知之切速度分佈來描述橫向（即沿徑與垂直）環流，乃為一嘗試。

為了計算颱風之目的，假定在一穩定情況且其環流對稱。計算上應用之基本方程主要與1961年被Krishnamurti 為同一目的所應用者相同，然而計算之方法却有別，最近之研究，此問題被計劃為由電腦（IBM7094）解決，而K氏則應用人力衆多之特殊法則。而更重要者，為現時之模式包括一摩擦邊際層（Frictional boundary Layer），因此產生一更為真實的徑流分佈。

二、基本方程

應用圓柱形座標系（Cylindrical coordinate system），以氣壓 p 為垂直座標，方位角 θ 為反時鐘方向， r 為沿徑向座標由颱風中心向外增加，而中心被視為原點。

氣流限定在下列假定情況下：

(a) 在穩定情況下之運動。

(b) 所有變量與軸對稱。

實際上颱風可能僅有一短時在穩定狀態，而可能永不對稱。然而這是可能的，颱風動力主要部份可被計算為穩定的，接近於對稱的。任何情形的調查均顯示為合理的，在非對稱例證中，企圖以更複雜方法試驗之前，先見對稱旋率。

假定穩定狀態先消去局部導數，及減少方程式特殊的形式，對稱之假定可減少問題達二因次。利用這些假定於一般方程，得到下列平衡運動的水平方程：

$$u \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} + f \right) + \omega \frac{\partial u}{\partial p} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left[\kappa \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right) \right] \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial r} - v \left(\frac{v}{r} + f \right) + \omega \frac{\partial u}{\partial p} + g \frac{\partial z}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left[\kappa \frac{\partial u}{\partial p} \right] \quad (2)$$

第三運動方程，由近似流體靜力方程所代替

$$0 = -g \frac{\partial z}{\partial p} - \frac{RT}{p} \quad (3)$$

化連續方程為

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ur) + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (4)$$

此處 u 為切線速度，在 θ 增加時其方向（逆時鐘）為正。

u = 沿徑速度，外流時為正。

ω = 垂直速度。

dp/dt = 氣壓，向下增加時其方向為正。

z = 等壓面重力位高度。

g = 假定為 9.8 m sec^{-2} 。

f = 科氏參數。

T = 溫度。

R = 氣體常數。

ν = 水平動力渦流黏性係數。

κ = 垂直動力渦流黏性係數。

在 p 坐標系統垂直交換係數 κ ，當長度因次 ν 的平方被時間所除時，此氣壓因次的平方亦被時間所除。在 z 坐標中， κ 與交換係數間之關係 $\kappa = p^2 g^2 \kappa'$ ，此處 κ' 與 ν 有相同之因次。

熱力學第一定律呈此型：

$$H = C_p \left[u \frac{\partial T}{\partial r} + \omega \frac{\partial T}{\partial p} \right] - \frac{RT}{p} \omega \quad (5)$$

C_p 為定壓比熱，可被用為校正絕熱加熱率 H 。

三、氣流函數及動量

在颱風中心垂直軸附近，單位質量絕對角動量 M 給出如下：

$$M = ur + f r^2 / 2 \quad (6)$$

$$\text{則 } \frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ur) + f = \eta \quad (7)$$

此處 η 為絕對渦旋率，即

$$\frac{1}{r} \frac{\partial M}{\partial p} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial p} (ur) = -\frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (8)$$

氣流函數 ψ 適合於連續方程(4)者被定義為：

$$ur = \frac{\partial \psi}{\partial p}; \quad \omega r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (9)$$

將(7)，(8)，(9)代入(1)得

$$\frac{\partial M}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial p} - \frac{\partial M}{\partial p} \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u}{r} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial p} \left[\kappa r^2 \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{u}{r} \right) \right] \quad (10)$$

對任一指定之 ψ 場言，(10)為按 ψ 之一次直線微分方程，對每一個獨立的不同 r 及 p 需要一邊界條件，氣流函數對模式 ($r=0$) 軸，當邊界條件符合對稱之假定時，亦被假定為零。在摩擦層之頂氣流函數沿 r 的邊界值，非規定即計算。此需所用之一法中，摩擦層頂的垂直速度，係採用以前的研究且用於計算由(9)式所得之氣流函數邊界值。所用之第二法，為一摩擦阻力方程（Frictional drag equation），該方程用以計算由一規定阻力係數的摩擦層頂之氣流函數。

倘交換係數及沿徑向速度場為已知，(10)式中的氣流函數 ψ 現已可被解決。於檢查氣流函數後，徑與垂直速度可從(9)式算出，然後氣壓面重力高度亦可由(2)式檢查，倘由中心至外面距離 r_0 間的某些高度為已知，用方程式(9)計算溫度分佈，最後(5)式可被用以檢查假絕熱之熱的分佈。

四、摩擦層模式方程

因(10)式為主層之底層，需要沿 r 之氣流函數邊界值，於行使計算之前需有一檢查法。

對高層較低邊界之垂直速度，可因資料之規定或被計算而得，此段述明高層底部（摩擦層頂）氣流函數之計算法。

對摩擦層將採用下列假定

$$(a) \frac{\partial}{\partial r} \left[\nu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \right) \right] \ll \frac{\partial}{\partial p} \left[\kappa \left(\frac{\partial u}{\partial p} \right) \right]$$

$$(b) \omega \frac{\partial \psi}{\partial p} \text{ 可略去。}$$

因此由(1)式

$$u \eta = \frac{\partial}{\partial p} \left(\kappa \frac{\partial r}{\partial p} \right) = -g \frac{\partial T}{\partial p} \quad (11)$$

τ 為應力（Stress），係結合切向風的垂直風切出現。方程式(11)為在海平面氣壓 p_s 與摩擦層頂氣壓 p_0 間之積分，而此處 τ 之假定消失。

$$\text{由(11)式 } \int_{p_s}^{p_0} u \eta dp = g T_s \quad (12)$$

此處 T_s 為切向之地面風應力。

地面應力可由半徑經驗方式估計

$$T_s = \rho C_D u_s |u_s| \quad (13)$$

此處 C_D 為阻力係數。

以 $\frac{\partial \psi}{\partial p}$ 代(12)式中之 u ，可獲其積分如下：

$$\bar{\eta} (\psi_0 - \psi_s) = r g \rho C_D u_s |u_s| \quad (14)$$

$\bar{\eta}$ 為摩擦層之平均渦旋率

ψ_0 為 p_0 上之氣流函數

ψ_s 為 p_s 上之氣流函數

邊界條件 $\psi=0$ ，在 $r=0$ 時將受影響，而假定 $\omega_s=0$

因此由(9) $\psi_s=0$ 之結果則

$$\psi_0 = \frac{r g \rho C_D u_s |u_s|}{\bar{\eta}} \quad (15)$$

一相似的方程曾為Ooyama氏所應用，以計算颱風發展。

就解題之嚴格意義言， u_s 與 C_D 值之應用必決定於地面或地面邊界層。然而因 u_s 值在那種形態下難以決定，相當於高層最低面之值將被應用，同樣情況， $\bar{\eta}$ 值在上述層， $\bar{\eta}$ 將接近 η_0 。

檢查 ψ_0 的交替方法，是要在 p_0 層規定垂直速度，然後用(9)式代替 ω_0 ，則 ψ 可行計算。

五、模式及邊界條件

基本的，此為一兩層型之模式；一較低層（摩擦層）由(15)所支配，及一向上發展到 p_0 層的高層。被計算到100mb層，普通該層被假定為颱風所能上達之最高層（見1954年 Riehl）。摩擦層頂 p_0 將被假定為一相當於900mb固定之等壓面。此意謂為海面上的摩擦層高度且被假定向颱風中心作向內之減少。

水平與垂直交換係數值，對每一計算機都假定為常數，雖則此非最好假定，但為可代表真實變化現有知識之最簡便法，在(15)中阻力係數亦被視為常數。

六、計算步驟

對微分方程所有計算係應用近似定差法完成。

設主要網格座標以 i, j 區別， i 沿徑距離向內為正， j 沿氣壓 p 向上減少為正，中網格以 (κ, l) 區別之， $\kappa = i + 1/2$ 而 $l = j + 1/2$ 網格距離。此法被用以供給最大之解答性，僅容許微分係數誤差約為大於一網格而不足二網格長度；切線速度資料如表所示皆符合 i, j 網格。

符合(10)式之一定差方程可表示如下：

$$\bar{M}_r^p \bar{\psi}_r^p - \bar{M}_p^r \bar{\psi}_r^p = C(r, p) \quad (16)$$

此處 $\bar{M}_r^p$ 係應用沿 p 之平均值及沿 r 之導數，其他符號有相同意義。

方程式(10)之 $C(r, p)$ 項，成為兩部份：第一部份包括水平交換係數，第二部份為垂直交換係數，此為主要網格點間之計算（中間點），合乎所用之平均定差結構。

因氣流函數在軸上為已知（邊界條件），及在主要層之底部（已給出或計算得），氣流函數在 r

$=\Delta r$ 及 $p=\Delta p$, 可從下式計算而得:

$$\psi_{i,j} = [(\bar{M}_r^p)_{k,l} \Delta r (\psi_{i,j-1} + \psi_{i-1,j-1} - \psi_{i-1,j}) - (\bar{M}_p^r)_{k,l} \Delta p (\psi_{i,j-1} - \psi_{i-1,j-1} - \psi_{i-1,j}) - 2C_{k,l} \Delta r \Delta p] \div [(\bar{M}_r^p)_{k,l} \Delta r + (\bar{M}_p^r)_{k,l} \Delta p] \dots (7)$$

由 $r=0$, $p=P_0$ (即 $i,j=1,1$) 開始, 計算之進行既可沿 r 也可沿 p 。其他參數可仿前述得之。

表一 1958年 Cleo 颶風之切線速度 (KTS)

徑向 (km)	0*	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150
氣壓 (mb)											
100	0	3.0	5.0	7.5	9.8	11.6	14.0	12.0	9.7	7.5	6.0
150	0	4.8	7.5	10.0	15.0	22.0	25.0	24.0	20.0	12.0	9.5
200	0	6.0	9.5	14.0	22.0	29.5	32.0	30.4	27.4	21.0	15.0
250	0	7.5	12.2	20.0	27.4	34.4	37.5	36.0	31.8	27.0	22.0
300	0	9.2	15.2	24.0	32.0	40.0	42.0	40.0	36.6	31.8	27.6
350	0	10.0	18.0	29.5	40.0	44.6	45.5	43.8	41.4	37.6	32.0
400	0	10.4	20.4	37.0	46.0	49.5	49.4	47.5	45.0	41.8	38.0
450	0	13.0	25.5	44.0	52.5	53.6	52.5	51.0	48.5	45.0	41.6
500	0	14.8	30.0	51.0	56.4	56.0	55.7	53.6	51.0	48.5	44.8
550	0	15.0	38.0	55.2	59.0	57.5	56.5	54.9	52.5	50.8	48.0
600	0	17.0	42.0	57.5	60.2	58.5	57.2	55.8	53.8	52.0	50.0
650	0	19.0	47.0	61.0	62.0	59.5	58.0	56.4	54.2	53.0	51.0
700	0	19.6	50.0	62.0	63.0	60.0	58.4	57.0	54.8	53.4	52.0
750	0	19.8	52.0	63.0	64.0	60.5	59.0	56.8	55.0	53.6	52.6
800	0	20.0	51.0	64.0	64.0	60.5	59.0	56.4	54.2	53.6	53.0
850	0	20.0	50.0	65.0	64.0	60.0	57.6	55.0	54.0	53.0	52.8
900	0										

* 位軸處之切線速因預及對稱故假定為零

(1961年的 Carla 颶風切線速度也被應用為單獨試驗中的輸入值, 然此處未轉載)。

900mb之垂直速度亦以邊界條件被作為輔助應用, 但未用方程式中之摩擦層, 這些速度會由 K 氏對 1958 年之 Cleo 予以計算。

水平與垂直交換係數為需被補充以完成計算之二重要物理量。作為一開始點, 假定 $\nu=10^8 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$, $\kappa=10^5 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$, 此處 $\kappa=k'\rho^2 g^2$ 為 x, y, z 對稱系統中之垂直交換係數。為着因次理由此處用 κ 較 k 更為便利。然而在數值計算上 κ 被保留為常數, 而不用 k 。在試驗中被帶來 ν/κ 比率, 以求是否可據此比率獲得結果。此數種比率已為 Cleo 之資料予以試驗。

另一重要輸入值為阻力係數 C_D 。此即須解出支配摩擦層的方程式。 10^{-3} 為第一個被用到之值。此為用以比較被 Miller 考慮動量平衡所算得 2.7×10^{-3} 之值。一略小於 Miller 之值被用於開始點, 因 ν 值在 (5) 中所代替之高度比 Miller 氏者為更高 (在此例中為 900mb)。其他阻力係數值亦被試用。

八、橫向環流之試驗計算

七、輸入值

對輸入問題 (Input), K 氏曾於 1961 年應用為計算 1958 年 Cleo 颶風之切線速。此颶風之切線速度用於網格點, 由中心起 150km 距離每 15km 為一間隔點, 同時由 900 到 1000mb 每 50mb 為一間隔。在颶風中心的切線速度假定為零, 俾與所應用之對稱系統一致。被用於此計算中的切線速度值見表 1

就本文主要目的而論, 乃在決定摩擦係數之合理值, 對相同輸入資料 (Input data) 已有數組試驗完成。水平交換係數, 垂直交換係數, 及對其施以不同組試驗後, 根據現有之有限知識有不同系統性之阻力係數。對 Cleo 及 Carla 颶風為切線速度場所行之試驗已逾一百次。茲將分拆之試驗結果及與此結果有關者一併陳述於後:

這些研究最重要的結果乃為所計算得之氣流模型 (Flow patterns), 如氣流函數場所顯示者, 從此模型徑速度及垂直速度可被評估。這些流體函數場根據四組已給條件而成, 即 (1) 切線速度, (2) 阻力係數, (3) 水平及垂直交換係數及 (4) 邊界條件及模式近似值之應用。切線速已用於二颶風。然而, 就此僅有之 1958 年的 Cleo 計算結果而論, 已為一較佳的資料定識, 而與 Carla 計算亦無重大意義之不同。

1958 年之 Cleo 颶風其規模與 Carla 比較可謂為一小風暴, 其最大風速發現於距中心 25 哩處, 颶風眼之半徑約 15 哩, 颶風之觀測乃於距中心 100 哩處之 300mb 高度層。

摩擦層之條件對計算合成氣流型甚為嚴格。橫向環流的數種主要特性, 每因阻力係數的輕微變化即呈可感改變。計算 900mb 層之垂直速作為三不同阻力係數的半徑函數, 會與 K 氏 (1961) 之計算值加以比較, 被發覺 2×10^{-3} 的 C_D 值為一最近似 K 氏結果之值。雖數值幾近相同, 然其最大垂直速度與半徑距離並不一致, 此種不同乃為所預期者。此可記起 K 氏模式不包括摩擦層之一事; 即其結果中 900mb 層所計算的垂直速度係僅由於水平與垂直交換係數而得。且 900mb 高度也在他的模式內, 當本文以較低之邊界為主層時, $C_D=5 \times 10^{-3}$ 值同樣也被試驗過; 然而所獲之 900mb 高度垂直速度甚大。亦發覺隨半徑的 C_D 變化及風速將產生一更平滑的流動, 但却難予決定何種變化將給一最佳之結果。

本文中所指之摩擦層為由地面至主要層 (900mb) 之底部 (在圖中以斷線示出之摩擦層)。流入層應用由地面到徑速為零之高度。摩擦層之厚度因為壓面隨正 r 值的向上傾斜而呈減小, 當流入層有一不規則的上邊界並包括摩擦層時。

流入層的厚度經為不同之條件而被調查。流入層隨半徑而變化之情形正如由 Rosenthal 所發現者然。所計算之流入層一般都向颶風中心減少, 而此與 Estoque (1962) 所得者迥相反。雖此仍可見到流入層的厚度一般隨 C_D 之增加而減少, 其他各項則相等, 顯然 C_D 並非唯一因子。伴隨交換係數之內摩擦對氣流之影響甚大。內流與外流層及向上與向下運動層, 在任何邊界條件之任何改變均不相同。數組不同之極端條件的外流層曾被調查。不同試驗經常將交換係數予以保留, 內流層厚度之減低正如 C_D 之增加。此一意義當然為, 如 C_D 够大時, 當所有的高層呈現外流時, 則一切氣團運輸即發生於一平淺低層內。本文所計算之內流及其徑變化相似於由 Rosenthal 所獲得者, 但其深厚却多過 100mb。由此事實觀之, Rosenthal 係用一無水平交換係數之直線式模式, 然其一致却頗令人滿意。

圖 1 至 4 表示所計算得之不同摩擦參數氣流型, 1958 年 Cleo 颶風之邊界條件氣流函數場之表示係以 $10^4 (\text{N.M})^2 \text{ mbhr}^{-1}$ 之值為單位。除極端係數值為例外外, 最為人熟知之颶風特性均被再現, 這種特性如颶風眼, 眼壁, 低層徑內流及圖示清晰的高層外流。

圖 1 為假定一完全光滑而以 $C_D=0$ 計算者, 此一條件給於一強烈而深厚之內流於主要層, 如現知

無內流引起之摩擦層。因一等量之外流被需求以滿足連續方程, 在 100mb 層一甚為強烈之外流與上升運動需予發生。此即說明颶風在 100mb 層上亦應強烈。然而 $C_D=0$ 之情況係被相信不會自然發生, 且此環流僅為假設。

圖 2 係利用 900mb 垂直風速計算 Krishnamurti (1961), 以代替 C_D 之較低邊界條件所獲之氣流剖面圖。此所計算之橫向環流正與所期之 Krishnamurti 者相同。然而其最大之徑流速度發生在較低層。

圖 3 為假設 $\nu=0$, $\kappa=0$ 及 $C_D=10^{-3}$ 之另一極端情況。此模擬條件為無內摩擦且環流亦只由於地面之摩擦阻力。如預期在摩擦層上氣流, 主要為向上及向外流。所含之條件其內流亦主要受限於摩擦層。所可注意者為最大向上垂直速度區域, 比照包括內摩擦計算結果, 從颶風中心移去, 而可由向颶風中心增加阻力係數補救之。然而如前所述, 自然發生的各種不同 C_D 變化仍未能確知。比較圖 1 與 3 之氣流函數可知圖 3 者較為平滑。內摩擦 (擾動混合) 應產生較為平滑之剖面。此相反事實說明其不規則性可能為計算之結果。此種由於圖 1 的計算事實, 涉及切速之第二次微分。

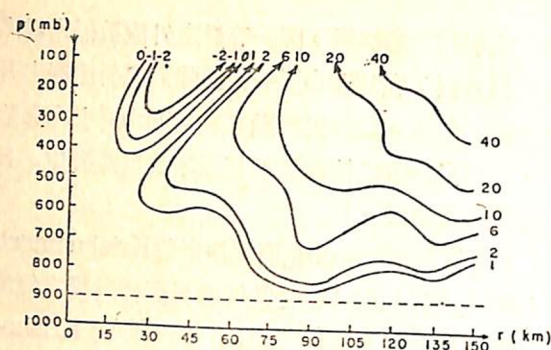
對 ν , κ 及 C_D 之不同組合業經調查獲得結果。用於 C_D 最低非零值為 8×10^{-4} , 即使這種小值給出結果仍與 $C_D=0$ (圖 1) 極不相同, 一個 C_D 的非零值產生一較圖 1 所示更為真實的剖面圖, 並說明不可忽視摩擦阻力的各點。

在理論研究上, 對 C_D 一普通所用之值為 10^{-3} , 此值被用於圖 4 之計算中。此計算中颶風的重要特性被重述, 即: 在眼壁內之下沉運動, 內流層在下外流層在上。為計算圖 4 所用之 ν 及 κ 值分別為 10^8 及 $5 \times 10^5 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ 。為 C_D 等於 10^{-3} 之 ν , κ 不同值亦於計算完成。此種計算之一般結果為橫向環流係隨交換係數值之增加而增加。

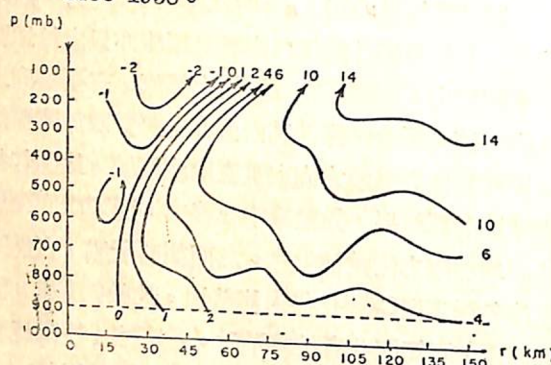
九、橫向環流最後之計算

利用 1958 年之 Cleo 及 1961 年之 Carla 作切線速度資料分析之數次試驗後, 一組最後之計算運用似為最合理摩擦係數值, 完成於 1958 年之 Cleo 資料。其結果為 $C_D=2 \times 10^{-3}$, $\nu=3 \times 10^8 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$, 及 $\kappa=2 \times 10^5 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$ 。此種邊界條件之組合, 比之於較早之研究似乎給出了最好值。

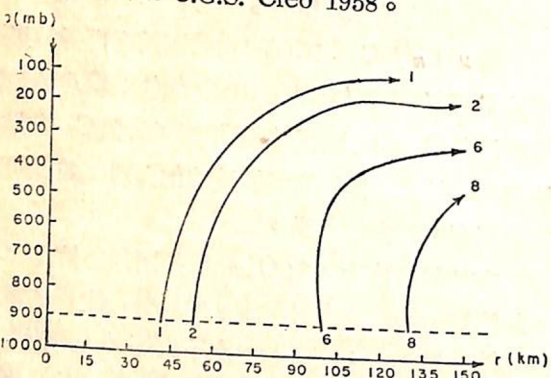
氣流函數場表示如圖 5, 眼壁以氣流函數之零線代替, 被分為向上與向下運動二層, 橫向環流以



圖一、氣流函數 (單位 $10^4 (n.mi)^2 mb hr^{-1}$)
 $C_D = 0$ $v = 3 \times 10^3 C.G.S.$ $\kappa = 2 \times 10^5 C.G.S.$
Cleo 1958。



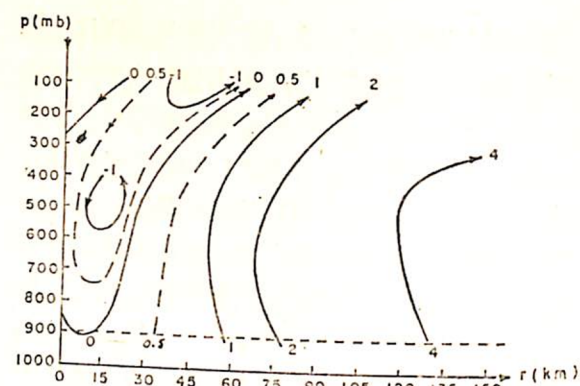
圖二、氣流函數 (單位 $10^4 (n.mi)^2 mb hr^{-1}$)
w 為 900mb 層已給者 $v = 10^3 C.G.S.$
 $\kappa = 5 \times 10^5 C.G.S.$ Cleo 1958。



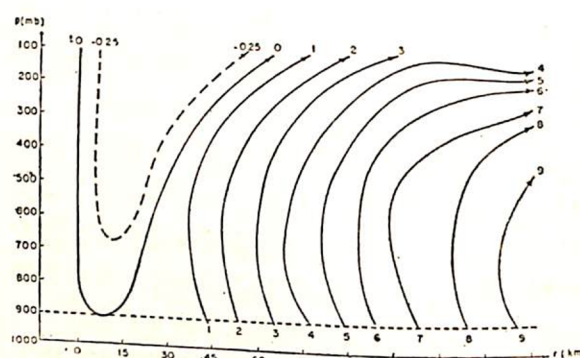
圖三、氣流函數 (單位 $10^4 (n.mi)^2 mb hr^{-1}$)
 $C_D = 2 \times 10^{-3}$ $v = 0$; Cleo 1958。

氣流線代替已如前述。

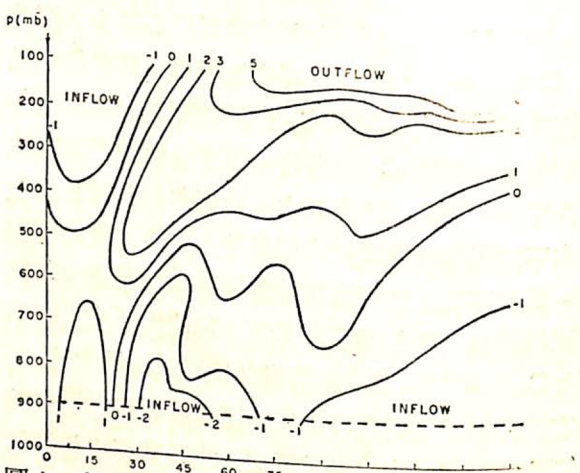
所計算之徑速度分佈 (圖 6)，或可以其與 K 氏 (1961) 之結果比較。在此結果中其內流層較淺，最大徑速度發生於摩擦層。雖此仍未顯示於圖 6，在摩擦層中之平均內流 (由地面至 900mb 即圖中低於虛線者) 其向上增加從距中心之 45km 的 4 kts 到 135km 之 12 kts 中 (此或可憶及 K 氏模式之無摩擦層一事)。在近中心之頂於颱風眼中被下沉運動所伴隨有一小的內流層。此場與 Estogue 者 (1962)



圖四、氣流函數 (單位 $10^4 (n.mi)^2 mb hr^{-1}$)
 $C_D = 10^{-3}$ $v = 10^3 C.G.S.$ $\kappa = 5 \times 10^5 C.G.S.$
Cleo 1958。



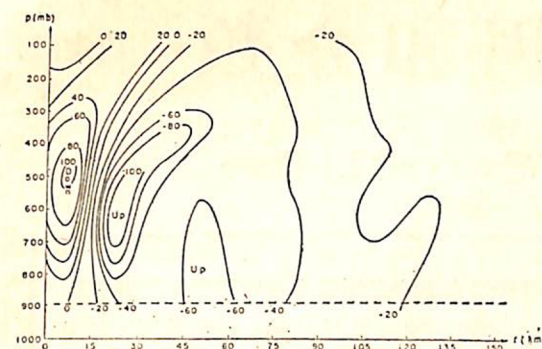
圖五、氣流函數 (單位 $10^4 (n.mi)^2 mb hr^{-1}$)
Cleo 1958。



圖六、沿徑速 單位 Knots, Cleo 1958。

) 有所不同，在該場內內流層厚度如由 Estogue 所計算者然並不向中心增加。

1958 年 Cleo 之垂直速度剖面圖 (圖 7)，表示出 (Riehl 1954) 颱風所有之重要特性。垂直速度之零線或可被認為係眼壁之內邊界，一對眼壁之強烈上升運動及眼中之下沉運動被計算出來。或亦可見眼壁隨高度向外傾斜。在 150km 處之上升運動是一較眼壁為低之數序。其最大上升運動層位於最大切線風速層之內。此點與被 Lavoie 氏 (於 1962 年曾



圖七、垂直速 (單位 $mb hr^{-1}$) Cleo 1958。

