

# 高階尤拉正定平流格式的研究

黃清勇 廖建誠  
國立中央大學 大氣科學系

(中華民國八十四年八月十四日收稿；中華民國八十四年十二月二十八日定稿)

## 摘要

本文針對正定(positive definite)物理量平流作用研究其特殊數值方法。文中比較兩種通量形式(flux form)的尤拉格式，一為Bott格式利用多項式插分法，是Bott(1989a,b)所提出，另一為NIC<sub>E</sub>格式利用三次樣條(cubic spline)插分法，是Emde(1992)所提出，理論上二者皆保證正純量場及嚴格的質量保守。文中包含均勻流場測試、旋轉流場測試、強變形流場測試及循環性純變形流場測試。在平滑流場(均勻流場與旋轉流場)，面積保有條件導出的六階Bott格式表現最佳，於六次旋轉測試仍保有短波振幅達82%。對較長波而言，四階的Bott格式比NIC<sub>E</sub>格式略優，對短波而言二者則在伯仲之間。但是在強變形流場中，所有Bott格式都有輕度的不穩定，而NIC<sub>E</sub>格式則為穩定的。在循環性純變形流場中，測試循環多次後，NIC<sub>E</sub>格式要比四階及六階Bott格式更能忍受數值耗散。本文所探討的高階正定尤拉通量形式格式，在所有流場測試均嚴格保守正定質量，其綜合表現確屬優異。

關鍵詞：正定、Bott格式

## 一、前言

對一保守純量場其連續方程式如果不考慮物理擴散作用，則可以表為下式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{V}\varphi) \quad (1)$$

式中 $\varphi$ 為被平流量， $\vec{V}$ 為速度， $t$ 為時間。此保守純量場 $\varphi$ 可為空氣密度 $\rho$ 、水汽量 $\rho_w$ 、乃至污染物質質量 $\rho_c$ 。若使用相對的水汽密度如比濕 $q = \rho_w/\rho$ ，或污染物濃度 $c = \rho_c/\rho$ ，(1)式可寫成

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla q \quad (2)$$

與

$$\frac{\partial c}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla c \quad (3)$$

當使用(2)及(3)式時，流場不必是不可壓縮的。若流場可假設為不可壓縮的(即滿足無輻散條件  $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ )，則(1)式可改寫為

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \nabla \varphi \quad (4)$$

且(2)式可改寫為

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\nabla \cdot (\vec{v}q) \quad (5)$$

在不可壓縮流場中，(1)式稱為通量形式(flux form)或稱為保守形式(conservation form)的平流方程式，(4)式稱為平流形式(advection form)的平流方程式，二者在物理上是等同的。

平流方程式通常被歸類為雙曲線型(hyperbolic)微分方程式，傳統的二階波動方程式也是雙曲線型方程式，可以兩個一階平流方程式之組合系統表示，因此波動方程式與平流方程式的解析解二者有相似的特性。由於平流對於流體力學的所有領域皆非常重要，而且由於數值方法模擬平流方程式所遭遇的種種困難，過去數十年來，被提出來的數值平流格式超過一百種(Rood, 1987)。

由於數值平流格式為其連續微分方程於離散空間之近似式，其所衍生的問題如下：

(1) 質量守恆(mass conservation)：質量守恆是數值平流格式最基本的要求，尤其對空氣品質模式而言。如果違反這個原則，意味著污染物的質量可能減少、增加、或經由其他質量修正方式，使污染物在空間上任意重新分配，而傷害了結果的可信度。

(2) 數值頻散(numerical dispersion)：純量場在空間上的分布，可以傅立葉級數來逼近，數值頻散誤差之來源乃是由於波長不同的傅立葉波傳播時具有不同的相速所造成的。純量場梯度愈陡峭時，兩個網格間距波長之分量越大，以有限差分法模擬時失真率越高，因此產生之頻散誤差愈形重要。

(3) 數值擴散(numerical diffusion)：數值擴散誤差大部份乃是由於截斷誤差而來，由於數值擴散誤差的影響，原有純量場分布量度產生耗散(dissipation)。對模式而言，這種現象意味著，空間上被平流量會被低估，因此數值平流格式，應該盡量減少數值擴散。

(4) 正定(positive definiteness)：平流量若為雨量、濃度等，在物理上不可能出現負值的量，因此若無正定格式來估算這些物理量之平流，數值上可能會出現雨量、濃度等為負值的不合理情況。

正定平流格式對數值天氣預報來說是很重要的，凡舉水汽、雲水、雨水、亂流動能及其他正定場的平流過程之數值模擬，皆須依賴良好的正定格式。近年來，已有許多數值研究學者提出不同的正定平流格式，其中廣為人所注意如Smolarkiewicz利用上游反擴散聚集質量的二階至四階格式(Smolarkiewicz, 1983, 1984; Smolarkiewicz與Clark, 1986)，國內已有學者研究(見柳，1993；柳與郭，1994)，Bott(1989a,b)利用拉格朗日(多項式)差分法所得之四階格式，以及Emde(1992)利用三次樣條(cubic spline)差分的NIC<sub>E</sub>格式，國內研究亦見於張(1994)。上述方法

均為尤拉通量式，理論上保守正定場之純量，且因採用高階演算，於各類流場測試中均得到遠較一階上游法(此法因採線性差分，自然具有正定性質)為優。相對於其他同階尤拉平流形式格式，尤拉通量形式格式有較好的表現，但兩者在穩定度上均受限於庫朗數(Courant number)不能大於一的條件。上述正定數值格式自發表以來，其表現已廣為學界所注意，個別結果可見於文獻，但彼此缺乏進一步比較。Huang(1994)在測試半拉格朗日平流格式發現，若欲對格式進行長期積分，則高階演算式有其明顯的優異性。本文主要目的有二，一為發展並評價六階Bott尤拉格式，另一為將四階及六階Bott格式與Emde的NIC<sub>E</sub>格式，做系統性的測試及比較。

## 二、數值格式

本文主要探討的尤拉格式有兩種，一是Bott(1989a,b)平流格式，另為Emde(1992)的NIC<sub>E</sub>平流格式，這兩個格式都是正定的通量形式。

### (一) Bott 格式

Bott(1989a,b)提出了一個對於純量平流的數值格式，這個格式是時間向前、正定、質量保守、計算有效率而且只有很小的數值擴散。Bott首先將Tremback等人(1987)發展出來的平流通量常化，是為了要降低相速誤差，再由非線性調整限制這些常化的通量，來壓制傳送量的負值，這就是Bott所提出的處理方式。

首先敘述在流場中，一個非擴散量傳送的連續方程式如(1)式。為了簡化，我們只討論其一維形式，

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\partial u\varphi}{\partial x} \quad (6)$$

假設網格間距 $\Delta x$ 及時間間隔 $\Delta t$ 是固定的，則(6)通量形式的有限差分可表為

$$\varphi_j^{n+1} = \varphi_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} [F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n] \quad (7)$$

代表 $\varphi$ 在網格點 $j$ ，時間步驟 $n+1$ 後的新值， $F_{j+1/2}^n$ 與 $F_{j-1/2}^n$ 代表在時間步驟 $n$ 通過 $j$ 網格塊(grid box)右邊界及左邊界的通量 $u\varphi$ 。使用上游法得到(7)中之右邊界的通量為

$$F_{j+1/2}^n = \frac{\Delta x}{\Delta t} [c_j^+ \varphi_j^n - c_j^- \varphi_{j+1}^n] \quad (8)$$

其中定義

$$c_j^\pm = \pm (c_{j+1/2}^n \pm |c_{j+1/2}^n|) / 2 \quad (9)$$

且

$$c_{j+1/2}^n = u_{j+1/2}^n \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (10)$$

為在網格 $j+1/2$ 的庫朗數。在每一個時間步驟，所有網格點都要符合CFL條件(此為格式穩定的必要條件)，

$$\text{CFL 條件: } c_j^+ + c_j^- \leq 1 \quad (11)$$

注意，爲了簡化符號，上式上標  $n$  省掉了。

Bott 根據 Crowley(1968) 和 Tremback 等人(1987) 所提出利用多項式插分的方式，假設在網格  $j$  內  $\varphi$  的分佈是一  $l$  階的多項式可表爲

$$\varphi_{j,l}(x') = \sum_{k=0}^l a_{j,k} x'^k \quad (12)$$

其中

$$x' = \frac{(x - x_j)}{\Delta x}, \quad -\frac{1}{2} \leq x' \leq \frac{1}{2}$$

對(12)式中係數  $a_{j,k}$ ，Bott 在 1989a 利用鄰近網格值的幫助，內插  $\varphi$  曲線來求得  $a_{j,k}$  對  $l = 0, \dots, 4$  的值。稍後又在 1989b 中，利用面積保有 (area-preserving) 的概念，求得另一組新的  $a_{j,k}$ ，而後者是較符合物理意義的，因爲前者只考慮利用一條多項式曲線，來代表網格  $j$  內  $\varphi$  的分佈，而後者除了建立曲線以外，曲線下所包含的面積也等於該網格內所包含平流量的面積，也就是面積保有的，至於詳細的推導，將在下一節中討論。接下來，定義及計算這些積分式

$$\begin{aligned} I_l^+(c_{j+1/2}) &= \int_{\frac{1}{2} - c_j^+}^{1/2} \varphi_{j,l}(x') dx' \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{a_{j,k}}{(k+1) \cdot 2^{k+1}} [1 - (1 - 2c_j^+)^{k+1}] \end{aligned} \quad (13)$$

及

$$\begin{aligned} I_l^-(c_{j+1/2}) &= \int_{-1/2}^{-\frac{1}{2} + c_j^-} \varphi_{j+1,l}(x') dx' \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{a_{j+1,k}}{(k+1) \cdot 2^{k+1}} \cdot (-1)^k [1 - (1 - 2c_j^-)^{k+1}] \end{aligned} \quad (14)$$

得到了通過網格  $j$  右邊界的  $\varphi$  通量

$$F_{j+1/2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} [I_l^+(c_{j+1/2}) - I_l^-(c_{j+1/2})] \quad (15)$$

再加上正定的條件

$$0 \leq I_l^+(c_{j+1/2}) + I_l^-(c_{j-1/2}) \leq \varphi_j \quad (16)$$

因此，這整個流出去網格的總流量是正值，而且被  $\varphi_j$  所限制。檢驗(13)及(14)，證明了當  $l$  等於 0 時，這個條件是正確的，因爲在這個狀況下，(15)簡化成上游版的(8)式，但是當  $l > 0$ ，積分不一定和(16)一致。比方說，假如  $l$  大於等於 2，而且  $c_{j+1/2}$  的絕對值等於 1 時，利用 Von-Neumann 穩度分析，得到振幅放大因子和相速比皆比 1 小 (Tremback 等人(1987)，表三)，證明了平流方程的正解不會被複製。這是由於當  $c_{j+1/2}$  的絕對值等於 1 時，網格內被曲線  $\varphi_{j,l}(x')$  覆蓋的面積

是被  $\varphi_j \Delta x$  給定，才能得到解析解，當  $l$  等於 1 和 0 時，是符合上述情況，但是當多項式的階數  $l$  大於等於 2 時，通常不滿足這個條件。要處理這個差異，須將  $\varphi_{j,l}(x')$  乘上一個適當的權重因子  $\frac{\varphi_j}{I_{l,j}}$ ，在此定義

$$I_{l,j} = I^\pm(c_{j\pm 1/2} = \pm 1)$$

由(13)式與(14)式可得

$$\begin{aligned} I_{l,j} &= \int_{-1/2}^{1/2} \varphi_{j,l}(x') dx' \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{a_{j,k}}{(k+1) \cdot 2^{k+1}} [(-1)^k + 1] \end{aligned} \quad (17)$$

現在被權重多項式覆蓋的網格  $j$  的面積可為  $\varphi_j \Delta x$ ，如果在(15)的右邊乘上適當的權重因子，使所得到的平流通量為

$$F_{j+1/2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \left[ \frac{I_l^+(c_{j+1/2})}{I_{l,j}} \varphi_j - \frac{I_l^-(c_{j+1/2})}{I_{l,j+1}} \varphi_{j+1} \right] \quad (18)$$

最後，根據(15)及(16)，限制平流通量的上、下限，格式可變成正定演算

$$F_{j+1/2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \left[ \frac{i_{l,j+1/2}^+}{i_{l,j}} \varphi_j - \frac{i_{l,j+1/2}^-}{i_{l,j+1}} \varphi_{j+1} \right] \quad (19)$$

其中

$$\begin{aligned} i_{l,j+1/2}^+ &= \text{Max}(0, I_l^+(c_{j+1/2})) \\ i_{l,j+1/2}^- &= \text{Max}(0, I_l^-(c_{j+1/2})) \\ i_{l,j} &= \text{Max}(I_{l,j}, i_{l,j+1/2}^+ + i_{l,j+1/2}^- + \varepsilon) \end{aligned} \quad (20)$$

(20)式中加入一個小的  $\varepsilon$  量，是爲了要避免分母爲 0 的困擾。而(20)也說明了， $c_{j+1/2} > 0$  和  $c_{j-1/2} < 0$  的情況。在這個狀況下，必須考慮流出網格  $j$  的量是發生在邊界  $j-1/2$  和  $j+1/2$  上，因此，這兩個通量的和必須被  $\varphi_j \Delta x / \Delta t$  所限制。

至於對通過網格左邊的通量  $F_{j-1/2}$  可由計算  $F_{j+1/2}$  之公式 ( $j$  減 1) 推知，爲更清楚起見，我們亦將其表示出來。同樣的定義及計算這些積分式

$$\begin{aligned} I_l^+(c_{j-1/2}) &= \int_{\frac{1}{2}-c_{j-1}^+}^{1/2} \varphi_{j-1,l}(x') dx' \\ &= \sum_{k=0}^l \frac{a_{j-1,k}}{(k+1) \cdot 2^{k+1}} [1 - (1 - 2c_{j-1}^+)^{k+1}] \\ I_l^-(c_{j-1/2}) &= \int_{-1/2}^{-\frac{1}{2}+c_{j-1}^-} \varphi_{j-1,l}(x') dx' \end{aligned} \quad (21)$$

$$= \sum_{k=0}^l \frac{a_{j,k}}{(k+1) \cdot 2^{k+1}} \cdot (-1)^k [1 - (1 - 2c_{j-1}^-)^{k+1}] \quad (22)$$

得到了通過網格  $j$  左邊界的  $\varphi$  通量

$$F_{j-1/2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} [I_l^+(c_{j-1/2}) - I_l^-(c_{j-1/2})] \quad (23)$$

將  $\varphi_{j,l}(x')$  乘上一個適當的權重因子 (weighting factor)  $\frac{\varphi_j}{I_{l,j}}$  得

$$F_{j-1/2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \left[ \frac{I_l^+(c_{j-1/2})}{I_{l,j-1}} \varphi_{j-1} - \frac{I_l^-(c_{j-1/2})}{I_{l,j}} \varphi_j \right] \quad (24)$$

最後，根據 (21) 與 (22)，限制平流通量的上限及下限，格式變成具正定演算如下

$$F_{j-1/2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \left[ \frac{i_{l,j-1/2}^+}{i_{l,j-1}} \varphi_{j-1} - \frac{i_{l,j-1/2}^-}{i_{l,j}} \varphi_j \right] \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} i_{l,j-1/2}^+ &= \text{Max}(0, I_l^+(c_{j-1/2})) \\ i_{l,j-1/2}^- &= \text{Max}(0, I_l^-(c_{j-1/2})) \\ i_{l,j} &= \text{Max}(I_{l,j}, i_{l,j-1/2}^+ + i_{l,j-1/2}^- + \varepsilon) \end{aligned} \quad (26)$$

網格點上純量  $\varphi$  平流後的新值則可由 (7) 式得到。

## (二) 六階 Bott 格式

Bott 在 1989a 中利用鄰近網格值的幫助，內插  $\varphi$  一曲線，即利用在上節中 (12) 式對  $l = 0, \dots, 4$  的值，來求得係數  $a_{j,k}$ 。但是在 1989b 中，爲了要較符合物理意義，Bott 加入了面積保有的條件，也就是說，將權重通量等於多項式  $\varphi_{j,l}(x')$  的平移即可，如下式

$$\varphi_i \Delta x_i = \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \sum_{k=0}^l a_{j,k} x' dx' \quad i = j, j \pm 1, \dots \quad (27)$$

其中

$$x' = \frac{(x - x_j)}{\Delta x}, \quad \Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$$

至於對六階面積保有格式中係數  $a_{j,k}$  的演算 ( $l = 6$ )，因有 7 個方程式，須求解 7 個未知數，故請參看附錄 A，所求得  $l = 2, 4, 6$  的  $a_{j,k}$  列於表一。爲了比較有無面積保有條件之差異，利用 1989a 方法所得之  $l = 2, 4, 6$  的  $a_{j,k}$  列於表二。根據 Tremback 等人 (1987) 所述，六階格式在效率和準確性的取捨上是最佳的，所以本文不再往六階以上討論。

表一 面積保有版Bott格式的多項式展開係數  $a_{j,k}$ 。

階數	係數
$l=2$	$\alpha_0 = (-\varphi_{j+1} + 26\varphi_j - \varphi_{j-1}) / 24$ $\alpha_1 = (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) / 2$ $\alpha_2 = (\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}) / 2$
$l=4$	$\alpha_0 = (9\varphi_{j+2} - 116\varphi_{j+1} + 2134\varphi_j - 116\varphi_{j-1} + 9\varphi_{j-2}) / 1920$ $\alpha_1 = (-5\varphi_{j+2} + 34\varphi_{j+1} - 34\varphi_{j-1} + 5\varphi_{j-2}) / 48$ $\alpha_2 = (-3\varphi_{j+2} + 36\varphi_{j+1} - 66\varphi_j + 36\varphi_{j-1} - 3\varphi_{j-2}) / 48$ $\alpha_3 = (\varphi_{j+2} - 2\varphi_{j+1} + 2\varphi_{j-1} - \varphi_{j-2}) / 12$ $\alpha_4 = (\varphi_{j+2} - 4\varphi_{j+1} + 6\varphi_j - 4\varphi_{j-1} + \varphi_{j-2}) / 24$
$l=6$	$\alpha_0 = \frac{1}{967680} [-675\varphi_{j+3} + 8586\varphi_{j+2} - 68589\varphi_{j+1} + 1089036\varphi_j - 68589\varphi_{j-1} + 8586\varphi_{j-2} - 675\varphi_{j-3}]$ $\alpha_1 = \frac{1}{11520} [259\varphi_{j+3} - 2236\varphi_{j+2} + 9455\varphi_{j+1} - 9455\varphi_{j-1} + 2236\varphi_{j-2} - 259\varphi_{j-3}]$ $\alpha_2 = \frac{1}{11520} [111\varphi_{j+3} - 1386\varphi_{j+2} + 10305\varphi_{j+1} - 18060\varphi_j + 10305\varphi_{j-1} - 1386\varphi_{j-2} + 111\varphi_{j-3}]$ $\alpha_3 = \frac{1}{288} [-7\varphi_{j+3} + 52\varphi_{j+2} - 83\varphi_{j+1} + 83\varphi_{j-1} - 52\varphi_{j-2} + 7\varphi_{j-3}]$ $\alpha_4 = \frac{1}{576} [-5\varphi_{j+3} + 54\varphi_{j+2} - 171\varphi_{j+1} + 244\varphi_j - 171\varphi_{j-1} + 54\varphi_{j-2} - 5\varphi_{j-3}]$ $\alpha_5 = \frac{1}{240} [\varphi_{j+3} - 4\varphi_{j+2} + 5\varphi_{j+1} - 5\varphi_{j-1} + 4\varphi_{j-2} - \varphi_{j-3}]$ $\alpha_6 = \frac{1}{720} [\varphi_{j+3} - 6\varphi_{j+2} + 15\varphi_{j+1} - 20\varphi_j + 15\varphi_{j-1} - 6\varphi_{j-2} + \varphi_{j-3}]$

表二 原版Bott格式的多項式展開係數 $a_{j,k}$ 。

<u>階數</u>	<u>係數</u>
$l=2$	$a_0 = \varphi_j$ $a_1 = (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1})/2$ $a_2 = (\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1})/2$
$l=4$	$a_0 = \varphi_j$ $a_1 = (-\varphi_{j+2} + 8\varphi_{j+1} - 8\varphi_{j-1} + \varphi_{j-2})/12$ $a_2 = (-\varphi_{j+2} + 16\varphi_{j+1} - 30\varphi_j + 16\varphi_{j-1} - \varphi_{j-2})/24$ $a_3 = (\varphi_{j+2} - 2\varphi_{j+1} + 2\varphi_{j-1} - \varphi_{j-2})/12$ $a_4 = (\varphi_{j+2} - 4\varphi_{j+1} + 6\varphi_j - 4\varphi_{j-1} + \varphi_{j-2})/24$
$l=6$	$a_0 = \varphi_j$ $a_1 = \frac{1}{60}[\varphi_{j+3} - 9\varphi_{j+2} + 45\varphi_{j+1} - 45\varphi_{j-1} + 9\varphi_{j-2} - \varphi_{j-3}]$ $a_2 = \frac{1}{360}[2\varphi_{j+3} - 27\varphi_{j+2} + 270\varphi_{j+1} - 490\varphi_j + 270\varphi_{j-1} - 27\varphi_{j-2} + 2\varphi_{j-3}]$ $a_3 = \frac{1}{48}[-\varphi_{j+3} + 8\varphi_{j+2} - 13\varphi_{j+1} + 13\varphi_{j-1} - 8\varphi_{j-2} + \varphi_{j-3}]$ $a_4 = \frac{1}{144}[-\varphi_{j+3} + 12\varphi_{j+2} - 39\varphi_{j+1} + 56\varphi_j - 39\varphi_{j-1} + 12\varphi_{j-2} - \varphi_{j-3}]$ $a_5 = \frac{1}{240}[\varphi_{j+3} - 4\varphi_{j+2} + 5\varphi_{j+1} - 5\varphi_{j-1} + 4\varphi_{j-2} - \varphi_{j-3}]$ $a_6 = \frac{1}{720}[\varphi_{j+3} - 6\varphi_{j+2} + 15\varphi_{j+1} - 20\varphi_j + 15\varphi_{j-1} - 6\varphi_{j-2} + \varphi_{j-3}]$



表三 旋轉流場數值實驗中，各種平流格式經過3768個時間步階計算後所得結果(庫朗數為0.5)。

格式	$\frac{\sum \varphi^{3768}}{\sum \varphi^0}$			$\frac{\sum (\varphi^{3768})^2}{\sum (\varphi^0)^2}$			$\frac{\varphi_{\max}^{3768}}{\varphi_{\max}^0}$		
	15 $\Delta x$	5 $\Delta x$	3 $\Delta x$	15 $\Delta x$	5 $\Delta x$	3 $\Delta x$	15 $\Delta x$	5 $\Delta x$	3 $\Delta x$
Bos6	1.00	1.00	1.00	0.997	0.913	0.467	0.925	0.824	0.432
Bos4	1.00	1.00	1.00	0.994	0.702	0.289	0.900	0.631	0.267
NICE	1.00	1.00	1.00	0.989	0.681	0.293	0.897	0.630	0.283
Bos6or	1.00	1.00	1.00	0.967	0.426	0.163	0.867	0.425	0.167
Bos4or	1.00	1.00	1.00	0.966	0.411	0.155	0.862	0.403	0.156

說明： $\frac{\sum \varphi^{3768}}{\sum \varphi^0}$ ：常化總質量(normalized total mass)，

$\frac{\sum (\varphi^{3768})^2}{\sum (\varphi^0)^2}$ ：質量分佈比(mass distribution ratio)，

$\frac{\varphi_{\max}^{3768}}{\varphi_{\max}^0}$ ：常化最大值(normalized maximum)，

Bos6：六階面積保有的通量形式的Bott格式，

Bos4：四階面積保有的通量形式的Bott格式，

NICE：NIC<sub>E</sub>格式，

Bos6or：原版六階通量形式的Bott格式，

Bos4or：原版四階通量形式的Bott格式。

### (三) NIC<sub>E</sub> 格式

Purnell(1976)使用一於全部網格點上連續的三次樣條(cubic spline)來求解平流問題，這個平流形式格式具有時間上2階及空間上3階的準確性，已經很成功的應在好幾個半拉格朗日模式上，例如，Pudykiewicz與Staniforth(1984)，Staniforth與Pudykiewicz(1985)，及Temperton與Staniforth(1987)發現此格式在高維的狀況下，即使庫朗數大於1，也能得到良好的結果，但可惜的是，這個格式不是正定的，而且對傳送量不是保守的。Emde(1992)利用三次樣條的差分來處理通量形式的平流方程式，這個格式仍是非正定，但可保守總質量，振幅及相位性質也相當好，稱NIC格式。另外，Emde(1992)利用此三次樣條曲線的局部破壞，使這個算式可以滿足正定，此正定版本稱為NIC<sub>E</sub>格式。目前的NIC<sub>E</sub>亦有其它計算較省時的修改版，如張(1994)所使用的NICM。本文所測試的NIC<sub>E</sub>與Emde(1992)的版本完全相同，其數學式推導頗為冗長，為節省篇幅，有關NIC<sub>E</sub>格式的內容請詳見Emde(1992)。

### 三、數值測試

在本文中，測試包含均勻流場測試、旋轉流場測試、強變形流場測試及循環性純變形流場測試，四種測試的流場均是無輻散的。在測試中所討論的主要有三種比較的數據：

- (1) 常化總質量比： $(\text{測試後總質量})/(\text{測試初總質量})$ 。從這個數據可看出，格式對於質量保守的能力。
- (2) 質量分佈比(distribution ratio)： $(\text{測試後總質量平方})/(\text{測試初總質量平方})$ 。從這個數據可看出，格式在數值擴散及頻散方面的表現。
- (3) 最大值比(peak ratio)： $(\text{測試後最大值})/(\text{測試初最大值})$ 。從這個數據，可以看出格式在保存振幅方面的表現。

這三種數據愈接近1愈好。質量分佈比亦可視為總能量比（如對動量場）。

數值平流格式推導至高維時，數學式的處理將變得非常複雜，計算上亦不具效率性。一般上，多維平流計算都使用分時積分(time-splitting)的技巧處理。所謂分時積分，就是在處理一維以上的時間積分時，分開對各個維度方向積分。比方說在二維時，第一步先對x方向作時間積分求得此方向平流後的新值，次再對y方向作時間積分，但被平流量為已加入x方向平流作用的新值。利用分時積分技巧處理高維格式，有著計算簡單及格式其穩定度範圍不會隨著維度增加而改變的優點。但是，Petscheck和Libersky(1975)發現有些格式，如二階Crowley格式，其分時積分式在變形流場中是不穩定的，因為它不能處理在每一個一維傳送步驟中輻散的非零分量。而這個不穩定會造成在變形流場中，初始均勻的濃度分佈無法維持，這是因為分時積分的前一個步驟，會減少(或增加)網格內濃度，而在下一個步驟，會有補償的行為，把網格濃度增加(或減少)。但是，這兩個步驟在複雜流場下的改變量並不一定可以完全平衡。因此，變形流場的測試乃是深入了解格式性質的重要途徑之一。

為了簡化書寫的目的，文中定義下列符號：

Bos6：六階面積保有通量形式Bott格式，

Bos4：四階面積保有通量形式Bott格式，

NIC<sub>E</sub>：NIC<sub>E</sub>格式(Emde, 1992)，

Bos6or：原版六階通量形式Bott格式，

Bos4or：原版四階通量形式Bott格式。

本文討論的是尤拉格式，其測試穩定度須滿足各維向的庫朗數絕對值必須小於或等於1，物理上即各網格點上純量的平移距離不得離開其網格單位區。

#### (一) 均勻流場測試

這個測試是對於格式的基本測試，測試中流場是均勻的，也就是說每一個網格點上的速度都是一樣。在區域為 $100 \times 100$ 網格點的流場上放入一個底半徑為 $15\Delta x$ 且錐高為3.87的圓錐，錐底圓心在網格點(25,25)上，讓圓錐循對角方向平流至下游處。

圖1中比較Bos4or格式，Bos6or格式，Bos4格式，Bos6格式及NIC<sub>E</sub>格式在不同庫朗數下的質量擴散比與最大值比，可以看出Bos6格式在此測試中表現最好，其次是Bos4格式，而Bos4or格式的表現則最差。另外，所有格式都是嚴格保守正定質量。從這個測試也可以看出，不論在極大值保存或數值擴散方面，面積保有條件限制的Bott格式表現比原版Bott格式都要來得好；NIC<sub>E</sub>格式的表現也比原版Bott格式好。大體上，當使用的庫朗數愈大，格式保有的質量擴散比與最大值比也隨著變好，但其程度並不明顯。例如，當庫朗數由0.05增至0.8，Bos6格式所保有的錐高僅約增加1%。對這些不同庫朗數的測試而言，真實的物理平移距離是相同的。在後面其它的測試，我們也可以看到相似的情形。此測試有一個最大好處，即清楚看出當庫朗數為1時，各格式均得到無數值誤差解（如圖1所示），可見Bott格式的非線性質量權重分佈使得此正定格式至少於數學上是合理一致的。

由於底錐半徑為 $15\Delta x$ ，數值上是屬於為較長波表現，各格式測試結果十分接近，差異度不到3%。當底錐半徑減為 $5\Delta x$ 或更小，六階格式的優越性就更明顯，我們將於下個測試報告。

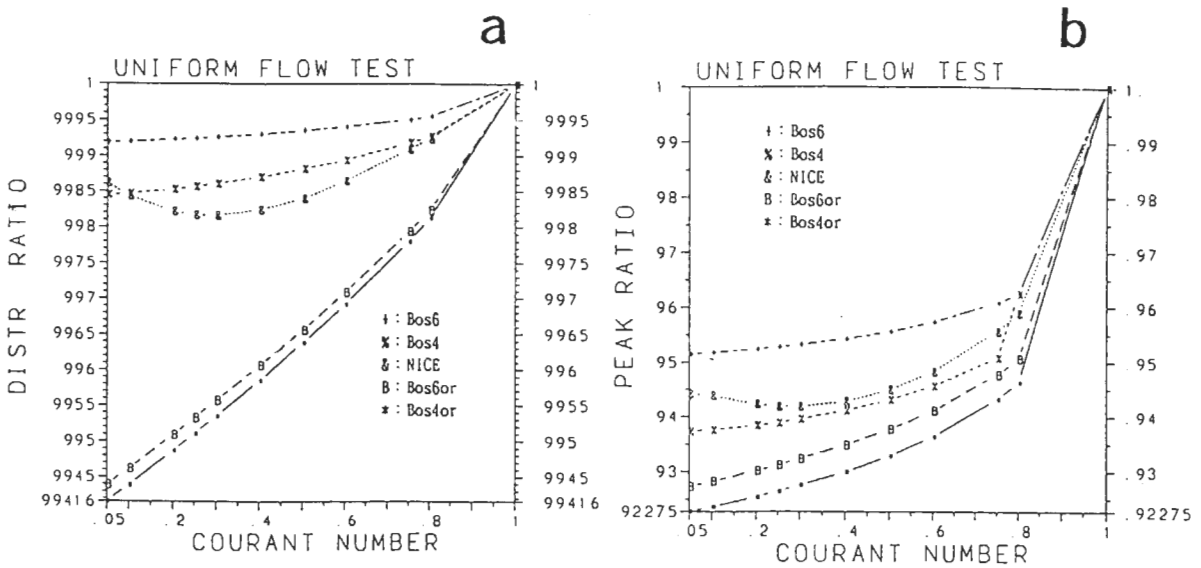


圖1 數值格式在均勻流場中對不同庫朗數的測試結果，(a) 質量分布比及(b) 最大值比。

## (二) 旋轉流場測試

二維旋轉流場測試，長久以來被多人採用為測試數值平流格式表現的標準方法，如Smolarkiewicz(1983,1984)，Bott(1989)，Emde(1992)... 等人。本文的數值實驗將呈圓錐狀分佈之無因次純量置於含 $100 \times 100$ 網格點二維旋轉流場之上方( $50\Delta x, 75\Delta y$ )，設 $\Delta x = \Delta y = 1$ ，圓錐最大高度為3.87。測試開始後，圓錐以 $0.1$ 之角速度 $\omega$ ，反時鐘方向繞著流場區域中心點( $50\Delta x, 50\Delta y$ )旋轉。本測試速度場的流線函數 $\Psi$ 為

$$\Psi(x, y) = \frac{\omega}{2} [(x - 50)^2 + (y - 50)^2]$$

旋轉流場為緩慢變化，可視為準均勻流場，於局部區域其庫朗數變化不大。但由於並無單一特性速度，平流時無法作同距平移，解析解無法完全複製，因此此測試可看出數值解的局部極值的衰減。另外，此簡單流場的平流問題提供正確解，為了解格式保留形狀與相位的能力的重要途徑之一。在此測試，選擇五種底半徑為  $15\Delta x$ ， $8\Delta x$ ， $5\Delta x$ ， $4\Delta x$  及  $3\Delta x$  之圓錐，及數種不同的時間間隔 ( $\Delta t$ )，分別進行測試圓錐繞區域中心六圈後的變化。

首先看各格式 (Bos4, Bos6, NIC<sub>E</sub>, Bos4or 及 Bos6or 格式) 在時間間隔為 0.1 時，對底半徑  $15\Delta x$ ， $5\Delta x$  及  $3\Delta x$  的圓錐的測試結果。測試的時間步驟為 3768 次，測試後所得結果，如表三。此時  $x$  方向上的最大庫朗數與  $y$  方向上的最大庫朗數皆為 0.5。從此表的質量擴散比與最大值比可看出，Bos6 格式皆較 Bos4 格式為佳，同時面積保有版通量形式 Bott 格式的表現比原版通量形式 Bott 格式來得好。NIC<sub>E</sub> 格式與 Bos4 格式表現則相當。由表三亦發現，當圓錐的底半徑愈小，最大值的保留愈不容易，但各格式對質量的保守仍為百分之百。對保留底半徑  $15\Delta x$  的圓錐的最大值比而言，Bos6 格式只比 Bos4 格式約多 2%。但當圓錐底半徑降為  $5\Delta x$ ，此最大值比增為 82%，而 Bos4 格式與 NIC<sub>E</sub> 格式只得到 63%，由此看出六階格式確有明顯的優異性。例如圖 2 為圓錐底半徑  $3\Delta x$  的測試結果，雖然所有格式均呈現大量的數值耗散，圓錐高度已明顯被矮化，但 Bos6 格式的結果算是較可接受的，其表現比 Bos4 格式及 NIC<sub>E</sub> 格式好很多。而 NIC<sub>E</sub> 格式如同 Emde(1992) 所試，仔細看來於圓錐邊產生很小的波紋 (圖 2b)。

Bott 於 1989b 雖提及面積保有版的通量形式格式確比原版好一些，但並未深入比較。於 1989a，他根據對長波的測試結果，指出原版四階格式與三階格式表現非常類似，因此無論面積保有版或原版格式似無往更高階發展之必要。但由表三，我們可以觀察到在旋轉流場測試，六階面積保有版的格式表現確是優越甚多，尤其對較短波而言。此優越性並不因不同庫朗數而改變。底下我們進一步探討其在不同庫朗數下的表現。我們選用底半徑為  $4\Delta x$  及  $8\Delta x$  的兩個錐來進行測試。注意，雖然測試時庫朗數不同，但是測試過程依舊為圓錐繞區域中心六圈，也就是說，每一次測試，圓錐所走的距離是一樣的。圖 3 與圖 4 分別為  $4\Delta x$  與  $8\Delta x$  的測試結果，圖中橫軸為庫朗數，縱軸為比值。當初始錐底半徑為  $4\Delta x$  及  $8\Delta x$  時，Bos4 格式及 Bos6 格式的常化總質量比恆為 1 (未示圖)。當庫朗數增大，Bos4 格式及 Bos6 格式的質量分布比及最大值比亦變大，但仍只有增進 3%。於  $8\Delta x$  測試，對質量分布比及最大值比的保留，Bos6 格式比 Bos4 格式好約 3%，但於底半徑  $4\Delta x$  測試，二者差異則增為至少 20%，且其差距不因庫朗數不同而變。對初始錐底半徑為  $4\Delta x$ ，於繞轉六圈後 Bos6 格式得到最大值比約 79%，我們觀察大部份四階通量形式或平流形式的格式保持不到 50% (Huang and Raman, 1991; Huang, 1994)。

另外加上一測試，此測試的初始所有網格點上的值都加上背景值 1 (如圖 5a)，我們發現於繞轉六圈後所有格式都產生繞圓錐的小波紋 (如圖 5b)，此肇因於初始圓錐底部邊緣是不連續的。Bos4 格式得到最大值 (4.48) 及最小值 (0.96)，而 Bos6 格式得到一個較大的最大值 (4.58) 及較大的最小值 (0.97)，顯示 Bos6 格式的表現仍較為理想 (示於圖 5b)。所有格式在此測試依然保持正定且保守質量。將此背景值增為 100，Bos6 格式與 Bos4 格式所得之結果 (相位、振幅及質量保守) 並不受影響，顯示應用 Bos6 格式與 Bos4 格式於有任何正背景值之正定平流是沒有問

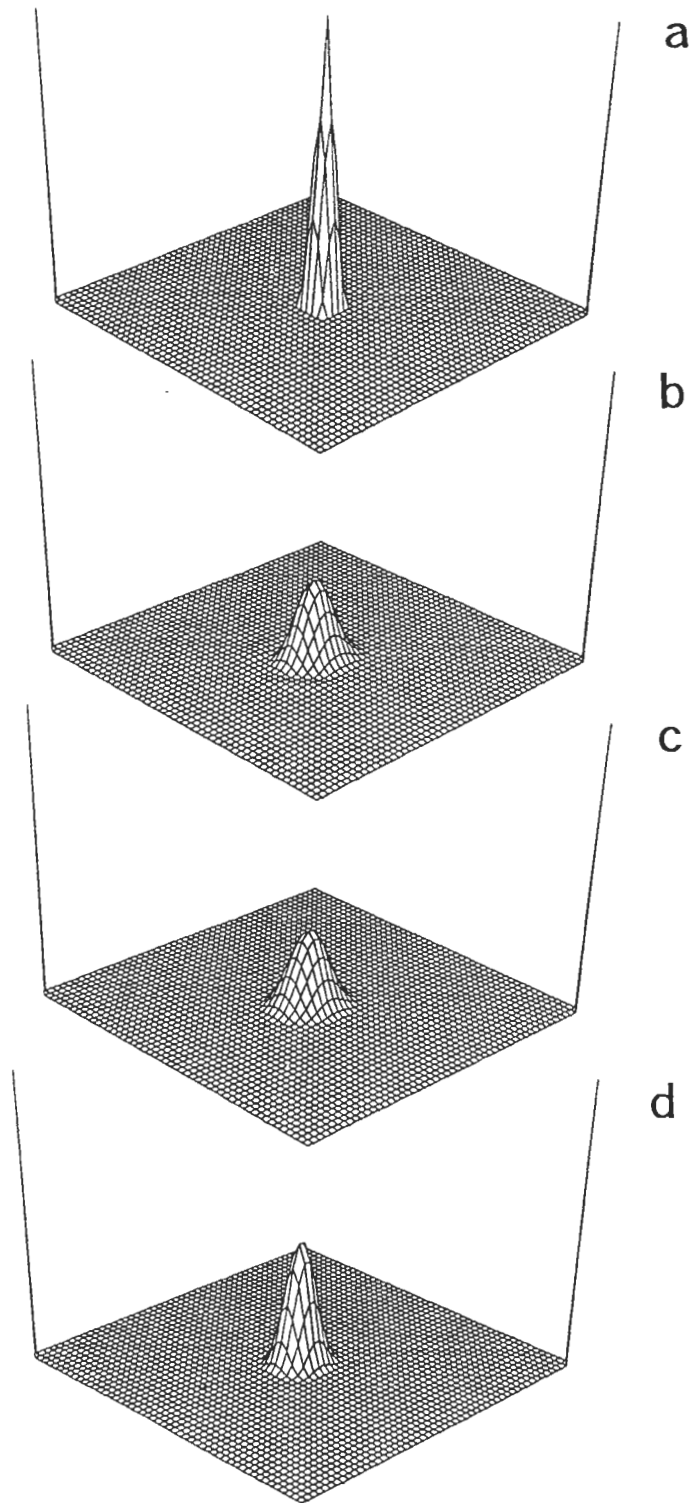


圖2 (a)旋轉流場測試底半徑為 $3\Delta x$ 的初始錐，及於旋轉六圈(積分3768次)後各測試結果為(b) $NIC_E$ 格式，(c) $Bos4$ 格式與(d) $Bos6$ 格式。

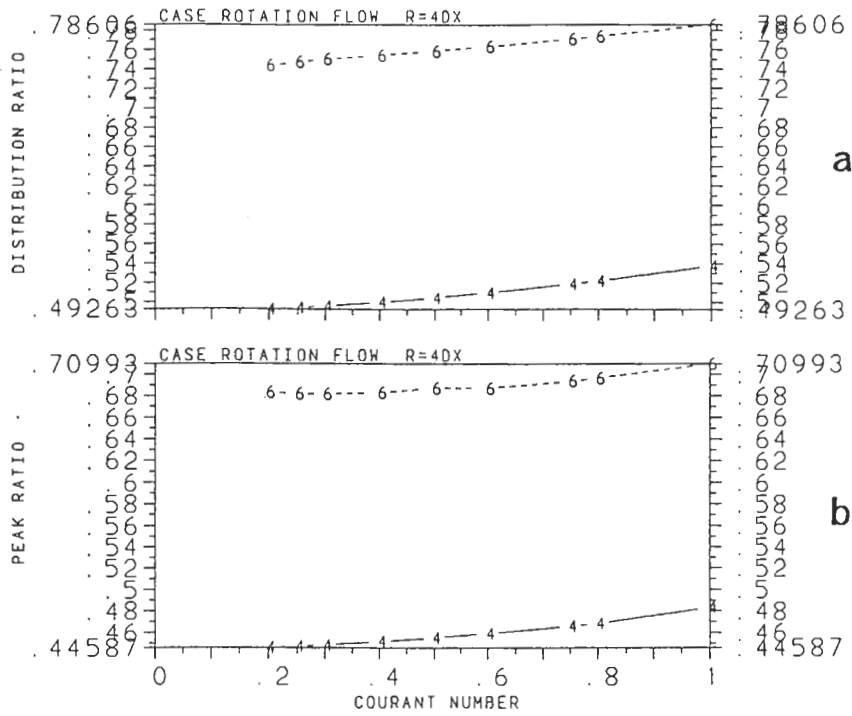


圖3 旋轉流場測試選用底半徑為 $4\Delta x$ 的初始錐，對Bos4格式及Bos6格式在不同庫朗數下，旋轉六圈後所得之質量分布比及最大值比。

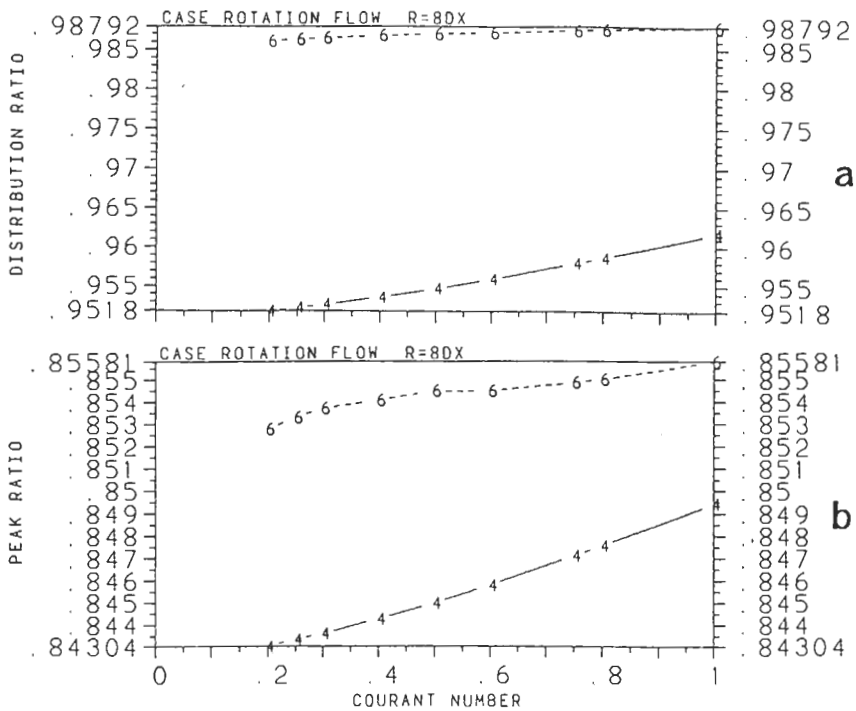


圖4 同圖3，但底半徑為 $8\Delta x$ 的初始錐。

題的，而一般四階 Crowley 或 leapfrog 格式則會產生明顯外傳之深波紋。另外，有一些單調性的 (monotonic) Bott 格式 (Bott, 1992; Chlond, 1994)，可以克服小波紋等溢射 (overshoot) 現象，但其對最大值的保有則較差。

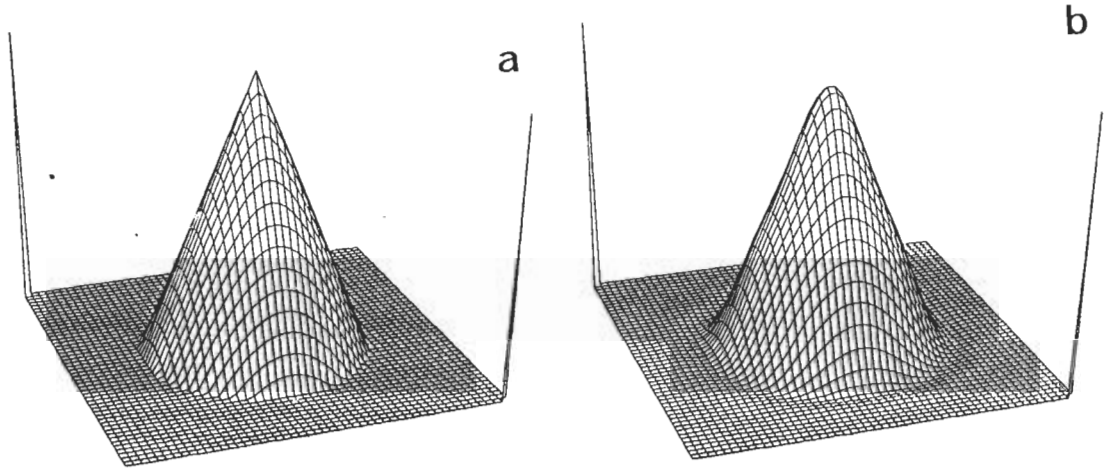


圖5 旋轉流場測試結果，選用底半徑為  $15\Delta x$  且錐高為 3.87 的初始圓錐，但網格點上之值皆加上背景值 1。(a) 初始場，及 (b) Bos6 格式於旋轉六圈 (積分 3768 次) 後測試結果。圖示為取包含圓錐於中心之部份。

### (三) 強變形流場測試

強變形流場的特色之一為於局部區域其庫朗數之變動甚大，數值格式之相位誤差容易被偵測出來。這個強變形流場使用 Smolarkiewicz (1982) 所建議，其流線函數為

$$\Psi(x, y) = 8 \sin\left(\frac{\pi x}{25}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{25}\right)$$

此變形流場於初始測試時，置一底半徑  $15\Delta x$  且最大錐高為 3.87 之圓錐於  $100 \times 100$  網格流場之中央位置，如圖 6 所示。測試開始後圓錐被流線從中間分割，並隨著流線的方向，成兩個對稱的旋渦狀分布。Staniforth 等人 (1987) 指出，此項測試之目的在探討平流格式在劇烈變化流場 (如鋒面過境、颱風等)，長時間運算的數值穩定性及定性相似性，他並且展示了這個平流過程的解析解，便於格式數值解之比較。其解析解特性之一為兩個尺度不斷變小的螺旋捲狀分布，因此終究無法為固定解析度之任何數值格式所能正確模擬。此次網格尺度現象於數值過程而言，將引進數值擴散以取代物理過程之亂流混合作用，因此格式可具有終極性穩定度，其最後結果則為兩個蛋杯狀之純量分布，詳見 Huang (1994)。

Bott 格式測試結果如圖 7 顯示。Bott 格式，不論四階或六階之原版或面積保有版，經過長時間運算後均出現輕微的數值不穩定 (圖中左右兩個垂直柱為初始圓錐參考最大高度)，所得到的最大值皆比初始值大，此結果與解析解不合。而  $NIC_E$  格式的最大值比為 0.24，為兩個穩定的蛋

杯狀純量分佈（未示圖，請見Emde，1992），顯示NIC<sub>E</sub>格式在此嚴苛考驗下，仍能維持其穩定性。圖7亦顯示使用較小積分時距（最大庫朗數0.3）可大為降低使用最大庫朗數為0.7時的不穩定程度，雖然前者之積分次數增加很多。不論最大庫朗數0.3或0.7，六階面積保有版的Bott格式的不穩定度亦比其四階格式來得小。這點符合Tremback等人(1987)對非正定尤拉通量形式的格式的結論。不論Bott格式或NIC<sub>E</sub>格式，其短期積分結果與解析解均非常接近(Bott, 1989a; Emde, 1992)，不再圖示。強變形流場於氣象上常為小尺度劇烈天氣現象所有，其強度通常不會維持像本測試時間長度如此之久，實際情況亦常有不穩定調整如亂流混合過程出現以降低變形強度。因此，雖然Bott格式在此測試並不是終極穩定的，但仍是接受的(Bott, 1989a)。

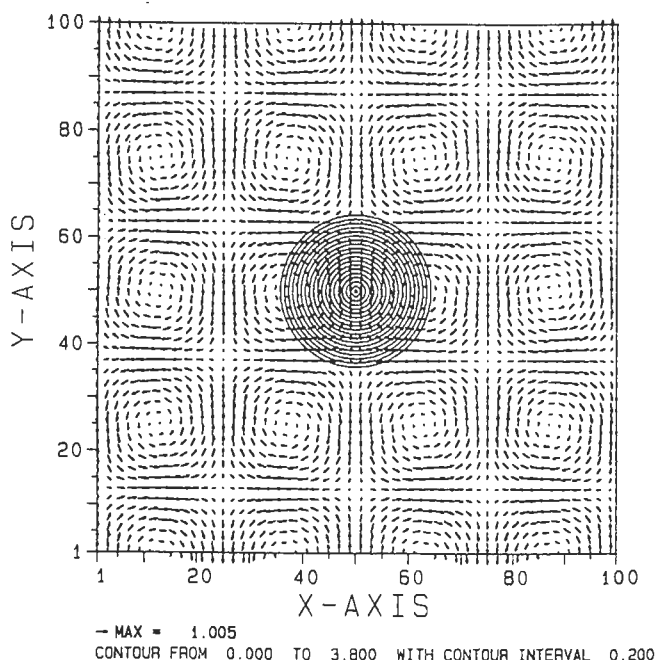


圖6 強變形流場測試的風場，及底半徑為 $15\Delta x$ 的初始錐的位置。

#### (四) 循環性純變形流場測試

純變形流場的純量分佈過程容易被掌握，本文使用Seibert與Morariu(1991)的純變形流場來對格式進行測試，在這個測試中，純變形流場的速度被設計成於時間上呈循環性反向，因此在每次循環後，純量場的初始外觀會被複製，此測試可以不斷考驗格式正向與逆向的綜合表現。這個純變形流場可由下式所述，

$$\begin{aligned} u &= -\alpha(x - x_0) \\ v &= \alpha(y - y_0) \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $\alpha$ 等於1， $x_0$ 與 $y_0$ 為流場中心滯留點。



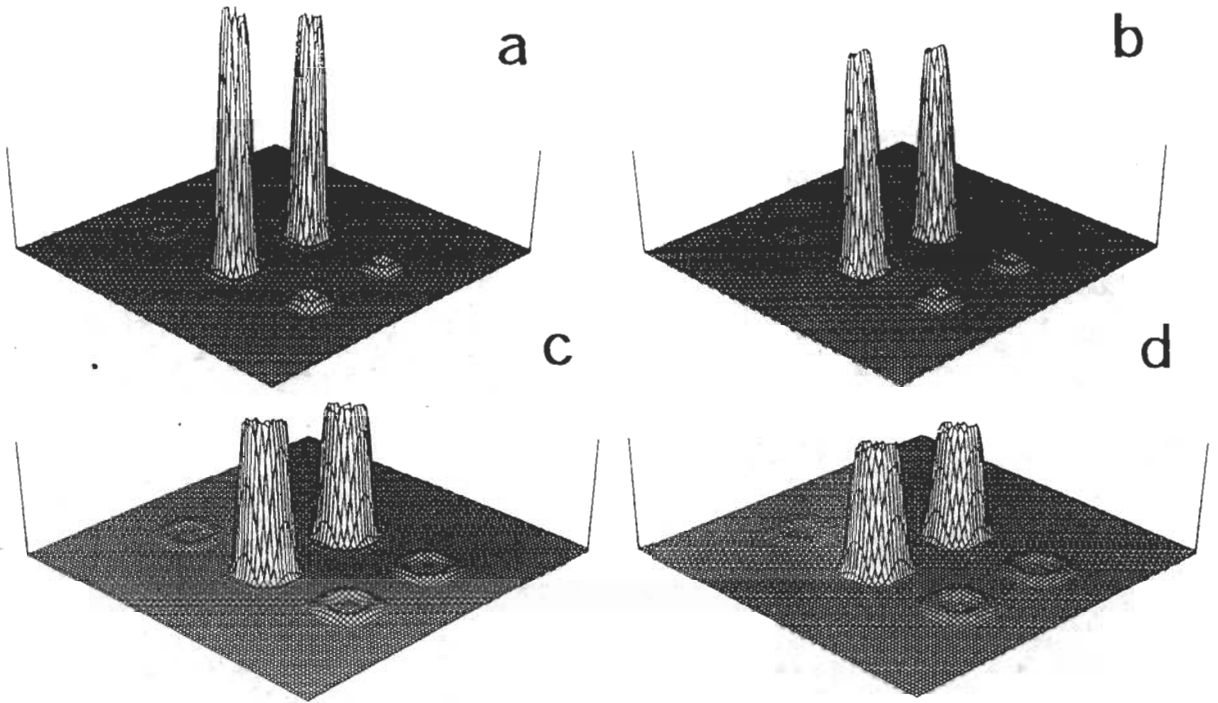


圖7 強變形流場測試結果，(a)Bos6 格式(最大庫朗數0.7，時間步驟3768)，(b)同(a)但為Bos4 格式，(c)Bos6 格式(最大庫朗數0.3，時間步驟8792)，及(d)同(c)但為Bos4 格式。

測試過程為在一個 $100 \times 100$ 網格點的區域中央，放上一個 $9 \times 9$ 網格點的方塊，其高度為100，如圖8所示。在 $(n+1/4)$ ， $n=0, 1, 2, \dots$ 循環時，這個方塊被沿著y方向拉長；在 $(n+1/4)$ 循環到 $(n+3/4)$ 循環流場反向（也就是 $\alpha$ 以 $-\alpha$ 代替），此拉長的方塊會變回初始的形狀，然後再沿著x方向拉長。在 $(n+3/4)$ 循環到 $(n+1)$ 循環時，流場再反向（也就是用 $\alpha$ 代替 $-\alpha$ ），拉長的方塊再變回初始的形狀，如此完成一個循環。測試時，網格間距為10，時間積分間距為0.1。此測試問題的解析解與Seibert與Morariu(1991)相似。

圖9與圖10各示 $NIC_E$  格式與Bos4 格式在1循環內的測試結果。由於樣條插分法在不連續界面容易產生溢值， $NIC_E$  格式比四階Bott 格式有較大的最大值比。在1循環後可看出二個格式模擬的方塊，其底部已經有向外散且頂部有突起的現象。大體而言，原始方塊仍被保持得很好。

圖11是Bott 格式在3循環後的數值解，可看出就保持方塊能力好壞而言，依序為Bos6 格式，Bos4 格式，Bos6or 格式及Bos4or 格式，此時原始方塊底部都有往外散的情形，變得短而胖； $NIC_E$  格式的方塊則較瘦（圖未示），較似初始的形狀。到了10循環後，如圖12所示，Bos4or 格式與Bos6or 格式所得之純量分佈已很像圓錐，其方塊底部的擴散很嚴重，而Bos6 格式尚能記得方塊頂，但其底部擴散亦十分顯著。 $NIC_E$  格式在經過10循環後，得到的形狀仍為接近方塊，其底部亦無嚴重擴散。在經過10循環後， $NIC_E$  格式及所有Bott 格式都是質量保守的。綜合而論，在數值擴散方面， $NIC_E$  格式的表現比Bos6 格式來得好。而對於極大值保存方面，循環次數愈多，Bos6 格式保值的的能力似乎愈弱， $NIC_E$  格式雖較能忍受耗散，但始終有高估的現象。

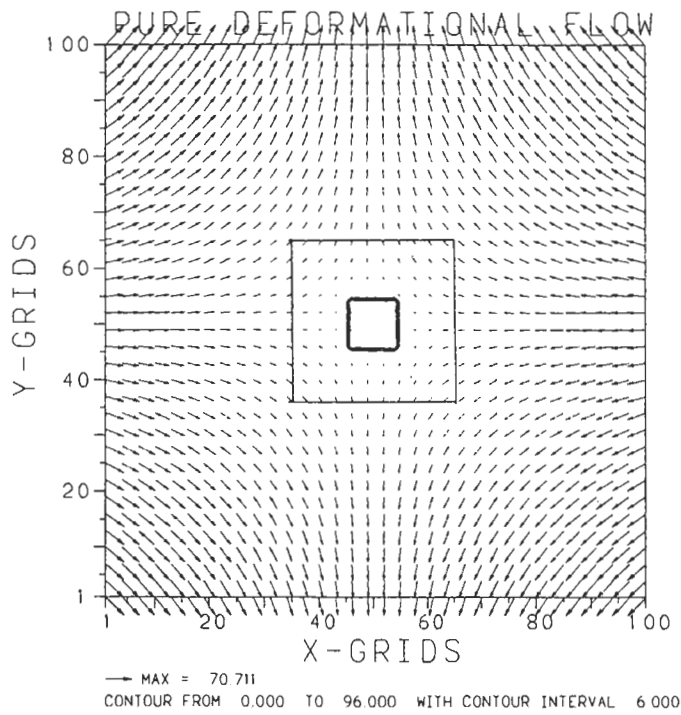


圖8 純變形流場測試之風場，及初始方塊的位置(中間的細方框是畫圖所取的區域)。

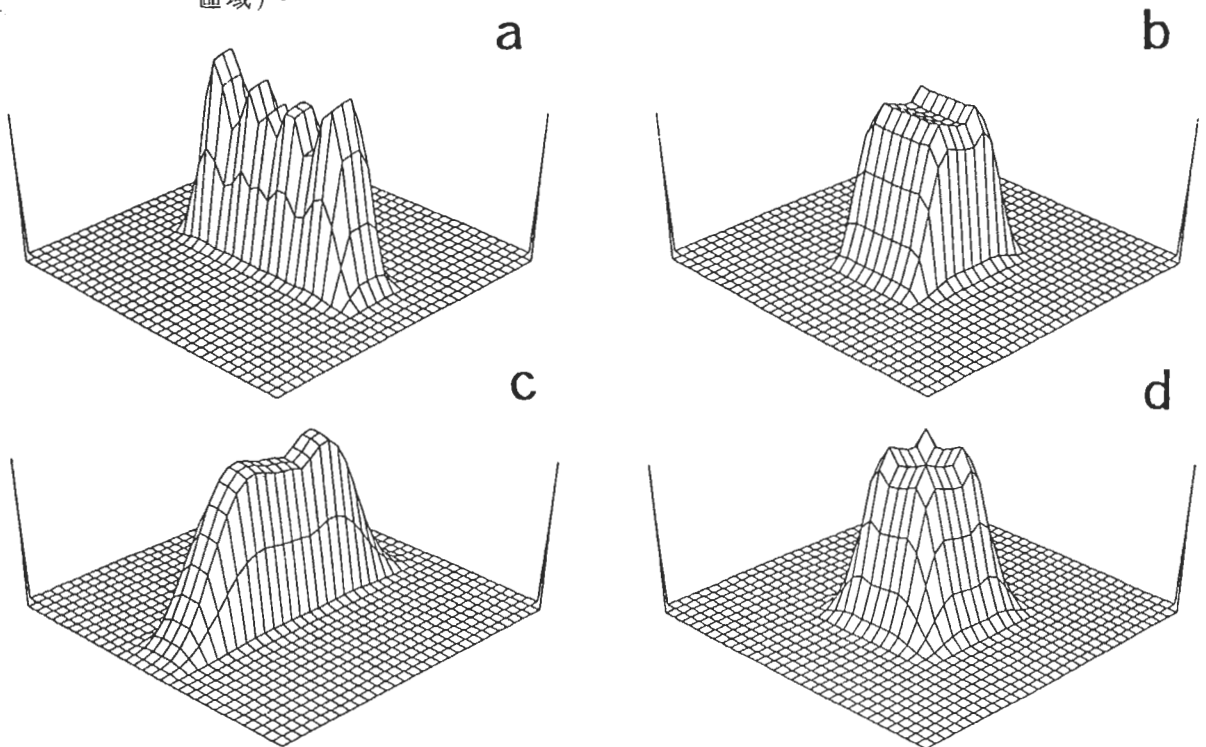


圖9  $NIC_E$  格式於純變形流場在不同循環數的測試結果，(a)1/4循環，(b)1/2循環，(c)3/4循環及(d)1循環。

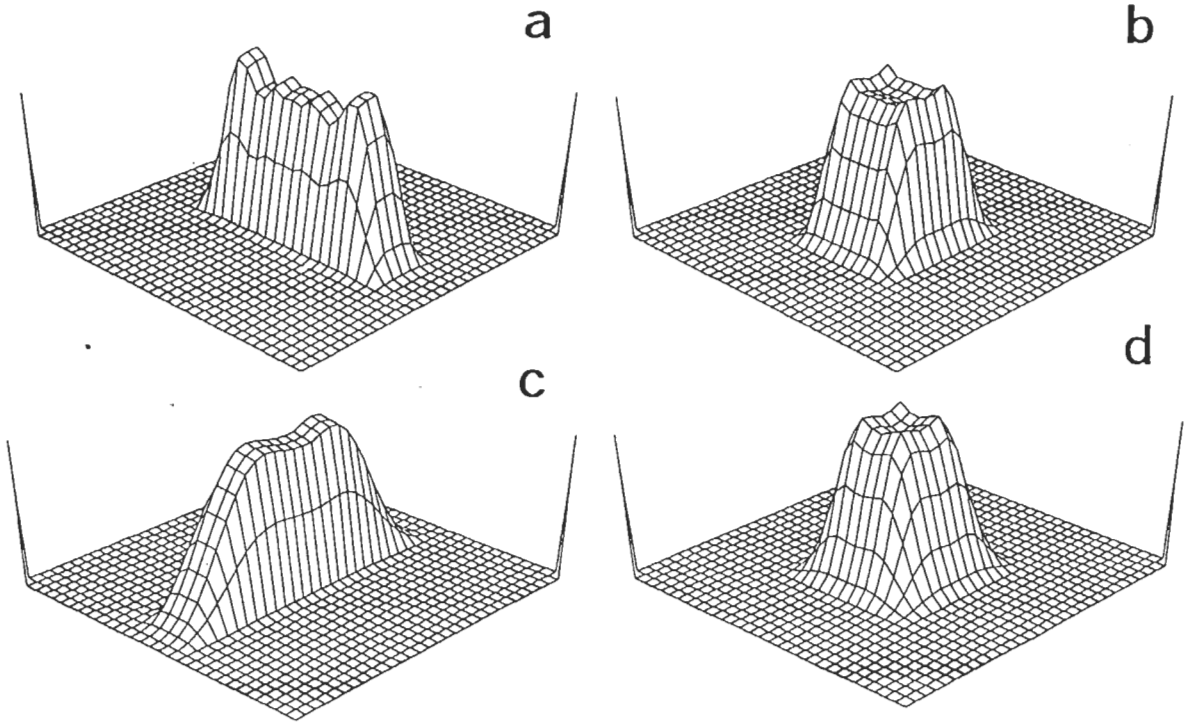


圖10 同圖11，但為Bos4格式。

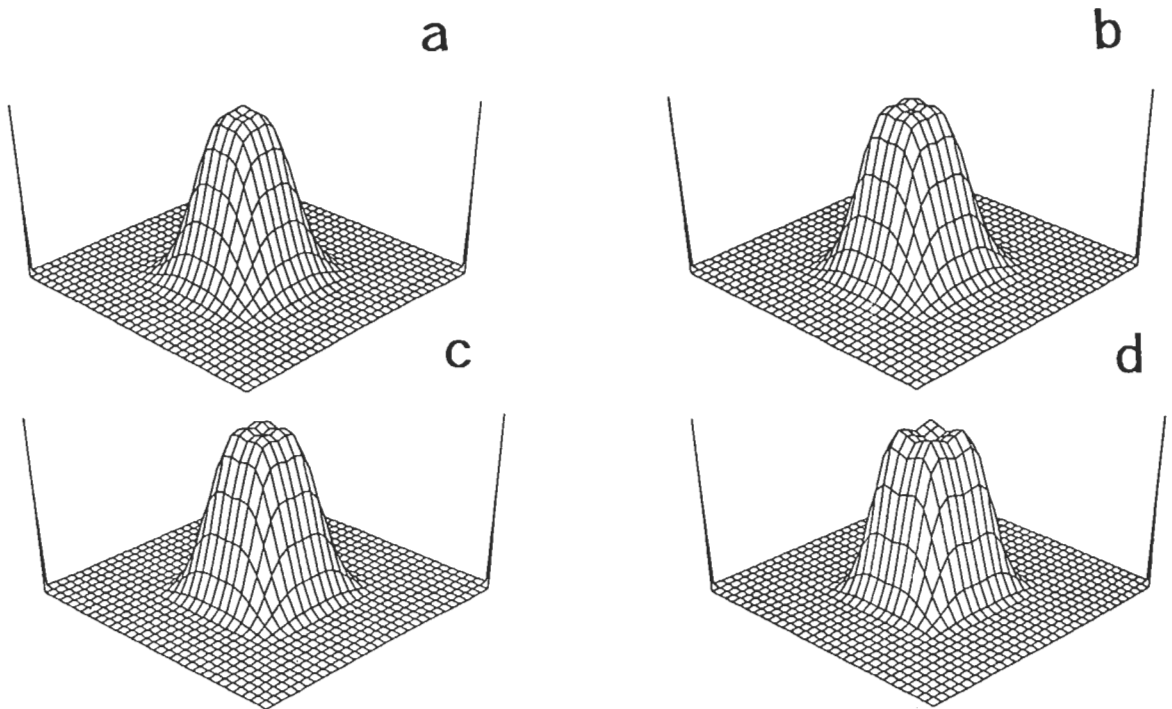


圖11 數值格式於純變形流場在3循環測試結果，(a)Bos4or格式，(b)Bos6or格式，(c)Bos4格式及(d)Bos6格式。

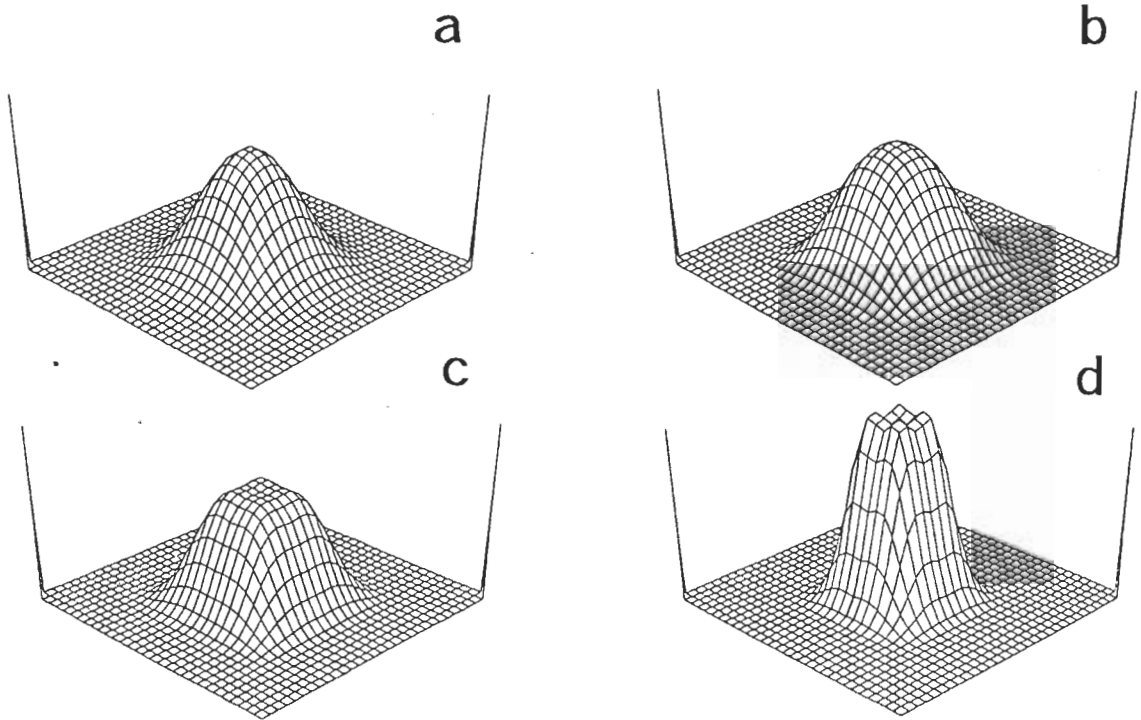


圖 12 數值格式於純變形流場在 10 循環測試結果，(a)Bos6or 格式，(b)Bos4 格式，(c)Bos6 格式及 (d)NICE 格式。

#### 四、總 結

本文系統性地比較正定 Bott 格式及  $NIC_E$  格式，並且推展更高階的 Bott 格式，探討其表現的優越程度。數值測試包含均勻流場、旋轉流場、強變形流場及循環性純變形流場等不同性質的二維平流測試，針對數值格式的质量保守、數值擴散、極大值的衰減及穩定度進行了解。

測試結果發現，加了面積保有條件的 Bott 格式，其表現確實比原版 Bott 格式改善很多；在均勻流場與旋轉流場測試中，其六階 Bott 格式的表現是最優異的，而且其優越程度可領先其它格式達 20% 以上，但是在變形流場中，和原版 Bott 格式一樣，依然是輕微不穩定的。另外，所有格式的表現雖隨庫朗數變大（物理平移距離相同）而變好，但並不顯著。 $NIC_E$  格式在變形流場測試及純變形流場測試中，表現比四階 Bott 格式稍好，但因要計算一三對角矩陣而無法以向量方式處理，所以計算速度較有向量的四階 Bott 格式略慢（張良輝，1994）。由於本程式並未最佳化與向量化，本文僅略為估計格式計算花費等級，發現六階 Bott 格式約與  $NIC_E$  格式約相當，因此計算速度應非主要考量因子。

本文所有二維平流測試結果均指出 Bott 格式及  $NIC_E$  格式嚴格保守正定總質量，這是由於這些格式都是用通量形式處理的。事實上，透過分時積分處理，平流格式的重要特質如穩定度與質量保守並不會因多維度積分而改變。唯一要考量的是不能使用大的庫朗數，這樣可以使分時單維度平流與同時多維度平流的差異降低。對尤拉平流格式而言，其須受庫朗數不得大於 1 之限制，因此分時積分之可能不利影響應可忽略。若是平流流場之變動緩和如旋轉流場，分時積

分並不會影響準確度。目前尤拉通量形式的平流格式尚未有理想的同時多維度積分演算式，因此實際上大多使用分時積分處理，其質量保守是在單一維度下各自滿足的。對二維無輻散流場而言，在x-維度上的質量是可以累積或減少的，而在y-維度上得到平衡即可。因此強迫質量必須於各維度嚴格保守並不十分吻合物理過程的。我們所以進行多種流場測試，意在確實了解此種數值方法是否合理。對無輻散流場而言，所測試的平流格式表現良好，不論分時積分或質量保守限制，對格式的準確度影響均甚微，這應歸於這類格式使用的庫朗數均小於1。若流場因故具有輻散性（或由誤差產生），例如有輻合情況，則吾人須謹慎使用，因通量形式格式保證平流後受積分的總質量仍保守。為使質量保守，於輻合區流體體積須變小，相對質量如濃度、濕度因此會產生異常高值。若平流流場本為輻散流體，則採用通量形式之格式必須另加入輻散項，物理上等同於平流式，因此不比平流格式好，反而增加計算時間。

本文討論的平流格式主要是尤拉通量形式的格式，此種格式有保守質量的優點，但是會受到庫朗數的限制；另外有一種平流形式的格式，為半拉格朗日格式，這種格式的穩定度較不受庫朗數的限制，亦不必受到分時積分的限制，但是通常不絕對保守總質量，亦不具正定性質。我們目前正在發展與測試正定質量保守的半拉格朗日格式，未來將與尤拉格式作深入的比較。

## 誌 謝

感謝張長輝博士提供部份程式使本研究得以進行順利。本研究在國科會專案計畫支助下完成，計畫編號為NSC 84-2111-M-008-044 AP1。

## 附錄 A：六階面積保有通量形式版的Bott格式之推導

由Bott(1989b)，利用(27)式即可建立一條符合面積保有條件的多項式曲線。在網格間距為定值（設為1）的情況下，(27)式可變成

$$\begin{aligned}
 \varphi_{j,i} = & a_0 + \frac{a_1}{2} \left[ i + \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} \right] + \frac{a_2}{3} \left[ \left( i + \frac{1}{2} \right)^2 + \left( i + \frac{1}{2} \right) \left( i - \frac{1}{2} \right) \right. \\
 & \left. + \left( i - \frac{1}{2} \right)^2 \right] + \frac{a_3}{4} \left[ \left( i + \frac{1}{2} \right)^3 + \left( i + \frac{1}{2} \right)^2 \left( i - \frac{1}{2} \right) + \left( i + \frac{1}{2} \right) \left( i - \frac{1}{2} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \left( i - \frac{1}{2} \right)^3 \right] + \frac{a_4}{5} \left[ \left( i + \frac{1}{2} \right)^4 + \left( i + \frac{1}{2} \right)^3 \left( i - \frac{1}{2} \right) + \left( i + \frac{1}{2} \right)^2 \left( i - \frac{1}{2} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \left( i + \frac{1}{2} \right) \left( i - \frac{1}{2} \right)^3 + \left( i - \frac{1}{2} \right)^4 \right] + \frac{a_5}{6} \left[ \left( i + \frac{1}{2} \right)^5 + \left( i + \frac{1}{2} \right)^4 \left( i - \frac{1}{2} \right) \right. \\
 & \left. + \left( i + \frac{1}{2} \right)^3 \left( i - \frac{1}{2} \right)^2 + \left( i + \frac{1}{2} \right)^2 \left( i - \frac{1}{2} \right)^3 + \left( i + \frac{1}{2} \right) \left( i - \frac{1}{2} \right)^4 \right. \\
 & \left. + \left( i - \frac{1}{2} \right)^5 \right] + \frac{a_6}{7} \left[ \left( i + \frac{1}{2} \right)^6 + \left( i + \frac{1}{2} \right)^5 \left( i - \frac{1}{2} \right) + \left( i + \frac{1}{2} \right)^4 \left( i - \frac{1}{2} \right)^2 \right. \\
 & \left. + \left( i + \frac{1}{2} \right)^3 \left( i - \frac{1}{2} \right)^3 + \left( i + \frac{1}{2} \right)^2 \left( i - \frac{1}{2} \right)^4 + \left( i + \frac{1}{2} \right) \left( i - \frac{1}{2} \right)^5 \right. \\
 & \left. + \left( i - \frac{1}{2} \right)^6 \right] + \dots
 \end{aligned}$$

其中  $i = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

$$\varphi_j = a_0 + \frac{1}{12}a_2 + \frac{1}{80}a_4 + \frac{1}{448}a_6, \quad i = 0$$

$$\varphi_{j+1} = a_0 + a_1 + \frac{13}{12}a_2 + \frac{5}{4}a_3 + \frac{121}{80}a_4 + \frac{91}{48}a_5 + \frac{1093}{448}a_6, \quad i = 1$$

$$\varphi_{j-1} = a_0 - a_1 + \frac{13}{12}a_2 - \frac{5}{4}a_3 + \frac{121}{80}a_4 - \frac{91}{48}a_5 + \frac{1093}{448}a_6, \quad i = -1$$

$$\varphi_{j+2} = a_0 + 2a_1 + \frac{49}{12}a_2 + \frac{17}{2}a_3 + \frac{1441}{80}a_4 + \frac{931}{24}a_5 + \frac{37969}{448}a_6, \quad i = 2$$

$$\varphi_{j-2} = a_0 - 2a_1 + \frac{49}{12}a_2 - \frac{17}{2}a_3 + \frac{1441}{80}a_4 - \frac{931}{24}a_5 + \frac{37969}{448}a_6, \quad i = -2$$

$$\varphi_{j+3} = a_0 + 3a_1 + \frac{109}{12}a_2 + \frac{111}{4}a_3 + \frac{6841}{80}a_4 + \frac{4251}{16}a_5 + \frac{372709}{448}a_6, \quad i = 3$$

$$\varphi_{j-3} = a_0 - 3a_1 + \frac{109}{12}a_2 - \frac{111}{4}a_3 + \frac{6841}{80}a_4 - \frac{4251}{16}a_5 + \frac{372709}{448}a_6, \quad i = -3$$

由以上七個方程式，可解七個未知數  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ 。

## 參考文獻

- 柳再明，1993：正定義數值方法的探討。國立台灣大學大氣科學研究所博士論文，300頁。
- 柳再明與郭鴻基，1994：Smolarkiewicz正定義數值方法中的交錯項。大氣科學，22，277-296。
- 張良輝，1994：雙向式巢狀網格程序之發展及其在空氣品質模擬應用之研究。國立台灣大學環境工程研究所博士論文。
- Bott, A., 1989a：A positive definite advection scheme obtained by nonlinear renormalization of the advection flux. *Mon. Wea. Rev.*, **117**, 1006-1015.
- Bott, A., 1989b：Reply. *Mon. Wea. Rev.*, **117**, 2633-2636.
- Bott, A., 1992：Monotone flux limitation in the area-preserving flux-form advection algorithm. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2592-2602.
- Chlond, A., 1994：Locally modified version of Bott's advection scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **122**, 111-125.
- Crowley, W. P., 1968：Numerical advection experiments. *Mon. Wea. Rev.*, **96**, 1-11.
- Emde, V. D., 1992：Solving conservation laws with parabolic and cubic splines. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 482-492.
- Huang, C. Y., and S. Raman, 1991：A comparative study of numerical advection schemes featuring a one-step WKL algorithm. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2900-2918.
- Huang, C. Y., 1994：Semi-Lagrangian advection schemes and Eulerian WKL algorithm. *Mon. Wea. Rev.*, **122**, 1647-1658.
- Petschek, A. G., and L. D. Libersky, 1975：Stability, accuracy, and improvement of Crowley advection schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **103**, 1104-1109.
- Pudykiewicz, J., and A. Staniforth, 1984：Some properties and comparative performance of semi-Lagrangian method of Robert in the solution of the advection-diffusion equation. *Atmos. Ocean*, **22**, 283-308.

- Purnell, D. K., 1976 : Solution of the advection equation by upstream interpolation with a cubic spline. *Mon. Wea. Rev.*, **104**, 42-48.
- Rood, R. B., 1987 : Numerical advection algorithms and their role in atmospheric transport and chemistry models. *Rev. Geophys.*, **25**, 71-100.
- Seibert, P., and B. Morariu, 1991 : Improvements of upstream, semi-Lagrangian numerical advection schemes. *J. Appl. Meteor.*, **30**, 117-125.
- Smolarkiewicz, P. K., 1982 : The multi-dimensional Crowley advection scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **110**, 1968-1983.
- Smolarkiewicz, P. K., 1983 : A simple positive definite advection scheme with small implicit diffusion. *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 479-486.
- Smolarkiewicz, P. K., 1984 : A full multidimensional positive definite advection algorithm with small implicit diffusion. *J. Comput. Phys.*, **54**, 325-362.
- Smolarkiewicz, P. K., and T. L. Clark, 1986 : A full multidimensional positive definite advection algorithm: Further development and applications. *J. Comput. Phys.*, **67**, 396-438.
- Staniforth, A., and J. Pudykiewicz, 1985 : Reply to comments on an addenda to "Some properties and comparative performance of the semi-Lagrangian method of Robert in the solution of the advection-diffusion equation" , *Atmosphere: Atmos. -Ocean*, **23**, 195-200.
- Staniforth, A., J. Côté and J. Pudykiewicz, 1987 : Comments on "Smolarkiewicz's deformational flow" , *Mon. Wea. Rev.*, **115**, 894-900.
- Temperton, C., and A. Staniforth, 1987 : An efficient two-time-level semi-Lagrangian semi-implicit integration scheme. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **113**, 1025-1039.
- Tremback, C. J., J. Powell, W. R. Cotton, and R. A. Pielke, 1987 : The forward-in-time upstream advection scheme: Extension to higher orders. *Mon. Wea. Rev.*, **115**, 540-555.

## A Study of High-Order Eulerian Positive-Definite Advection Schemes

Ching-Yuang Huang    Jian-Cheng Liao

Department of Atmospheric Sciences  
National Central University

### ABSTRACT

Special numerical methods for positive-definite physical advection are investigated in this study. Two advection schemes in flux form, Bott's scheme using Lagrangian polynomial interpolation (Bott, 1989a,b) and  $NIC_E$  scheme using cubic spline interpolation (Emde, 1992) are compared, both theoretically maintaining positiveness of scalars and strict mass conservation. This study includes numerical tests of uniform flow, rotational flow, strong deformational flow and cycling pure deformational flow. For smooth flow (uniform flow and rotational flow), the sixth-order area-preserving Bott's scheme performs best among the schemes, retaining 82 % of shortwave amplitude. For longwaves, fourth-order Bott's schemes are slightly better than  $NIC_E$ , but they are equally well for shortwaves. However, all Bott's schemes are slightly unstable in the strong deformational flow test and the  $NIC_E$  scheme is stable. For cycling pure deformational flow, the  $NIC_E$  schemes is more tolerable for numerical dissipation after more cycles. The high-order Eulerian positive-definite advection schemes in flux form do preserve total mass in all the flow tests in this study, and their overall performances are remarkably good.

Key words :Positive definiteness, Bott schemes.