

monotone semi-Lagrangian), 所謂準單調是指採用非單調高階內插格式, 但經過修正後會使半拉格朗日法具有類似單調的特性。其計算步驟如下:

根據 Zalesak (1979), 網格點  $j$  二維物理量  $f^{n+1}$  可用下式表示:

$$f_j^{n+1} = f_{L_j}^{n+1} + g_j^{n+1}$$

其中  $f^{n+1}$  表時步  $n+1$  時的預報值,  $f_L^{n+1}$  表低階內插近似。  $g^{n+1}$  表高階內插近似, 用來修正到接近真解。首先利用低階內插格式求出  $f_{L_j}^{n+1}$ , 然後利用高階內插格式求出  $f_{H_j}^{n+1}$ 。上式中

$$g_j^{n+1} = C_j^{n+1}(f_{H_j}^{n+1} - f_{L_j}^{n+1})$$

$C_j^{n+1}$  的計算方法如下:

a. 找出出發點附近的最大值  $f^+$  與最小值  $f^-$

b. 令  $Q^+ = f^+ - f_{L_j}^{n+1}$

$$Q^- = f^- - f_{L_j}^{n+1}$$

$$P = f_{H_j}^{n+1} - f_{L_j}^{n+1}$$

c. 若  $P > 0$ , 則  $C_j^{n+1} = \min(1, \frac{Q^+}{P})$

若  $P < 0$ , 則  $C_j^{n+1} = \min(1, \frac{Q^-}{P})$

若  $P = 0$ , 則  $f_{H_j}^{n+1} = f_{L_j}^{n+1}$  且  $g_j^{n+1} = 0$

透過上面步驟將半拉格朗日法變換為具有單調性, 可以抑制因不連續所產生的雜波, 而仍可維持半拉格朗日法的準確性。這項方案很容易加入原有的模式中, 也可應用在三維模式。QMSL 主要是透過前一時步的網格點上的訊息, 來達到抑制突增或突減的目的, 它在形狀的守恆方面仍維持用半拉格朗日法來處理, 這種過度人為的處理將導致總質量方面失去守恆性。

### 三、數值實驗結果

#### (一) 均勻流場

我們利用線性平流方程來平流一個物理量場, 不考慮其他外力強迫, 採用 Holnicki (1995) 和 Bermejo and Staniforth (1992) 的方案來了解半拉格朗日法加入單調格式以後的特性。考慮利用風場  $U(X, t)$  平流一物理量場  $f(X, t)$ ,  $X$  表示位置向量,  $t$  表示時間:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + U \nabla f = 0$$

$$f(X, t + \Delta t) = f(X - \alpha, t)$$

其中  $\alpha$  是位移向量, 即

$$\alpha = X(t + \Delta t) - X(t)$$

實驗所利用的旋轉風場為無輻散的, 以避免物理量場因輻散而導致形狀的改變。角速度  $\Omega$  為  $0.3636 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ , 旋轉風場  $U = [(X - x_c)\Omega, -(Y - y_c)\Omega]$ ,  $(x_c, y_c)$  為旋轉中心, 取為  $(0.5, 0.5)$ , 物理量場旋轉一圈需 172800 秒。邊界取固定邊界條件。圓錐體或缺口圓柱體的高度為 1, 積分區域取正方形  $[0, 1] \times [0, 1]$ 。半拉格朗日法和 QMSL 的內插計算採用三次樣條(cubic spline)函數, 分別在圓錐體及缺口圓柱體平流六圈之後比較不同格式間的差異。實驗採用 Takacs (1985) 的方法計算總誤差 (total error)  $E_{total}$ 、耗散誤差 (dissipation error)  $E_{diss}$ 、頻散誤差 (dispersion error)  $E_{disp}$ :

$$E_{total} = E_{diss} + E_{disp}$$

$$E_{diss} = [\sigma(f) - \sigma(F)]^2 + (\bar{f} - \bar{F})^2.$$

$$E_{disp} = 2(1 - \varepsilon)\sigma(f)\sigma(F).$$

其中  $f$  為真解， $F$  為數值解， $\bar{f}, \bar{F}$  表示積分域中的平均， $\sigma$  為標準差， $\varepsilon$  為相關係數。

**A、圓錐體實驗**

首先是典型的圓錐體平流實驗，在沒有外力強迫下測試各種單調方案特性。圓錐體半徑取 12 個網格間距，如圖(1a)。先考慮傳統半拉格朗日

法(SL)的平流實驗，圖(1b)為半拉格朗日法平流圓錐體六圈後的結果， $\Delta t = 1800$  秒時圓錐體高度極大值為 0.87。在不同時步( $\Delta t = 900$  秒， $\Delta t = 3600$  秒) 的情況下，極大值在時步越大時越接近 1，極小值則隨時步增加而減小。如表(一)所示，平流六圈後總質量與初始場的比值為 0.999638，總質量幾乎保持守恆，此與 Bermejo

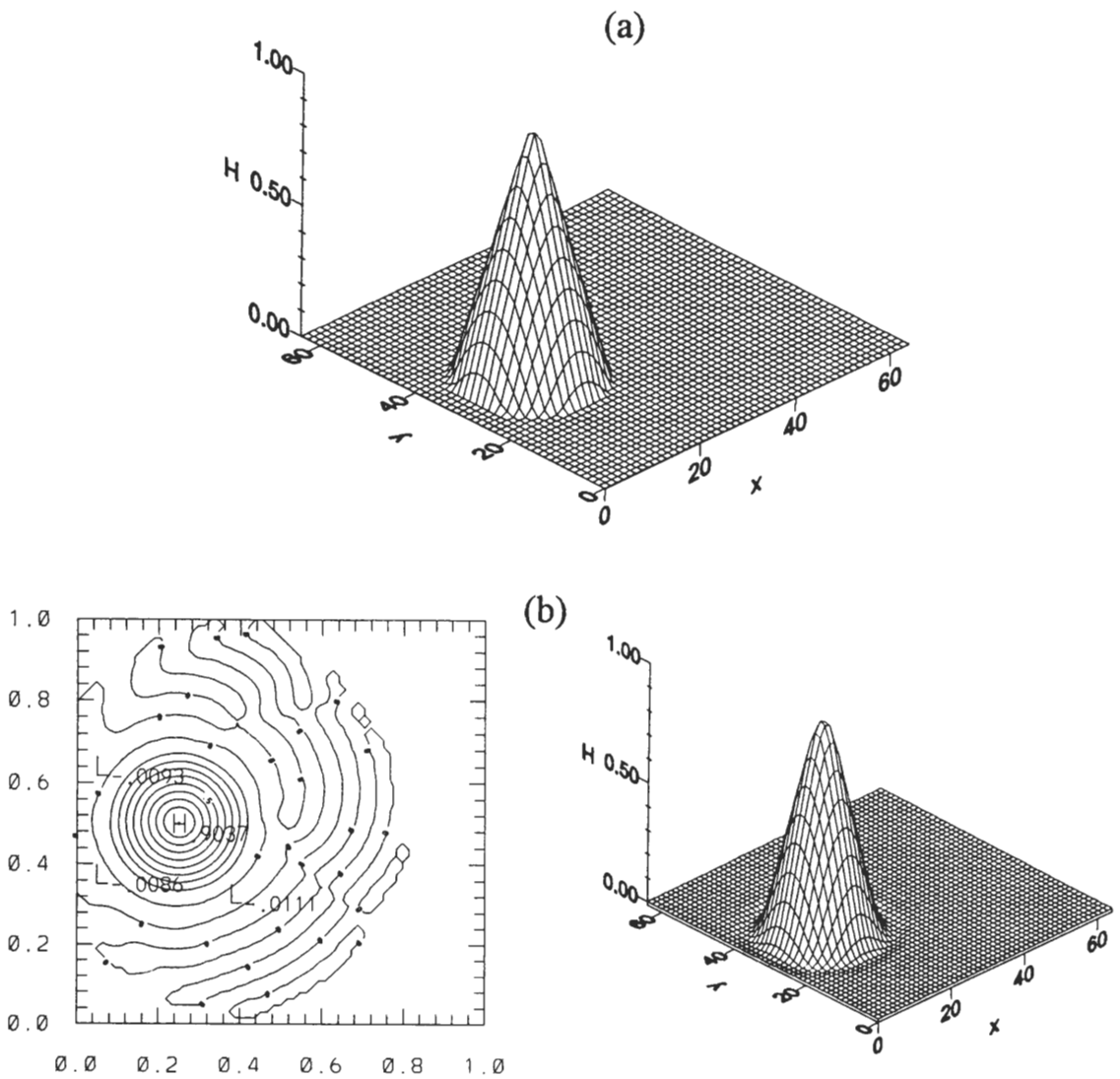


圖 1 (a)圓錐平流實驗的初始場立體圖 (b)半拉格朗日法圓錐體實驗，旋轉六圈後的結果。左圖為被平流場平流之後的等值線圖。右圖為被平流場平流之後的形狀示意圖。

(1990)的結果相似。極大值在最初幾圈變化最大，隨後收斂到某值。能量的變化則是耗散的，但耗散與時步成反比。由總誤差來看， $\Delta t = 1800$  秒時總誤差最小，而當時步增加或減小時總誤差開始增大。時步越小耗散誤差越大，而時步越大則頻散誤差越大。如果將解析度提高一倍，在高解析度的情況下，各項因子的守恆性越好，總誤差可減到最小。雖然半拉格朗日法採用三次樣條(cubic spline)內插時總質量是守恆的

(Bermejo 1990)，但計算過程中會產生一些負值。在模式中進行非負值物理量的預報時，如水汽的傳送，若不採用單調或正定(positive-definite)格式將導致不正確的預報結果。舉例說，如果直接設預報值恆大於零，將導致水汽質量的增加，在模式中會有不正常降水發生。在圓錐體平流實驗時，若假設預報場恆大於零，則總質量將增加約20%左右。

表一 半拉格朗日法(SL)旋轉圓錐體各圈數據

圈數	總質量	總能量	極大值	極小值	總誤差	耗散誤差	頻散誤差
1	0.9995	0.998403	0.936137	-0.11128	0.814546E-05	0.102897E-08	0.814443E-05
2	0.9992	0.997403	0.924674	-0.11301	0.136377E-04	0.270634E-08	0.136350E-04
3	0.9991	0.996518	0.917488	-0.12232	0.192574E-04	0.438997E-08	0.192530E-04
4	0.9992	0.995695	0.912156	-0.13606	0.254810E-04	0.621190E-08	0.254747E-04
5	0.9994	0.994919	0.907685	-0.14453	0.325468E-04	0.830087E-08	0.325385E-04
6	0.9996	0.994177	0.903655	-0.14981	0.405475E-04	0.107443E-07	0.405367E-04

半拉格朗日法準單調(QMSL)格式是由 Bermejo and Staniforth (1992)所提出，在這裡準單調的意義就是，採用的準單調內插格式雖然是高階內插，但此種格式仍然可以抑制不連續處附近由高階內插引起的擾動。QMSL 法的特性之一就是可以很容易的加入原有的內插格式中，不需作太大修正。計算步驟如前所述，需找出出發點附近的極大值和極小值，並且限制出發點的內插值不能大於或小於這兩個極值。QMSL 實驗的低階內插採用線性內插，高階內插採用三次樣條函數。圖(2a)為 QMSL 的實驗結果，可以看出不合理的負值沒有產生，極大值較傳統半拉格朗日法小，雖然耗散誤差較大，但總誤差量級與半拉格

朗日法相同。總能量的守恆性與傳統半拉格朗日法相差不大，總質量約增加 1%左右。QMSL 的耗散較 SL 大，由圖(1b)與圖(2a)可看出 QMSL 的圓錐體較 SL 平滑。頻散誤差則在同一個量級，由此可知 QMSL 在相速度的表現與 SL 相近。

Holnicki(1995)的五次內插格式結果如圖(2b)，形狀的改變不大，在不連續處沒有負值產生，極大值介於半拉格朗日法(SL)與 QMSL 法之間。但是由表(三)可知，其總質量和總能量則顯著的增加，而總誤差也是三種方法中最大的，因此 Holnicki 的方法並不適用於此種分佈的物理量場。由圖(2b)可看出 Holnicki(1995)的方法對形狀保存有比較好的表現，平流六圈之後仍然與初始

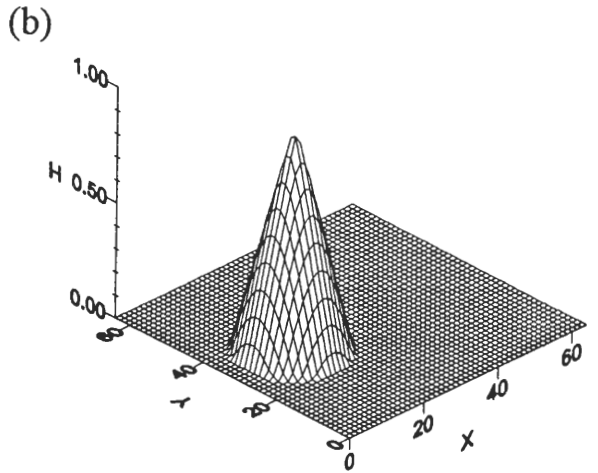
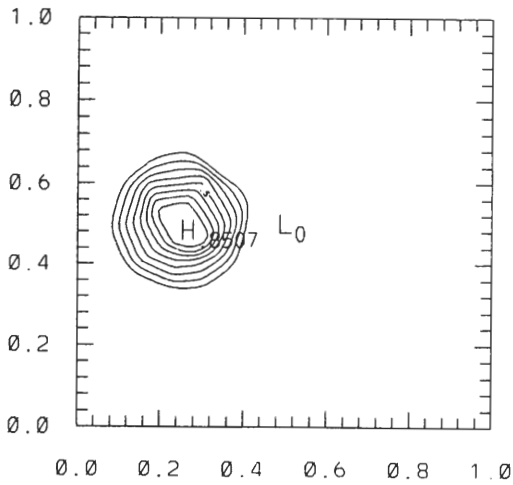
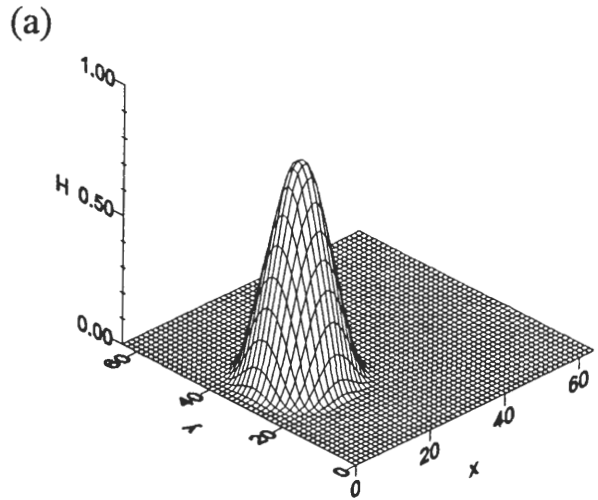
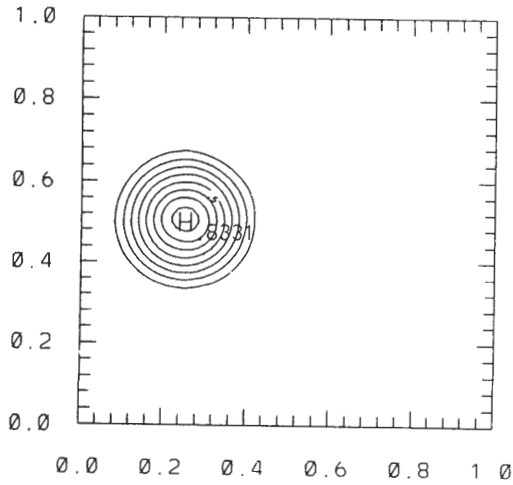


圖 2 圓錐體實驗旋轉六圈後的結果。(a)如圖 1b，但為 QMSL 法 (b)如圖 1b，但為 Holnicki 法

表二 QMSL 法旋轉圓錐體各圈數據

圈數	總質量	總能量	極大值	極小值	總誤差	耗散誤差	頻散誤差
1	1.0065	0.994172	0.905739	0.000000	0.116463E-04	0.699709E-07	0.115764E-04
2	1.0080	0.989827	0.884507	0.000000	0.200538E-04	0.121986E-06	0.199318E-04
3	1.0087	0.985372	0.866468	0.000000	0.294909E-04	0.176685E-06	0.293143E-04
4	1.0091	0.981160	0.852836	0.000000	0.399827E-04	0.235798E-06	0.397469E-04
5	1.0094	0.977276	0.841880	0.000000	0.514637E-04	0.299175E-06	0.511646E-04
6	1.0097	0.973755	0.833148	0.000000	0.637616E-04	0.365433E-06	0.633961E-04

場相近。這主要是由於在內插時對離散斜率有較正確的計算，而 QMSL 則僅對前一時步的極大極小值做判別，在本質上 QMSL 仍然是半拉格朗日

法，因此 Holnicki(1995)對於跟形狀有關的斜率部份比 QMSL 有更好的結果。

表三 Holnicki(1995)格式旋轉圓錐體各圈數據

圈數	總質量	總能量	極大值	極小值	總誤差	耗散誤差	頻散誤差
1	1.0079	1.02247	0.911418	0.000000	0.188081E-04	0.226297E-06	0.185818E-04
2	1.0164	1.04444	0.893281	0.000000	0.515748E-04	0.903724E-06	0.506711E-04
3	1.0230	1.06371	0.880178	0.000000	0.964427E-04	0.183893E-05	0.946038E-04
4	1.0290	1.08155	0.869294	0.000000	0.151936E-03	0.298267E-05	0.148954E-03
5	1.0348	1.09559	0.859390	0.000000	0.210527E-03	0.415777E-05	0.206369E-03
6	1.0392	1.10578	0.850693	0.000000	0.271607E-03	0.514601E-05	0.266461E-03

## B、缺口圓柱

在這實驗中圓柱高度取為 1，半徑為  $r$ ，缺口深度也是  $r$ ，寬度為  $4\Delta x$ 。平流風場與圓錐實驗相同。缺口圓柱的不連續區域比圓錐體更多，因而可用來模擬均勻流場中流體元分布較為複雜的大氣狀況。圖(3b)為半拉格朗日法平流六圈的結果，在立體圖中圍繞不連續處出現許多雜波，上方的凸起部份也超出 13.3%。除了總質量守恆性為 0.999 以上，在總誤差方面都較圓錐體實驗要大，而在極大、極小值方面都增加 13%左右。研究結果顯示，在均勻流場中分布較複雜的流體元，在利用傳統半拉格朗日法進行平流時，突增突減的現象更為嚴重。即使在流場平滑的情況下，傳統半格朗日法的單調性與流體元分布有關。QMSL 的結果如圖(4a)，圓柱底部不連續處的雜波沒有出現，極大值維持在 1。雖然如此，在不連續處仍然有平滑作用。Holnicki 方法的結果如圖(4b)，不連續處的表現與 QMSL 法相似，極大值 0.993 是三種方法中最小的，比較明顯的是總質量(1.007)與總能量(0.814)的增加不如圓錐

體實驗顯著。在誤差方面(圖 5)，總誤差以 QMSL 最大，Holnicki 方法次之，傳統半拉格朗日法仍然是誤差最小的。由圖中可知，三者最大的差異是在於單調格式有較強的耗散誤差。由總誤差等數據可以看出，兩種單調格式的加入對半拉格朗日法的優點並沒有改變，但是單調格式卻可有效抑制不連續處的雜波產生。

## C、三維空間流場測試

我們利用上述的均勻流場實驗方法將這些單調平流格式推廣至三維流場的情況，在進行三維流場的實驗時我們採用下面的方式：

1. Holnicki (1995)的格式中，在求取出發點的流體元時，分別對三個方向施予單調約束條件，也就是先完成水平方向內插後再進行另一個方向的內插。
2. QMSL 的格式中則是在求取出發點周圍的極大極小值時，從出發點水平方向的周圍極值推展至三個方向周圍的極值，其餘進行 FCT 方法的計算並不改變。