TAMEX後有關可預測度的探討

林　和

國立台灣大學大氣科學系

摘　要

TAMEX 期間，忽略了可預報度的實驗，當誤差經由初始值及預報方法之不準確兩種來源開始滋長，可分別歸類成自然、人為引發的謬誤，本文探討誤差來源、區分以及可預測度實驗的設計。

一、前　言

TAMEX 係以增進梅雨期豪雨預報能力為目地。觀測期中，受到資源的限制，正確的氣象預報亦成為最重要的課題。但在大氣中，尤其對非線性作用強烈的鋒面系統，天生的可預測度（natural predictability）對預報能力設下有力的限制（林和，1987a）。這是系統本身的數學結構使它如此，絕不是累積預報員經驗或修正模式所能改變。我們在討論預報問題的同時，必須要考慮到在自然極限之前，有多少人為可改進的空間。

Lorenz(1969) 提出可預測度計算的三種方法。第一種方法尋找天氣類型相似的初始場，然後觀察它們的分歧。這方法立意雖佳，但我們現有資料中，幾乎找不到一對"接近"類似的天氣圖，更遑論其後的演化。第二種方法使用目前最完備的數值模式，將初始場疊加任意的小擾動（randomization），由誤差擴大的時間，估計可預測度。這方面的實驗占可預測度研究的大部份，例如 Williamson 與 Kasahara(1971) 發現，NCAR 5° 解析的 GCM, RMS 誤差加倍的時間約為 2～3 天，第三種方法應用統計力學的紊流模式，經過 Closure 或如慣性區段的理論，計算 error energy 的增長率(Leith and Kraichnan, 1972) 結果與模式計算的相當接近，我們將要在這裡提出另外兩種方法，恰巧位於理論與實際的兩側極端，以資比較：

第四種方法稱之分析方法：這是頗具挑戰的研究，對基本方程式的 Well-posedness，即方程組之適當可微分性（Suitable differentiability）與解答獨一性（Uniqueness）做分析，若此點成立，則須對位渦度建造上限 upper bound，這上限同時是 strain rate 的上限，如果初始值不同，error energy 的成長率亦將受到同樣的限制，如此，我們可以用嚴整（rigorous）的方法建立理論可預測度最低（not sharp）上限。

這樣的方法當然在數學上面臨很大困難。但 Judorich（1964）以及 Bennett and Kloeden（1981）已經逐步獲得進展。Bennett et al 對準地轉系統的 Bergeron 鋒生機制，建立了很確切的限制。

第五種方法是這本文的主題，即如何從實際預報作業中，找尋可預報度，我們稱之實驗方法。

我們首先須區分由天氣系統本身、人為兩方面引致的誤差來源。Lorenz（1983）曾經做了很好的說明。

二、天然與人為誤差來源

由簡單的示意圖來看，一切預報過程可表示如下：

$U(t_0) \rightarrow \boxed{f} \rightarrow U(t_1) \qquad t_1 > t_0$

初始場U(t_0)經觀測得知，預報過程（主觀、客觀）皆可用黑箱（f） 來表示。U(t_1)代表預報的結果。如果氣象變化能量化成變數，則循預報方程式：

$$\frac{dU}{dt} = f \quad , \quad U(t_0) \text{ 已知}$$

進行。但在預報作業中，誤差從兩種來源產生，一是初始值U(t_0)＋δU(t_0)即觀測所得，不能夠完全準確，一是預報過程並不完全符合大氣運動規則，所以過程加上誤差，f＋δf，實際上我們即按照

$$\frac{d(u+\delta u)}{dt} = f + \delta f \quad , \quad U(t_0)+\delta U(t_0) \text{ 初始}$$

值進行預測。

首先考慮誤差完全由初始值進入的情況；即擁有完美的f，誤差值在初始時間微小，$|\delta U(t_0)| \leq |U_0(t_0)|$：使用Taylor's expansion展開；

$$\frac{d\delta U}{dt} = g\delta U \qquad \left(g = \frac{\partial f}{\partial U}\Big|_{t_0}\right)$$

誤差能量$\delta E = <(\delta U)^2>$ 的成長，相當於在phase space在t_0附近線性化f的gradient，< >代表ensemble 的集合。如果誤差值從隨機群任意揀取，而系統具有優良的ergodicity性質，δE 的成長漸漸與某特定初始時間無關，ensemble 的演化趨向統計穩定：

$$\frac{d\delta E}{dt} = G\delta E \quad , \quad \left(G = <\frac{\partial f}{\partial U}>\right)$$

上式顯示δE呈指數成長，G即為理論上的可預測度，在一度空間相當於Liapunov number 的特性指數。（Characteristic exponent，見Hirsch & Smale，1974）

若誤差值同時由初始狀態及預測方法的錯誤進入預測值，則進行的計算相當於：

$$\frac{d(U+\delta U)}{dt} = f(U+\delta U) + \delta f(U+\delta U)$$

假設預測過程的誤差δf 不致太大，則$\delta f(U+\delta U) \approx \delta f(U)$；重寫：

$$\frac{d\delta U}{dt} = g\delta U + s \qquad s = \delta f(U)$$

我們發現，不正確的預報過程對誤差的演化，屬於線性堆積，因為s由U值在t_0與t_1間決定，獨立於δU的數值之外。寫成ensemble 的型式：

$$\frac{d\delta E}{dt} = G\delta E + S \quad , \quad S = <\delta f(U)> \qquad (1)$$

S可視為常數。上式也許會滋生誤解，認為不正確的預測方法，並不會引致太大誤差。但是人為誤差不能夠獨立於自然誤差外成長，例如，開始時有完美的初始值，預報方法的瑕疵會在再下一步引進誤差，縱使預報方法修正成完美，但誤差已經開始沿G曲線伸向指數形擴大。此外，當E增大時，預測系統會趨向氣候平衡狀態δE ＋ E ， δE 本身的非線性效用進入方程式，會阻扼δE 無限制的成長，則誤差能量的演進，應該如：

$$\frac{d\delta E}{dt} = G\delta E + S - A(\delta E)^2$$

這種情形下，預報方法的誤差，將會掩蓋指數G項的成長。

上面分析的結論是：誤差成長可分為兩類，第一類受到自然可預測度（Natural predictability）的限制，由於系統內部的非線性作用，使初始值的不準確性，隨時間呈指數擴大，（同時在空間蔓延到不同尺度），而使預報失效。對於自然可預測度，除了某些低頻現象如阻塞高壓…等，可以延申它們的預報期限外，幾乎無計可施，這方

面的努力，將不是改良預報，而是找出自然可預報度的極限，由prediction的研究，轉向predictability的研究。第二類誤差稱之缺乏技巧之可預測度lack-of-skill predictability，由於模式的缺憾或主觀認知的限制，以致於預報失靈，這樣的誤差，疊加在自然可預測度上，同時也是預報業務可以改進的部分。

三、量度、歸類可預測度

若誤差成長確實按照初始值，預測方法兩種不同的誤擬擴大，當我們有充分取樣時，觀察到的RMSE（Root Mean Square Error）成長曲線必須符合(1)式的解：

$$r(t) = \left(r(t_0) + \frac{S}{G}\right) e^{Gt} - \frac{S}{G} \qquad (2)$$

不論由主觀預報或模式預報，都可以用上式校驗，所得到的G值應該完全一致（universal），而不同的S值恰好量度預測的技巧。S＝0顯示完美的預測方法，S值越大，預測技巧越有改進的餘地。

計算（G，S）值，可以用curve fitting或代進以下公式，假設RMSE值分別在等間距t，t＋△t，t＋2△t測得，則由(2)式：

$$G = \frac{1}{\triangle t} I_n\left(\frac{r(t+2\triangle t) - r(t+\triangle t)}{r(t+\triangle t) - r(t)}\right)$$

r；RMSE

這是自然可預測度，通常用log 2/G（單位；時間）表示誤差加倍的時間。知道G以後，S值可以導出如下：

$$S = \frac{G\left(r(t+\triangle t) - r(t)e^{G\triangle t}\right)}{e^{G\triangle t} - 1}$$

四、可預測度的實驗設計

驗證以上理論的正確，我們可以設計可預測度的實驗，例如在TAMEX期間，我們有密集的網格資料，國際學者的合作，預報過程應該較非TAMEX期間密，假設24小時，48小時，72小時之前預測梅雨鋒的位置，與實際位置比較，誤差分別為r(24)，r(48)，r(72)，若平日非TAMEX 期間的誤差值為r'(24)，r'(48)，r'(72) 。根據(3)式可求得G值：

$$G = I_n\left(\frac{r(72)-r(48)}{r(48)-r(24)}\right)$$

$$= I_n\left(\frac{r'(72)-r'(48)}{r'(48)-r'(24)}\right) \text{（單位為天）}$$

若以上等式成立，證明自然可預測度確實獨立於預測方法之外，則可經由G值代回(2)式求S。S值在TAMEX期間的S值應該比非TAMEX 期間S值為低。S表示進步的幅度，初始誤差若訂正為1，則預測分數（score）可定義為；

$$\text{Score} = \left(1 - \frac{S}{G}\right) \times 100$$

鋒面各尺度系統的預測，亦可透過量化後適當的氣象變數計算得知。

五、結　論

本文嘗試從誤差增長曲線，決定自然與人為可預測度的大小。其正確性有待數值模式驗證（林和，1987b），進一步研究將著重：

(1)對取樣（sample）次數的敏感程度（sensativity）分析。這裡牽涉到系統本身的相混合（phase mixing）與孤點（singularity）分佈。須要針對某特定方程組計算。

(2)模擬人為誤差肇始的過程，預報方程式在數值模擬時多半為系統性偏差。主觀預報則包括了隨機性的判斷錯誤，對於隨機性的人為錯誤，將大量增加(2)式的複雜性。

(3)誤差因子的相互影響，如果氣象變數為多項，或者以尺度分離，展開為各種不同尺度的運動，其誤差感染的速率將與預報作業息息相關。

參 考 資 料

Bennett, A.F. and Kloeden, P.E., 1981: Dissipative quasigeostrophic motion and ocean modelling. Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. 18, 253-262.

Judovich, V.I., 1964: A two-dimensional problem of unsteady flow of an ideal uncompressible fluid across a giver domain. Matem. Sbornik. 64(106), 562-588.

Hirsch, M.W., and Smale, S., 1974: Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra. Academic press. New York.

林和：1987 a，鋒生可預測度的理論上限。（十二月投稿大氣科學）

Leith, C.E., and Krichnan, R.H., 1972: Predictability of turbulent flows. JAS, 29, 1041-1058.

Lorenz, E.N., 1969: Three approachs to atmospheric predictability, Bull. Amer. Meteor. Soc., 50, 345-349.

------------, 1983: Turbulent and predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics. Edited by M. Ghil, North-Holland.

Williamson, D.L., and Kasahara, A., 1971: Adaption of meteorological variable forced by updating. JAS., 28, 1313-1324.

林和：1987 b，偵測誤差的三種來源與可預測度的實驗設計。（十二月投稿大氣科學）

Post-TAMEX thoughts about Predictability

LinHo

Dept. of Atmospheric Sciences,
National Taiwan University

ABSTRACT

During TAMEX period, the predictability experiment has been neglected. It is known that the errors grow from two sources: the deviations from initial observations and the deficiency of forcasting skill. They, in turn, represent the natural and man-made predictability. This study will discuss the error sources, the classification and the design of a predicfability experiment.