數值預報發展簡史及其重要關鍵—「過濾作用」(續完)

喬鳳倫

An introduction to the development of Dynamic Prediction and its central problem—"Filtering" (Continued)

㈢重力波

重力波為垂直橫波，為除去縱波之影響，可假定空氣係均勻且不可壓縮之流體（其原因容後再述）；為除去水平橫波之影響，可假定波動僅限於（x、z）平面內；並為使問題更簡單化，我們認為地球無自轉及大氣在靜力平衡狀態下。上述諸假定，均不影響重力波之性質。為清晰計，列諸假定之公式於下。

(a) $v=0$

(b) $\Omega=0$，$f=0$

(c) $\rho=\rho_0=$常數

(d) $\frac{\partial}{\partial y}(\quad)=0$

(e) $\frac{\partial P}{\partial Z}=-\rho g$

於是（1)式可寫成
$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}=0$$

(3)式可寫成
$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

(5)式可寫成
$$\frac{\partial P}{\partial z}=-\rho g$$

現於平衡狀態之大氣中，介入一擾動。若平衡狀態下之 $u=u_0=$常數，$w=0$，$P=P_0=$常數及大氣之厚度為 H；經擾動後，$u=u_0+u'$，$w=w'$，$P=P_0+P'$ 及大氣之厚度為（H+h），且h為x及時間t之函數，即 $h=h(x、t)$。將經擾動後之各值代入上列三式，則得

$$\frac{\partial}{\partial t}(u_0+u')+(u_0+u')\frac{\partial}{\partial x}(u_0+u')+w'\frac{\partial}{\partial z}(u_0+u')+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}(P_0+P')=0$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(P_0+P')+\rho_0 g=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(u_0+u')+\frac{\partial}{\partial z}(w')=0$$

經直線化後得

$$\frac{\partial u'}{\partial t}+u_0\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P'}{\partial x}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial z}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial w'}{\partial z}=0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

由(10)式自地面至大氣頂端H+h積分（見圖二）得

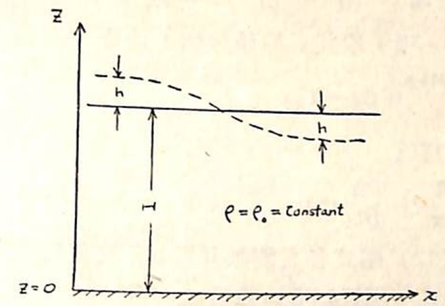

圖 2：在原始未經擾動之均勻大氣，其頂端高度為H，經擾動後而有h之變化。

$$\int_0^{H+h}\frac{\partial u'}{\partial t}dz+\int_0^{H+h}u_0\frac{\partial u'}{\partial x}dz+\int_0^{H+h}\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P'}{\partial x}dz=0$$

取積分之近似值上式可寫成

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{H+h}u'dz+u_0\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{H+h}u'dz+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{H+h}P'dz=0$$

令$\int_0^{H+h} u'dz=\bar{u}'$，則上式可寫成

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}'+u_0\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{H+h}P'dz=0$$

由圖可知 ρ'是由 h高度之空氣柱所引起之壓力，並且ρ爲常數，故 $P'=\rho_0 gh$，故上式中之最後一項可演算如下

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{H+h}P'dz=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{H+h}\rho_0 ghdz$$

$$=\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}[\rho_0 gh(H+h)]$$

$$=gH\frac{\partial h}{\partial x}+2gh\frac{\partial h}{\partial x}$$

式中$gh\frac{\partial h}{\partial x}$一項與$GH\frac{\partial h}{\partial x}$比較，爲值甚小，故可忽略不計。於是(10)式可寫成

$$\frac{\partial \bar u'}{\partial t}+u_0\frac{\partial \bar u'}{\partial x}+gH\frac{\partial h}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots(10)'$$

由⑿式自大氣底層至頂層之積分

$$\int_0^{H+h}\frac{\partial u'}{\partial x}dz+\int_0^{H+h}\frac{\partial w'}{\partial z}dz=0$$

此式中之第二項顯見爲大氣經擾動後，其頂部與底部所有垂直運動之速度差。由邊界條件，知地球表面之大氣無垂直運動，故 $w_0=0$，而大氣頂端之垂直運動爲

$$w_{H+h}=\frac{dh}{dt}=\frac{\partial h}{\partial t}+u_0\frac{\partial h}{\partial x}$$

式中之第一項，取其近似積分值，並令

$$\int_0^{H+h}u'dz=\bar u',$$

故上式可寫成

$$\frac{\partial \bar u'}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial t}+u_0\frac{\partial h}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots(12)'$$

(10)' 及(12)' 兩式各含變數 $\bar u'$及h，故它們爲完整的聯立方程式。現使⑽'對x微分，則得

$$\frac{\partial^2 \bar u'}{\partial x\partial t}+u_0\frac{\partial^2\bar u'}{\partial x^2}+gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=0 \quad \cdots\cdots(10)''$$

使(12)'對時間t微分，則得

$$\frac{\partial^2\bar u'}{\partial x\partial t}+\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}+u_0\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial t}=0 \quad \cdots\cdots(12)''$$

使(12)'對x微分，則得

$$\frac{\partial^2\bar u'}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial t}+u_0\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=0 \quad \cdots\cdots(12)'''$$

由(10)''減去(12)''並代入(12)'''則得

$$-u_0\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial t}+u_0\frac{\partial h}{\partial x}\right)+gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}$$

$$-u_0\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial t}=0$$

化簡後而爲

$$\frac{\partial^2 h}{\partial t^2}+2u_0\frac{\partial^2 h}{\partial x\partial t}+(u_0^2-gH)\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}=0 \quad \cdots\cdots(13)$$

⒀式與⑻式相似，故亦爲波動方程式，其解將有下列之形式 $h=h_0e^{ik(x-ct)}$

式中h_0爲振幅，k爲波數，c爲波速。從此式求出h對x及t之微分，代入(12)式則得

$$(-ikc)^2+2u_0(-ik)(ik)+(u_0^2-gH)(ik)^2=0$$

化簡而爲

$$C^2-2u_0c+(u_0^2-GH)=0$$

$$C=u_0\pm\sqrt{gH} \quad \cdots\cdots(14)$$

由此可知流體動力方程式之另一解是受重力波的影響。(14)式即爲重力波之速度公式，由此式可知重力波速與波長無關且向不同方向進行。

重力波有外重力波及內重力波之分。上式之演算，係屬外重力波，如以大氣爲海洋，則此波動即爲洋面之重力波。如以大氣頂層之高度 H爲 10公里，g爲9.8公尺每秒每秒，則$\sqrt{gH}$約爲625哩每時，此即想像中均勻等密度大氣頂層之重力波速度。至於內重力波，其算式之演化，與上述之情形相類似，不加詳述。

㈣氣象波

氣象波爲水平橫波，爲除去垂直橫波及縱波之影響，我們可作下列之假定。

(a) 大氣爲不可壓縮而且均勻者，$\rho=\rho_0=$ 常數，$\frac{d\rho}{dt}=0$

(b) 無垂直運動。並爲簡單計，可認爲水平速度不隨Y而變化，即$w=0.\ \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

於是(1)至(4)式可寫成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}-fv=0 \quad \cdots\cdots(15)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}+fu=0 \quad \cdots\cdots(16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots(17)$$

將(15)式對y微分得

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}-v\beta=0 \quad \cdots\cdots(18)$$

將(16)式對x微分並利用(7)式得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial^2 P}{\partial x\partial y}=0 \quad \cdots\cdots(19)$$

聯合(18)(19)兩式得

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\beta v=0 \quad \cdots\cdots(20)$$

同理以擾動法解此方程，使$u=u_0+u'$，$v=v'$。u_0爲平衡狀態下x方向之速度且爲常數，u 爲經擾動後x方向之速度，v爲經擾動後y方向之速度，在擾動前 y方向之速度爲零。將擾動後之速度代入(20)則得

$$\frac{\partial^2 v'}{\partial x\partial t}+(u_0+u')\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+\beta v'=0$$

經直線化爲成爲

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial t}+u_0\frac{\partial^2 v'}{\partial x^2}+\beta v'=0 \quad \cdots\cdots(21)$$

此方程之一般解爲

$$v'=Ve^{ik(x-ct)}$$

將v'對x及t微分後之値代入(21)則得

$$(-ikc)(ik)+u_0(ik)^2+\beta=0$$

$$k^2c-u_0k^2+\beta=0$$

$$C=u_0-\frac{\beta L^2}{4\pi^2} \quad \cdots\cdots(22)$$

此式即著名之 Rossby 長波公式，它示出大氣中水平橫波之速度。此一流體動力方程式之解，雖曾出現於 Laplace 的海潮原理 (Theory of Tides) 中，但 C.G. Rossby首先發現它對氣象的重要性，並導出此純波動公式，故定名爲 Rossby 長波公式。

氣象波顯與聲波及重力波不同。Rossby 波祗向一方向移動，對介質而言，永遠相對地向西移動，移速緩慢且與波長成正比。若波長爲3000哩時，與介質之相對速度約爲10哩每時。

㈤混合波

在上述諸節中，已知聲波、重力波及氣象波三種純波動之性質。聲波及重力波在數值預報中所引起之困難，已在第三節中提及。在目前最新式電腦中，當可解出原始之流體動力方程式，但因氣象預測範圍極爲廣濶，爲顧及時效及節省經費起見，不得不捨棄原始方程式而採用修正之方程式，在此修正之方程式中，僅含氣象波之效應。

在原始方程式中，如何將聲波及重力波之效應除去，即所謂"過濾"之問題。

聲波效應之除去，較爲簡單。在導出聲波公式之演算中，(6)、(7) 兩式爲其主要算式，而 (7) 爲絕熱情況下之熱能方程式，故造成聲波之主要機械作用，是空氣受絕熱壓縮所造成之壓力變化。再觀察原始方程式(1)至(5)式中，除 (4) 式表示壓力之變化外，尙有 (5) 式 (流體靜力方程) 亦示出大氣之壓力變化。故我們若假定大氣中壓力之變化全由流體靜力作用所引起，換言之，即在諸公式之演算中，採用 (5) 式而捨棄 (4) 式，則聲波之效應不復存在。由此之故，我們可見在數值預報之演算中，絕熱方程雖然爲原始方程式中之主要一環，但其功效，僅限於預測位溫或溫度及密度之變化。

重力波之除去，不若聲波之簡單，爲使讀者明瞭重力波效應如何濾去，可先研究氣象波及重力波兩者混合波之性質。爲此目的，我們可先假定大氣不可壓縮而均勻，即$\frac{d\rho}{dt}=0$，$\rho=$常數；並且大氣在流體靜力平衡狀態下 (無聲波之效應)，其頂端可自由流動而其底部爲水平之固體地表；再假定水平速度不隨 y方向而變化 $\left(\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}=0\right)$。上述假定均不影響重力波及氣象波之性質。於是(1)至(5)式可寫成下列形式

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z}-fv$$

$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=0 \quad \cdots\cdots(23)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+w\frac{\partial v}{\partial z}+fu$$

$$+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}=0 \quad \cdots\cdots(24)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \cdots\cdots(25)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}+\rho_0 g=0 \quad \cdots\cdots(26)$$

原始方程中之(4)式即絕熱方程式，雖可寫成

$$\frac{\partial P}{\partial t}+u\frac{\partial P}{\partial x}v\frac{\partial p}{\partial y}+w\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$+rP\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

但由(25)式知無幅散現象，於是上式可寫成

$$\frac{dP}{dt}=\frac{\partial P}{\partial t}+u\frac{\partial P}{\partial x}+v\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$+w\frac{\partial P}{\partial z}=0 \quad \cdots\cdots(27)$$

上式因僅含變數 P，若與(23)、(24)及(25)式聯立求解時，已不可能求出聲波之速度公式。故由(3)至(5)式及(4) 至 (27)式之演變，知若假定大氣爲不可壓縮及具有均勻性時，已無聲波之效應存在。

今再用擾動法求解(23)至(26)式，並假定在原始平衡狀態下 $u_0=0$，$v_0=0$，$w_0=0$，$P_0=\rho_0 g$。經擾動後

$$u=u_0+u'=u'$$

$$v=v_0+v'=v'$$

$$w=w_0+w'=w'$$

$P = P_0 + P'$

將經擾動後之各値代入 (23) 至 (26) 式，經直線化後而得

$$\frac{\partial u'}{\partial t} - fv' + \frac{1}{\rho_0}\ \frac{\partial P'}{\partial x} = 0 \cdots\cdots(28)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + fu' + \frac{1}{\rho_0}\ \frac{\partial P'}{\partial y} = 0 \cdots\cdots(29)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \cdots\cdots(30)$$

$$\frac{\partial P'}{\partial z} = 0 \cdots\cdots(31)$$

將(28)至(31)各式自高度至H+h積分(見圖2)，並令

$$\overline{(\quad)} = \int_0^{H+h} (\quad) dz$$

則得

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} - f\bar{v}' + \frac{1}{\rho_0}\int_0^{H+h} \frac{\partial P'}{\partial x} dz = 0 \cdots\cdots(32)$$

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + f\bar{u}' + \frac{1}{\rho_0}\int_0^{H+h} \frac{\partial P'}{\partial y} dz = 0 \cdots\cdots(33)$$

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \int_0^{H+h} \frac{\partial w'}{\partial z} dz = 0 \cdots\cdots(34)$$

(32)至(34)式中各有一積分，但因$P' = \rho_0 gh$，故

$$\int_0^{H+h} \frac{\partial P'}{\partial x} dz = \int_0^{H+h} \rho_0 g \frac{\partial h}{\partial x} dz$$

$$= \rho_0 g \frac{\partial h}{\partial x}(H+h) \approx \rho_0 g H \frac{\partial h}{\partial x}$$

同理 $\int_0^{H+h} \frac{\partial P'}{\partial y} dz \approx \rho_0 g \frac{\partial h}{\partial y} H$

而 $\int_0^{H+h} \frac{\partial w'}{\partial z} dz = w'(H+h) - w'(0)$

式中$w'(H+h)$爲在H+h高度上之垂直運動，而$w'(0)$爲大氣底層之垂直運動速度 。大氣頂部自由面之垂直運動速度爲

$$w'(H+h) = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + u'\frac{\partial h}{\partial x} + v'\frac{\partial h}{\partial y}$$

但因$\frac{\partial h}{\partial x}$，$\frac{\partial h}{\partial y}$，$u'$及$v'$諸値均甚微小，故

$$w'(H+h) = \frac{dh}{dt} \approx \frac{\partial h}{\partial t}$$

大氣之底層是固體地表，故無垂直運動，所以

$$w'(0) = 0$$

於是

$$\int_0^{H+h} \frac{\partial w'}{\partial z} dz = \frac{dh}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t}$$

將上述各積分後之値代入(32)至(34)式，則得

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} - f\bar{v}' + gH\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \cdots\cdots(35)$$

$$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial t} + f\bar{u}' + gH\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \cdots\cdots(36)$$

$$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \cdots\cdots(37)$$

將(35)式對 y 微分，並代入 $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$，得

$$\frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial y \partial t} - f\frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} - \beta\bar{v}' + gH\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0$$

因 $\frac{\partial \bar{u}'}{\partial y} = \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} = 0$，

上式可寫成

$$\bar{v}'\beta = gH\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \cdots\cdots(38)$$

將(36)式對 x 微分，得

$$\frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial x \partial t} + f\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + gH\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0 \cdots\cdots(39)$$

聯合(38)、(39)兩式，消去$gH\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$，得

$$\frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial x \partial t} + f\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \beta\bar{v}' = 0 \cdots\cdots(40)$$

將(37)代入(40)，得

$$\frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial x \partial t} - f\frac{\partial h}{\partial t} + \beta\bar{v}' = 0$$

將上式對 x 微分則得

$$\frac{\partial^3 \bar{v}'}{\partial x \partial t \partial x} - f\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t} + \beta\frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} = 0 \cdots\cdots(41)$$

(35)式將 x 微分

$$\frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial x \partial t} - f\frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} + gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \cdots\cdots(42)$$

(37)式對 t 微分

$$\frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = 0 \cdots\cdots(43)$$

聯合(42)、(43)兩式得

$$-\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - f\frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} + gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \cdots\cdots(44)$$

將(44)式再對x及t微分，則得

$$-\frac{\partial^4 h}{\partial x \partial t^3} - f\frac{\partial^3 \bar{v}'}{\partial t \partial x^2} + gH\frac{\partial^4 h}{\partial t \partial x^3} \cdots\cdots(45)$$

將(44)及(45)兩式，代入(41)式，則得

$$\frac{1}{f}\left[gH\frac{\partial^4 h}{\partial x^3 \partial t} - \frac{\partial^4 h}{\partial x \partial t^3}\right] - f\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}$$

$$+ \frac{\beta}{f}\left[-\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\right] = 0$$

化簡而爲

$$\frac{\partial^4 h}{\partial t^3 \partial x} + \beta\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} - gH\frac{\partial^4 h}{\partial t^3 \partial t} + f^2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial t}$$

$$-\beta gH\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = 0 \cdots\cdots(46)$$

此波動方程式之一般解將爲

$$h = Ae^{ik(x-ct)}$$

式中各符號之意義同前。將此解對t及x之微分値代入(46)式，則得其頻率方程爲

$$C^3 + C^2\left(\frac{\beta}{k^2}\right) - C\left(gH + \frac{f^2}{k^2}\right)$$

$$-\frac{\beta}{k^2}gH = 0 \cdots\cdots(47)$$

化簡而得

$$(C^2 - gH)\ \left(C + \frac{\beta}{k^2}\right) = C\frac{f^2}{k^2} \cdots\cdots(48)$$

(48) 式決定混合波之速度及性質，其中當然含有 Rossby 波速及重力波速，今可求出其近似值如下。

因Rossby波速甚小，故$C_R^2 \ll gH$，C_R爲Rossby波速。故(48)式可寫成

$$(-gH)\left(C_R + \frac{\beta}{k^2}\right) = C_R\frac{f^2}{k^2}$$

$$C_R = \frac{-\left(gH\frac{\beta}{k^2}\right)}{gH + \frac{f^2}{k^2}} = -\frac{\frac{\beta}{k^2}}{H\frac{f^2}{k^2 gH}}$$

$$= -\frac{\beta}{k^2 + \frac{f^2}{gH}} \approx \frac{\beta}{k^2} \cdots\cdots(48a)$$

β/k^2 即爲單純之 Rossby 波速。

同理，可求出重力波速之近似値，因重力波速C_g 甚大，則

$$C_g \gg \frac{\beta}{k^2}$$

於是(48)式可寫成

$$(C_g^2 - gH) = \frac{f^2}{k^2}$$

$$C_g \approx \pm\sqrt{gH + \frac{f^2}{k^2}} \approx \pm\sqrt{gH} \cdots\cdots(48b)$$

而$\sqrt{gH}$即爲純重力波之速度。

㈥準地轉近似法及重力波之過濾作用：

由上節所述，知除去聲波效應後之流體動力方程式，尙含有重力波及 Rossby 波之速度之解，其近似値各爲(48a) 及 (48b) 所表示。爲欲除去混合波中重力波之效應，換言之亦即消除(43)式中之一解

$$C_g \approx \pm\sqrt{gH + \frac{f^2}{k^2}}$$

而僅剩C_R之値，Charney 於 1948年發現了「準地轉近似法」以解決此一問題

所謂準地轉近似法 (Quasi Geostrophic Approximation) 可分爲下列三個步驟：

(a) 建立垂直部份 (Vertical component) 之旋率方程式。

(b) 聯合旋率方程式及連續方程式除去其中之輻散項。

(c) 以地轉式計算風速及旋率。

現在再硏究此「準地轉近似法」之結果，以證明其作用。在混合波之演算中，最後三個基本方程爲(35)、(36)及(37)式。(35)及(36)兩式爲運動方程式，(37)式爲連續方程式。若旋率以算式表示之。

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

爲實行「準地轉近似法」之第一步驟——建立旋率方程式——將(35)式對 y 微分

$$\frac{\partial^2 \bar{u}'}{\partial t \partial y} - f\frac{\partial \bar{v}'}{\partial y} - \bar{v}'\beta + gH\frac{\partial_2 h}{\partial x \partial y} = 0 \cdots\cdots(49)$$

將(36)式對x微分而得

$$\frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial t \partial x} + f\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + gH\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = 0 \cdots\cdots(50)$$

由(50)中減去(49)則得旋率方程爲

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y}\right) + f\left(\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y}\right) + \bar{v}'\beta = 0$$

式中$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}'}{\partial y}$爲旋率，$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}'}{\partial y}$爲輻散，但由混合波之假定中知$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$，故旋率方程可寫成

$$\frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial x \partial t} + f\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x} + \bar{v}'\beta = 0 \cdots\cdots(51)$$

「準地轉近似法」之第二步是將連續方程式(37)中$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial x}$代入旋率方程中之輻散項$\frac{\partial u}{\partial x}$，是以得

$$\frac{\partial^2 \bar{v}'}{\partial x \partial t} - f\frac{\partial h}{\partial t} + \beta\bar{v}' = 0 \cdots\cdots(52)$$

「準地轉近似法」之第三步驟是以地轉風法計算(52)式中之$\bar{v}'$及$\frac{\partial \bar{v}'}{\partial x}$。由(35)式知$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial t}$爲加速度項，由地轉風之定義知當$\frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} = 0$時，$\bar{v}'$即爲地轉風，故地轉風

$$\bar{v}' = \frac{gH}{f}\ \frac{\partial h}{\partial x}$$

代入(52)式，則得

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\frac{gH}{f}\ \frac{\partial h}{\partial x}\right) - f\frac{\partial h}{\partial t}$$

$$+ \beta\left(\frac{gH}{f}\ \frac{\partial h}{\partial x}\right) = 0$$

化簡而得

$$\frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial t} - \frac{f^2}{gH}\ \frac{\partial h}{\partial t} + \beta\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \cdots\cdots(53)$$

(下接第27頁)