

緯向調和及其在氣象要素表示上之應用

劉 廣 英

Zonal Harmonics And its Application to Meteorological Elements Representation

Koung-Ying Liu

Abstract

A general description of zonal harmonics are presented in this introductory paper. The purpose of it is to review the characteristics of that polyonomial. After that, the annual mean temperature and the precipitation amount for each ten degrees of latitude are represented by the zonal harmonics. The results are good enough to show their characteristic features.

一、前 言

引用適當之數學函數，常可表示某一氣象要素在空間之分佈概況。即任一氣象要素之空間變化，可選用正確之數學模式 (Model) 示之。如果此模式之特性與該要素實際分佈情形關係密切，則吾人可經由數值方法，透過此模式研究較複雜之現象。此種數學模式表示法，不但歷史悠久，且頗為繁多 [1]。彼特生 (Petterssen) 就認為氣壓場可以用數學式或互不相干之假設面，互相配合而成 [2]。同時，當吾人討論或研究高空波動時，福氏分析為最常用之工具。其他如相關、指數 (Index)

$$y = x^l \left(1 - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)} x^{-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-4)}{8(2l-1)(2l-3)} x^{-4} - \dots \right) + (-1)^r \frac{(l-2r+1)(l-2r+2)\dots(l-1)l}{2^r \dots 2(2l-2r+1)\dots(2l-1)} x^{-2r} + \dots a_0 \dots \dots \dots (1)$$

(1)式中如選定

$$a_0 = \frac{(2l)!}{2^l (l!)^2} = \frac{(2l-1)(2l-3)\dots 1}{l!} \dots \dots \dots (2)$$

則 y 等於 l 階之級數，常以 P_l(x) 代表之，此級數即稱之為緯向調和，或拉氏多項式。

將(2)式代入(1)式可得 l=0,1,2,3 及 4 之緯向調和分別為

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 & P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2-1) \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}(5x^3-3x) \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) \end{aligned}$$

等，均為數學在氣象上使用之著者。本文之目的，在於介紹緯向調和 (Zonal harmonics)，或稱拉氏多項式 (Legendre polynomial)，及其在氣象要素表示 (Representation) 上之應用。

二、緯向調和

(一)基本方程式

拉氏方程 (Legendre function)

$$(1-x^2) y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0$$

為常微分方程之特例。式中 l 為一常數。此方程式之解可以級數 (Series) 示之，其一解為

(二)特性

在物理上式(1)之所以特別有涵義，是由於當 x=±1 之間時，該級數為有限值。同時，此級數具有以下特性：

1. 正交性 (Orthogonality)，即

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_{l'}(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{l,l'}$$

其中 δ_{l,l'} 為克隆克 (Kronecker) δ，其義為僅

Vs

16

19

17

2

18

24

34

7

6

2

3

0

0

正於

僅

不

時

始

，

之

大

，

定

$\ell = \ell'$ 時 $\delta_{\ell, \ell'} = 1$, 否則 $\delta_{\ell, \ell'}$ 均為零。此特性之重要性在於能使問題簡化。

2. 多項式間具有一定之循環關係 (Recurrence relation), 如

$$(\ell + 1) P_{\ell+1}(x) - (2\ell + 1) X P_{\ell}(x) + \ell P_{\ell-1}(x) = 0$$

或

$$P_{\ell+1}'(x) - X P_{\ell}'(x) = (\ell + 1) P_{\ell}(x)$$

表一：每十度緯度處之年平均溫度

| 緯度 (ϕ) | 北 半 球 | | | | | | | | | | 南 半 球 | | | | | | | | | |
|---------------------------|-------|-------|-------|------|-----|------|------|------|------|------|-------|------|------|------|-----|------|-------|-------|-------|--|
| | 90 | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | |
| 溫度 ($^{\circ}\text{C}$) | -22.7 | -18.3 | -10.7 | -1.1 | 6.9 | 13.8 | 20.0 | 25.2 | 26.7 | 26.2 | 25.2 | 22.8 | 16.6 | 11.8 | 5.7 | -3.3 | -13.6 | -27.0 | -33.1 | |

表二：每十度緯度處之年平均降水量

| 緯度 (ϕ) | 北 半 球 | | | | | | | | | | 南 半 球 | | | | | | | | | |
|---------------|-------|----|----|----|----|----|----|-----|-----|-----|-------|-----|----|-----|-----|----|----|----|----|--|
| | 90 | 80 | 70 | 60 | 50 | 40 | 30 | 20 | 10 | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | |
| 降水量 (cm) | 11 | 18 | 30 | 58 | 82 | 90 | 85 | 110 | 160 | 150 | 130 | 100 | 85 | 110 | 115 | 80 | 35 | 7 | 5 | |

設 $X = \cos\theta$, θ 為餘緯度, 即 $\theta = 90^{\circ} - \phi$, 則表一及表二中資料 (均以 Q 示之) 在空間之分佈, 均可由緯向調和表示之。即

$$Q'(\theta) = \sum_{i=1}^n A_i P_i(\cos\theta)$$

上式中如設 $\ell = 0$ 至 4, 則得

$$Q'(\theta) = A_0 P_0(\cos\theta) + A_1 P_1(\cos\theta) + A_2 P_2(\cos\theta) + A_3 P_3(\cos\theta) + A_4 P_4(\cos\theta) \dots \dots \dots (3)$$

至此僅留有一問題待解決, 即如何求出多項式之係數 A_{ℓ} ? 在數學上, 解決此問題之最佳方法, 是最小平方法 (Method of least squares)。即, 如果 Y 為某一隨其他特性量變化之應變數, Y' 為其估計值, 則在最佳估值時

$$S = \sum_{i=1}^n (Y_i - Y_i')^2$$

應為最小。在本文中

$$Y' \equiv Q'(\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^4 A_{\ell} P_{\ell}(\cos\theta)$$

故欲使 S 為最小, 須滿足下述條件

均表示不同階之 $P_{\ell}(x)$ 間, 或與其微分式間, 具有一定之關係, 此循環性之關係, 使數學模式本身為之簡化。

三、數式及所使用之資料

為便於討論此數學模式, 在氣象要素分析上的可用性, 以及探討模式所得結果之優劣, 本文中特引用全球每十度緯度之年平均溫度 (如表一), 及年平均降水量 (如表二), 分別以此模式示之。

$$\frac{\partial}{\partial A_{\ell}} \sum [Q - (A_0 P_0 + A_1 P_1 + A_2 P_2 + A_3 P_3 + A_4 P_4)]^2 = 0 \dots \dots \dots (4)$$

上式中 θ 及 $\cos\theta$ 均已省略, 以求簡化。

四、實例計算

根據簡化之杜立特 (Abbreviated doolittle) 法 [3], 式(4)可展開為

$$\begin{aligned} & (\sum P_0 P_0) A_0 + (\sum P_0 P_1) A_1 + (\sum P_0 P_2) A_2 + (\sum P_0 P_3) A_3 + (\sum P_0 P_4) A_4 = \sum P_0 Q \\ & (\sum P_1 P_0) A_0 + (\sum P_1 P_1) A_1 + (\sum P_1 P_2) A_2 + (\sum P_1 P_3) A_3 + (\sum P_1 P_4) A_4 = \sum P_1 Q \\ & (\sum P_2 P_0) A_0 + (\sum P_2 P_1) A_1 + (\sum P_2 P_2) A_2 + (\sum P_2 P_3) A_3 + (\sum P_2 P_4) A_4 = \sum P_2 Q \\ & (\sum P_3 P_0) A_0 + (\sum P_3 P_1) A_1 + (\sum P_3 P_2) A_2 + (\sum P_3 P_3) A_3 + (\sum P_3 P_4) A_4 = \sum P_3 Q \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + (\sum P_3 P_2) A_2 + (\sum P_3 P_3) A_3 + (\sum P_3 P_4) A_4 = \sum P_3 Q \\ & (\sum P_4 P_0) A_0 + (\sum P_4 P_1) A_1 + (\sum P_4 P_2) A_2 + (\sum P_4 P_3) A_3 + (\sum P_4 P_4) A_4 = \sum P_4 Q \dots (5) \end{aligned}$$

上式中, P_{ℓ} 在各緯度上的值, 可利用公式計算, 表三為本文選用者。

表三 $P_{\ell}(\cos\theta)$ 值

| θ | $P_0(\cos\theta)$ | $P_1(\cos\theta)$ | $P_2(\cos\theta)$ | $P_3(\cos\theta)$ | $P_4(\cos\theta)$ |
|----------|-------------------|--------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| 0 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 | 1.000 |
| 30 | 1.000 | 0.866 | 0.625 | 0.325 | 0.023 |
| 60 | 1.000 | 0.500 | -0.125 | -0.438 | -0.289 |
| 90 | 1.000 | 0.0 | -0.500 | 0.0 | 0.375 |
| | $P_0(\cos\theta)$ | $-P_1(\cos\theta)$ | $P_2(\cos\theta)$ | $-P_3(\cos\theta)$ | $P_4(\cos\theta)$ |

利用表三資料及聯立方程式(5)可得對溫度之係數 A_{ℓ} 及對降水之係數 B_{ℓ} 之值如右:

$$\begin{aligned} A_0 &= 37.18 & B_0 &= 189.15 \\ A_1 &= -48.72 & B_1 &= -166.05 \\ A_2 &= -2.90 & B_2 &= 20.88 \\ A_3 &= 18.26 & B_3 &= 39.63 \\ A_4 &= -31.88 & B_4 &= -75.85 \end{aligned}$$

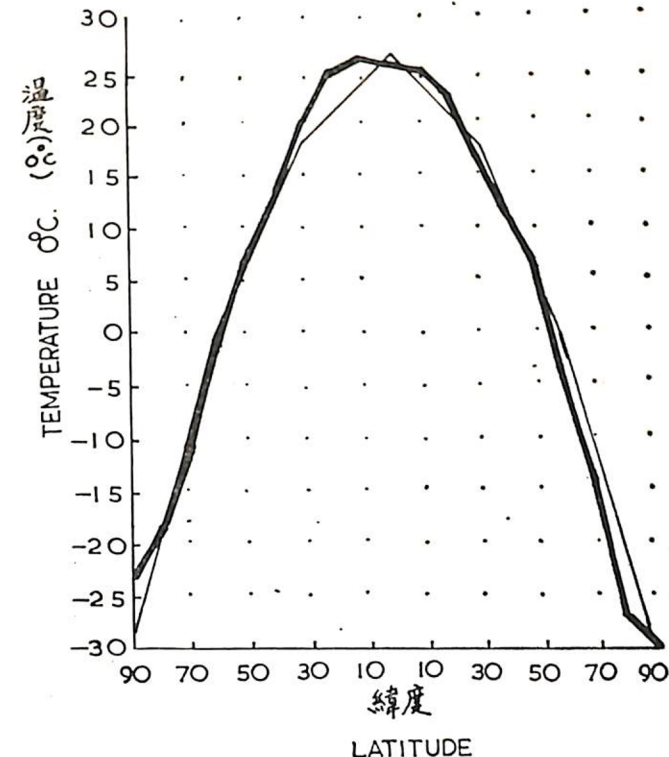


圖 1 全球緯向年平均溫度分佈圖
Global distribution of yearly mean temperature around each latitude circle.

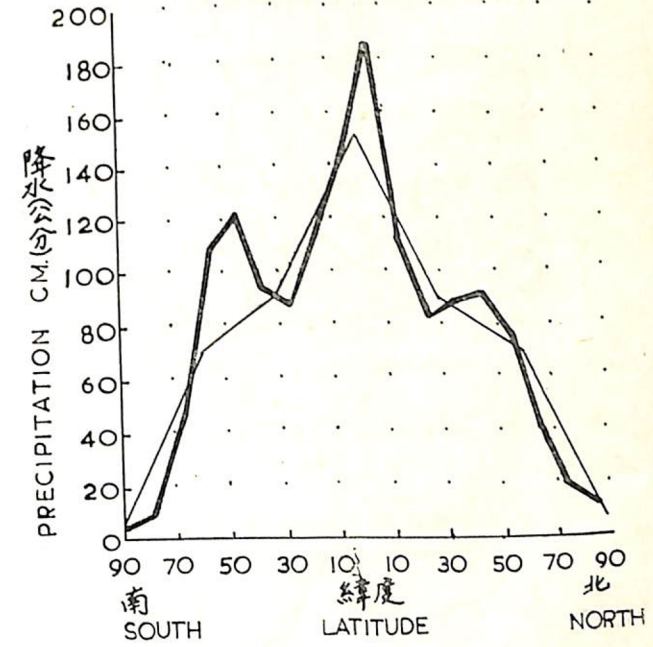


圖 2 全球緯向年平均降水量分佈圖
Global distribution of yearly mean precipitation around each latitude circle.

即年平均溫度及降水可分別以

$$T(\theta) = 37.18P_0 - 48.72P_1 - 2.90P_2 + 18.26P_3 - 31.88P_4$$

$$R(\theta) = 189.15P_0 - 166.05P_1 + 20.88P_2 + 39.63P_3 - 75.85P_4$$

表之。圖一及二即二者之曲線圖，圖中實線為實際值，而細線則為利用 $T(\theta)$ 及 $R(\theta)$ 二算式計算之結果。

五、結 論

緯向調和所得結果頗佳，計算之 $T(\theta)$ 及 $R(\theta)$ 與相關實際值之標準差 (Standard deviation)，前者為3.0，後者為 6.1，都相當小，顯示此數學模式，對於氣象要素之緯向變化，有甚佳之代表性。不過，此模式亦有其缺點，其中最大者，在於使用緯向調和時，吾人係以已確定之函數，代表大氣中的自然變化，相當於以預定之方式，處理未定事件，自有其問題存在，且所得結果，或有不易解釋之可能。

再就已處理之二問題看，年平均溫度計算結果，優於年平均降水量者。此或由於溫度與緯度之關係，較降水者大所致。圖中細線，即計算值，僅計算部份緯度上的值（看降水分佈圖時請特別注意此點），計算結果呈南北半球對稱形式，亦即所表示

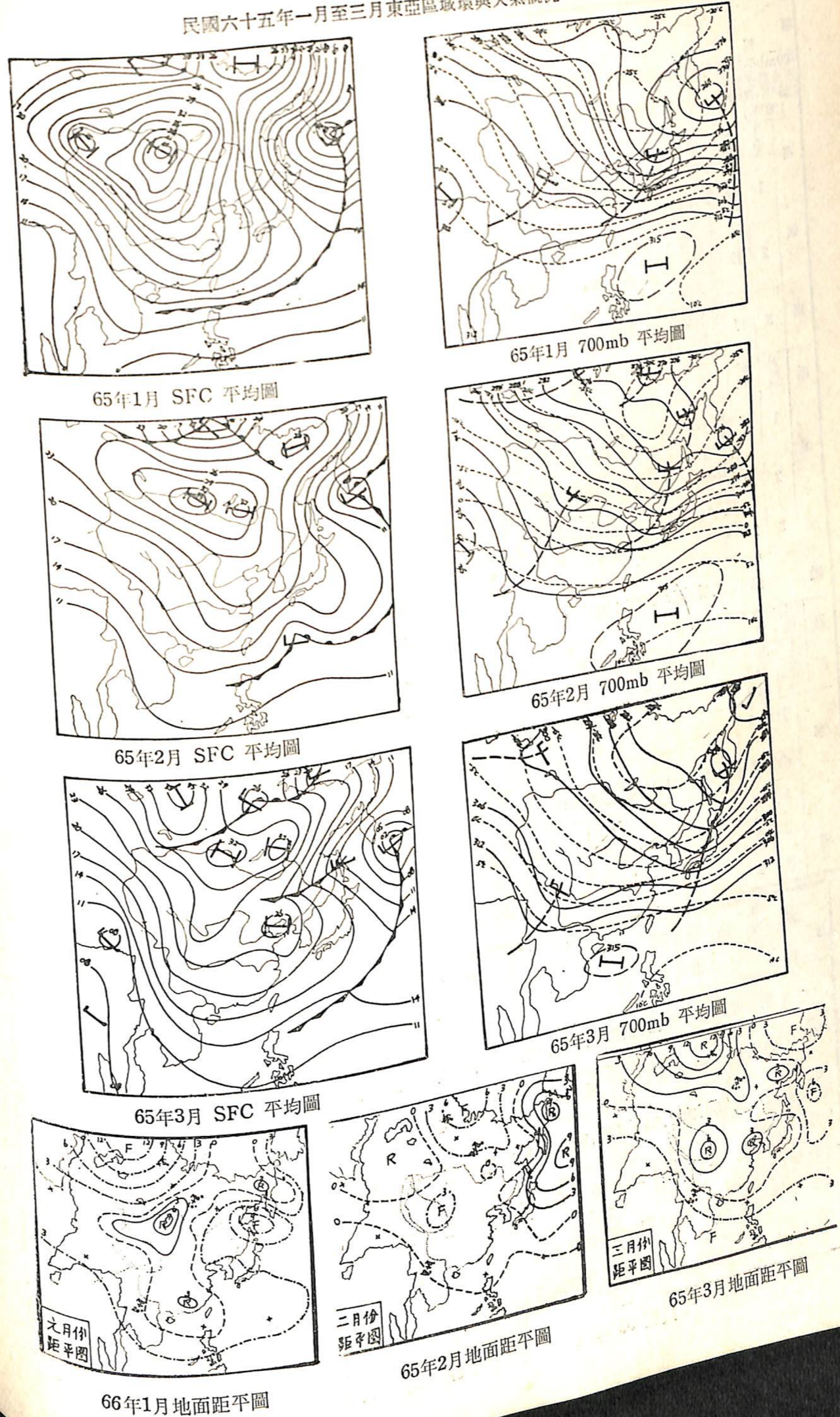
之值實為二對應緯度上觀測值之平均數（模式特性），此不但為溫度計算值兩極誤差偏大之因，亦為降水計算結果較差之因，因為由觀測值可見，降水在南北半球之對稱性本較低。

總之，緯向調和不失為表示氣象要素空間分佈之可用方法，它有顯示該要素分佈特徵之能力。雖近年來使用經驗正交函數 (Empirical orthogonal function)，即將問題留待大自然自己解決，較使用緯向調和，以預定方式處理未定事件為佳，但正如文中二實例所示，此方法本身還是正確的，有其實用性。

本文承張儀峰學弟一再催促，劉漢平同學協助計算，方得順利完成，謹此致謝。

參 考 資 料

- [1] Barry, R.G. and R.H. Perry, 1975: Synoptic Climatology. 104-106.
- [2] Petterssen, S., 1958: Weather analysis and forecasting, Vol. 2, 240-242.
- [3] Ostle, B., 1971: Statistics in research, 177-178.



| |
|----|
| 公 |
| Vs |
| 16 |
| 19 |
| 17 |
| 2 |
| 18 |
| 24 |
| 34 |
| 7 |
| 6 |
| 2 |
| 13 |
| 30 |
| 40 |

至於... 不... 始... 之... 大... 定焉

| 項 目 | 月 份 | | |
|------------------------------------|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 |
| 700mb平均圖高度差及溫度梯度(25°N-50°N; 120°E) | 溫度梯度：-1-(-26)=25°C 高度差：3116-2816=300 (重力公尺) | 溫度梯度：2-(-25)=27°C 高度差：3106-2865=241 (重力公尺) | 溫度梯度：5-(-24)=29°C 高度差：3124-2866=258 (重力公尺) |
| 高 氣 壓 | 月份 | 總數 | 源 地 平 均 行 徑 極地高壓中心南限 活 動 特 色 |
| | 1 | 16 | ①俄屬23區。②俄屬24區 ③裏海、黑海北部。 ④河套一帶。 ⑤太平洋區。 ①東南行。②不規則。 ③東行。 ④東南行。 ⑤東北東行。 28°N 高壓在蒙古西北及俄屬24區一帶成滯留狀態為時甚久。 |
| | 2 | 19 | ①裏海、黑海北部。 ②俄屬24區。 ③中亞及蒙、新一帶。 ④黃海、日本一帶。 ①南行轉東。 ②東或東南行。 ③不規則。 ④東行。 36°N (-)高壓出海偏高。 (-)高壓進入蒙古西部及俄屬23區，移向不規則。 |
| 3 | 17 | ①裏海、黑海北部。 ②俄屬24區。③蒙古西北 ④長江以南。 ⑤日本南方海域。 ①東南行。②不規則。 ③東南轉東北行。 ④東北行。 ⑤東北行。 30°N 除俄屬24區外，高壓較規則地由東南轉東北移入太平洋。 | |
| 低 氣 壓 | 月份 | 總數 | 源 地 平 均 行 徑 35°N以南次數 活 動 特 色 |
| | 1 | 16 | ①裏海、黑海以北。 ②貝加爾湖以東。 ③華北地區。④東海。 ⑤俄屬次克海。 ①東北東行。②東北東行。 ③偏東北行。 ④東北行。 ⑤較不規則。 4 低壓滯留俄屬次克海地區。 |
| | 2 | 26 | ①裏海、黑海以北。②塞北 地方。③長江流域。④雲貴 一帶⑤日本附近海域。 ①不規則。②東轉東北。 ③不規則。④不規則。 ⑤東北行。 9 (-)低壓原地不集中。 (-)路徑不規則。 |
| 3 | 23 | ①西伯利亞一帶。 ②華中一帶。③東海。 ④北太平洋。 ①東或東南行。②東北行。 ③東北行。 ④東北行。 7 路徑零亂。 | |

颶 風 凱西 (KATHY; 011)。

備註：消長於海上。

| 鋒 面 | 月 份 | 次 數 | 120°E 過 境 次 數 | | | | 天 氣 概 況 (雨區) | | | | 備 註 |
|-----|-----|-----|---------------|------|------|------|--------------|------|------|-------------------------------------|-----|
| | | | 40°N | 30°N | 25°N | 20°N | 40°N | 30°N | 25°N | 20°N | |
| 1 | 29 | 11 | 7 | 5 | 6 | 038 | 232 | 221 | 060 | 百位數為廣雨區次數 十位數為小雨區次數 個位數為無雨區次數 | |
| 2 | 22 | 6 | 7 | 5 | 4 | 023 | 232 | 320 | 121 | | |
| 3 | 24 | 7 | 5 | 7 | 5 | 025 | 032 | 340 | 122 | | |

| 月 份 | 項 目 | 測 站 | 強 度 | | | 路 徑 | 前 鋒 最 南 位 置 | 影 響 臺 灣 日 期 | | | | | | | | | | | |
|-----|-------|-----|-----------|-----------|---------|------|-------------|-------------|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|------------------------|--------------------------|
| | | | 極 強 <10°C | 強 11-15°C | 中 >16°C | | | | | | | | | | | | | | |
| 一 月 | 雨 量 | 臺 北 | 12.1 | 61.9 | 25.3 | 25.0 | 22.5 | 10.2 | 20.4 | 13.7 | 16.0 | 17.1 | 1.4 | 27.9 | 22.8 | 44.2 | 18°N | ①5-7日 ②12-13日均 ③15-17日 | |
| | 降 水 日 | 臺 北 | 10 | 14 | 12 | 6 | 4 | 5 | 6 | 4 | 5 | 2 | 3 | 10 | 13 | 21 | 19 | 4 | 5 |
| 二 月 | 雨 量 | 臺 北 | 39.0 | 53.6 | 28.4 | 10.9 | 40.9 | 3.1 | 1.0 | 1.8 | 7.9 | 4.8 | 9.6 | 13.9 | 23.2 | 20.7 | 50.2 | 14°N | ①1-2日 ②19-20日 ③23-5日 |
| | 降 水 日 | 臺 北 | 11 | 12 | 11 | 6 | 5 | 4 | 3 | 1 | 2 | 3 | 2 | 4 | 9 | 14 | 15 | 3 | 14 |
| 三 月 | 雨 量 | 臺 北 | 13.5 | 84.4 | 94.8 | 17.0 | 31.0 | 3.5 | 1.9 | 2.1 | 1.3 | 0.6 | 6.9 | 0 | 2.8 | 19.0 | 57.3 | 19°N | ①1-4日 最低臺北氣溫 8°C ②19-24日 |
| | 降 水 日 | 臺 北 | 18 | 18 | 20 | 13 | 9 | 6 | 3 | 1 | 3 | 2 | 2 | 0 | 6 | 18 | 19 | 9 | 21 |

民國 65 年 1.2.3 月份本軍各測站觀測降雨量及降水日