

數值方法在移動二維天氣系統上之應用

俞川心 易成安 王義發 張培臣

摘要

運用不同的數值方法對運動方程式求數值解時，往往會因其機制的不同而導致結果迥異。其中有些可以滿足能量守恆的原理卻使得數值解與初始場的關係微弱，有些因相關性頗高卻無法達到能量守恆。是以如何尋找一適當的數值方法，比較其優缺點，以應用於天氣系統的移動，即為本文努力探討之目標。

本文是以二維之平流方程式為主，
$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$
，將平面畫分為四個象限，其中第三象限之中心處有一暖心的溫度脊為初始條件，而邊界條件則始終保持不變，此時當U，V之平流速度以原點作圓週運動時，分別以(1)蛙跳法(Leap-Frog)，(2)尤拉反向法(Euler-Backward)，(3)勒克斯勞德夫法(Lax-Wendroff)等之數值方法求解，吾人發現：

- (一) 蛙跳法中的最大好處是能量變化屬守恆，可惜它的波後擾動(wake)較顯著，使得系統移動中心的最大值有較明顯的起伏現象，容易形成吾人對天氣系統在短時間內有劇烈之天氣變化之預報誤判。
- (二) 尤拉反向法不會有違反物理機制的數值解出現，較不用煩惱電腦程式所出現的假值問題；可惜此方法會使得系統移動中心的振幅有很快速的衰減現象，從而造成能量的流失，使得系統能量變化無法守恆。
- (三) 勒克斯勞德夫法的優缺點則介於前述兩種方法的中間，在運動初期，系統移動中心的振幅會有如蛙跳法時快速增長，至系統移動一段時間後則振幅變化趨於穩定，此外，本方法之能量起伏雖不能完全守恆，但流失現象卻遠小於尤拉反向法，是以本法是改善前述兩者較不利之缺點融合而成，對於移動天氣系統的應用較為合理。

一、前言

流體的運動不論是氣體或液體，其實均相當複雜，雖然它滿足連續性方程，可是它的擴散(diffusion)原理(Han, 1988)與碰撞效應卻不易控制，因此吾人在探討此類問題時，通常儘量簡化或省略少許步驟，以求得一理想化的結果，再逐漸深入問題核心，運用更高技巧以解決更多困難。

本文的目的之一即是企圖用數值方法瞭解大氣現象移動時所產生的變化及影響，如：鋒面系統的平移或颱風的影響...等，但是實際現象卻異常複雜，即使有完整的物理依據及數值方法亦未必能正確地模擬出天氣的變

化；是以吾人暫時祇考量二維的流體運動方式，限制其移動的範圍，同時省略掉地形效應，如此一來，一般的數值方法即可發揮其功能；因此，經過比較再選擇一合理有效的數值方法去求解大氣現象或流體的移動情形即為本文目的之二。

在數值天氣預報(NWP)的許多方法及文獻中，一般學者均以詳細的方法探討了一維方向的平流方程式
$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$
的變化，如蔡清彥等人(1990)，Haltiner and Williams(1979)，及Haltiner(1971)，可是卻由於篇幅的關係少了在二維方向的應用，雖然數值方法的原理從一維擴展至二維並無很大差異，可是卻會因為(1)網格點的安排及(2)預測子(Predictor)與修正子(Corrector)之間的調

整，而產生不同的運用方法，例如：勒克斯彎德法(Lax-Wendroff)在二維的應用即有二種方式。此外，二維方法的運用可藉由立體透視圖的方法表現出流體運動的情形，不但可方便吾人對(1)流體運動的物理機制(2)數值方法的好壞(3)程式設計的正確與否等問題之深入，更可吸引讀者的興趣與深入，從而達到相互交流與討論的目的。

基於上述理由，本文共採用了三種數值方法就平面的流體運動進行結果的比較，它們分別是(一)蛙跳法(Leap-Frog) (二)尤拉反向法(Euler-Backward)及(三)勒克斯彎德法(Lax-Wendroff)；為了避免計算不穩定度(Computational mode)的發生，因此穩定度的控制是本文的優先考量要素之一，任何方法首先均需滿足CFL(Cowant-Friedrechs-Lowy, 1928)之穩定度條件，才再進一步進行程式的設計；至於三種不同的方法則各有其特色，其中蛙跳法是時間的三階格式，具有能量守恆(Conservation of energy)的特性，且形式簡單，較能夠節省電腦的計算時間，從而方便長時間的積分；尤拉反向法雖無蛙跳法的優點，但卻避開了計算模(Computational mode)的產生，不會有不合物理原則的數值解出現，可是相對的，此法的能量卻無法守恆，而且減弱(damping)很快；是以勒克斯彎德法選擇了較前述兩者缺點為輕的原則，即計算模的出現是受初始條件所造成的影響，僅僅在前面105個時間積分步驟裡之產生，之後此法即逐漸趨於穩定，雖有少許能量的流失，但也遠較尤拉反向法為少。

至於上述各種方法的原理及數值技巧，本文將在第二及第三節中逐一敘述，同時初始場及邊界場的條件及原由亦將一併說明，而第四節即針對各種方法的結果進行物理的探討及比較，利用其間的差異性尋找出最適合吾人探討大氣現象時所應選用的方法；第五節則是綜合性的討論，從電腦時間耗用的長短、方法的比較、結果的好壞、及是否適用於天氣現象的追蹤均有簡單的概述，以期能獲得一結論供吾人日後研究之依據。

二、物理機制

通常流體在隨著環境場移動時，會因為彼此間的相互作用，而產生形狀的變化或能量的消長；為明瞭此一現象吾人以爲數值方法應是一種較客觀的求解步驟，也唯有藉此方法，吾人才能透過具有時空變化之立體圖，瞭解其流體運動與環境場變化之相互關係，進而洞悉一大氣擾動(如：鋒面、颱風)在整個大氣環境下移動時所造成的影響。

當流體在二維空間運動時，其運動方程可用下式來表示：

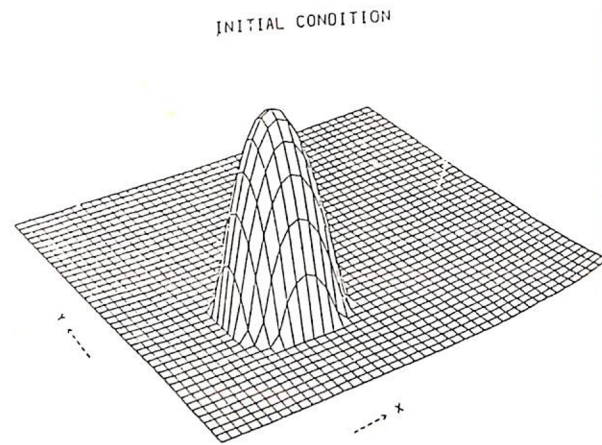
$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} \dots\dots\dots(1)$$

這裡的T指的是任意純量(Scalar)場， $\partial T / \partial t$ 則是該純量隨著時間變化的情形；至於U及V則是環境的移動速度，分別代表著東西方向及南北方向的速度分量是以等號右邊可簡單地解釋為該純量在空間上的平流情形尤於方程式有四個變數，因此求解解析(Analytic solution)屬不可能，唯一的方法便是採用數值方法。

為了簡化問題，且易於深入流體的運動現象，吾人首先宜假設：流體的運動是在一剛體(rigid body)上作水平向的旋轉運動，是以 $T=T(x,y,t)$, $u=u(x,y)$ 及 $v=v(x,y)$, 其中U、V則再限制為圓周運動。走筆至此，讀者大概可以用遊樂園裡的“旋轉咖啡杯”來想這個問題，只不過咖啡杯及旋轉盤均是固體，不論怎麼旋轉，不會有形狀上或能量的改變，但是我們的問題卻不同了。所存在的環境是個流體，而流體的反應，亦略有不同；是以須先劃定其邊界值，此刻吾人若運用固定邊界值的方法(即 $T(x,y,t)=0$)，即可避免能量的流失，而使得整個問題簡化許多；接下來，初始條件的設定，是根據本文之目的而設定，若整個流體的運動是界於0與1之間，即 $(x,y)=[0,1]$ ，則在第一象限的中心位置附近，定義一純量場T的圓錐體，其高度及形狀可用下式來表示：

$$T(x,y,t) = r_c^2 - (x-0.35)^2 - (y-0.35)^2$$

這裡 r_c 表示圓錐底面積的半徑，是個常數，其值設為0.15，底面積的中心則是定在 $(x,y)=(0.35,0.35)$ 處，因此除了圓錐部份，其餘的地方，則一律設為0以突顯該圓錐體(如圖一)。



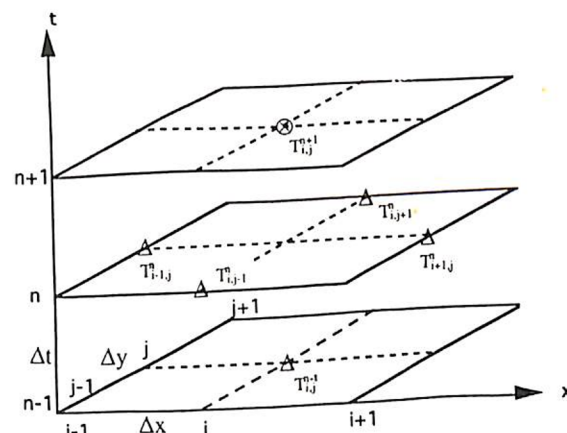
圖一純量場T之初始狀態

有了邊界及初始條件，錐體在隨著環境場的外力而移動時，即會逐漸與環境場相互作用而產生變化；為瞭解此變化與各種數值方法間的關係，吾人將以三度空間的立體圖形，配合著(1)該純量場的最大值(Tmax)，及(2)該純量場的總能量值(ΣT^2)，來探討它們隨時間增加後的變化情形，因此當錐體每旋轉一個象限時(即1/4圈)再繪出其圖形，不但會因時間區間過短而看不出變化，亦不會因時間區間過長而顯得變化不連續；此外，不論何種數值方法，均應注意到計算穩定度，因此，吾人暫時先選取較小的網格間距($\Delta x = \Delta y = 0.025$)及較短的時間區間($\Delta t = 0.01$)，以避免計算時所造成的不穩定(即：在一定數量之時間積分(time steps)後，T值會無限制成長，甚至長大至電腦無法計算之範圍，而形成當機)，才能兼顧到該值的物理量的合理變化，從而達到預測或計算該值的目的。

三、數值方法

對於上述的問題，其實有許多的數值方法均可求解，只是各有其優缺點；本文的目的之一即在運用三種不同的方法對同樣問題進行分析，如此才能從相同的結果中得到該問題的解答，從相異的結果中比較各方法的優缺點。因此吾人將採用(1)蛙跳法(Leap-Frog Scheme)，(2)尤拉反向法(Euler-Backward)及(3)勒克斯彎德法(Lax-Wendroff)等三方法來探討其彼此間之特性。

(一)蛙跳法(Leap-Frog Scheme)，其時間與空間之結構圖如附圖二。



圖二蛙跳法之時間與空間結構圖

蛙跳法的主要原理在運用前兩次時間間隔的T值，以計算下次時間的T值，從而逐漸外推(時間積分)至所預期之時間，因此，方程式(1)可改寫為如下的形式：

$$\frac{T_{i,j}^{n+1/2} - T_{i,j}^{n-1/2}}{2\Delta t} = -u_{ij} \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - v_{ij} \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \dots\dots(2)$$

其中上標n表示時間積分的次數或步驟(time step)，下標(i,j)表示網格點之位置，而 Δx 、 Δy 及 Δt ，則分別是網格及時間間距。由於上式的求解方法需借用到較初始條件(T_{ij}^0)更前一次的網格點資料($T_{i,j}^{-1}$)，方能計算次一時間($T_{i,j}^1$)之值；因此吾人必須運用一啓動器(Starter)以得到該值，方能繼續進行積分，其中最簡易的方法是把所有網格點之值在 T^{-1} 之時間均設定為0，此時的情況便會造成(1)初始場的重新修定及(2)物理量的變化不連續；因此，吾人應採用「往前積分法」(Forward Method)：

$$\frac{T_{ij}^{n+1} - T_{ij}^n}{\Delta t} = -u_{ij} \frac{T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - v_{ij} \frac{T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \dots\dots\dots(3)$$

作為第一個時間積分的啓動器，以得到 T_{ij}^1 之值，之後方程式(2)即可依蛙跳法計算n個時間積分後之情形下 T_{ij}^n 。

1. 穩定度計算

通常穩定度的考量是為要避免參數計算場的無限制成長，也就是當任意網格點 T_{ij}^{n+1} 之值比上 T_{ij}^n 之值大於1時，則數十個或數百個時間積分之後， T_{ij}^{n+1} 之值即有可能長大到使電腦的計算無法負荷，同時也喪失了其物理意義。因此在寫程式(program)之前，即應先考慮穩定度的計算，瞭解網格間距(Δx 及 Δy)及時間間距(Δt)的彼此的限制後，才不致於造成程式的不正常結束。首先，吾人須就穩定度的計算作如下的分析：假定本文所欲計算之參數在任意網格點某特定時間之值 T_{ij}^n 可以下式來表式，即

$$T_{ij}^n = B^{n\Delta t} e^{i(k\Delta x + l\Delta y)} \dots\dots\dots(4)$$

其中 $B^{n\Delta t}$ 是該參數的振幅，k及l則分別是x及y方向之波數；

$$T_{ij}^{n+1} = B^{(n+1)\Delta t} e^{i(kx + ly)}$$

$$T_{i+1,j}^n = B^{n\Delta t} e^{i[(k+1)\Delta x + l\Delta y]} \quad \text{及}$$

$$T_{i,j+1}^n = B^{n\Delta t} e^{i[k\Delta x + (l+1)\Delta y]}$$

若將(4)式代入式(2)，則

$$B^{n\Delta t} e^{i(k\Delta x + l\Delta y)} \left[\frac{B^{\Delta t} - B^{-\Delta t}}{2\Delta t} - B^{n\Delta t} e^{i(k\Delta x + l\Delta y)} \left[U_{ij} \frac{e^{i\Delta x} - e^{-i\Delta x}}{2\Delta x} + U_{ij} \frac{e^{i\Delta y} - e^{-i\Delta y}}{2\Delta y} \right] \right]$$

這裏我們已經假定 $\Delta x = \Delta y = d$ ，則(2)式可寫成如下的形式

$$B^{\Delta t} - B^{-\Delta t} + 2i(u \sin(pd) + v \sin(qd)) \frac{\Delta t}{\Delta x} = 0$$

此時，我們可定義資料的成長率為 λ ，則 $\lambda = B^{\Delta t}$ ，因此，解上述一元二次方程式時，可得

$$\lambda = B^{\Delta t} = -i \frac{\Delta t}{d} (u \sin(pd) + v \sin(qd)) \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta t}{d} \right)^2 (u \sin(pd) + v \sin(qd))^2}$$

由於此 λ 值為複數虛根，是以其絕對值(Norm)的大小必需 ≤ 1 ，方不致造成計算資料的無限制成長，即

$$|\lambda| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} = V_s \frac{\Delta t}{d} \sqrt{2} \leq 1$$

($V_s \frac{\Delta t}{d} \sqrt{2} \leq 1$ 即為二維平流方程式之CFL穩定度條件)

$$\Rightarrow 0.4\sqrt{2} V_s \leq 1 \quad (\because d = \Delta x = \Delta y = 0.025, \Delta t = 0.01)$$

$$\Rightarrow V_s \leq 1.768$$

此外，角速度(Angular Velocity) $V_s = \Omega r$ ，即吾人所欲計算的資料場是作圓周運動，因此，只須知道該資料場的旋轉半徑後，即可輕易的限制角速率 ($\Omega: s^{-1}$) 之值，即可使得此蛙跳法成為穩定的狀態。

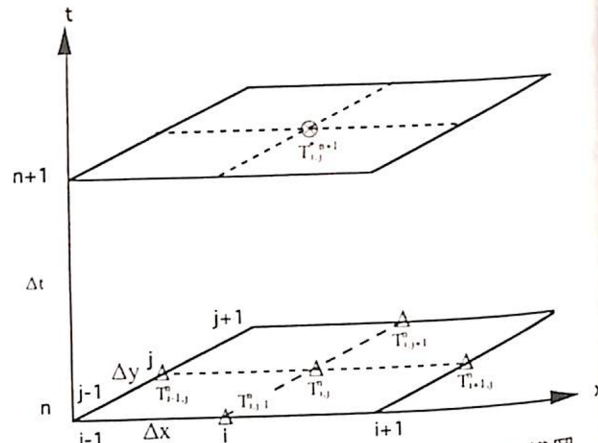
(二) 尤拉反向法(Euler-Backward scheme)，其時間與空間之結構圖如附圖三。

此法運用了兩個步驟，一為預測子(Predictor)，一為修正子(Corrector)；其中修正子的部份因使用了次一時間的預測結果，故稱之為反向法；茲簡述如下：

Predictor:

$$T_{ij}^{*n+1} = T_{ij}^n - U_{ij} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n) - V_{ij} \frac{\Delta t}{2\Delta y} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n)$$

其中 T_{ij}^{*n+1} 是次一時間的預測值，但並非真正的結果，尚需再透過修正子的修定，才可繼續時間的積分，



圖三(1) 尤拉反向法預測子之時間與空間結構圖

Corrector:

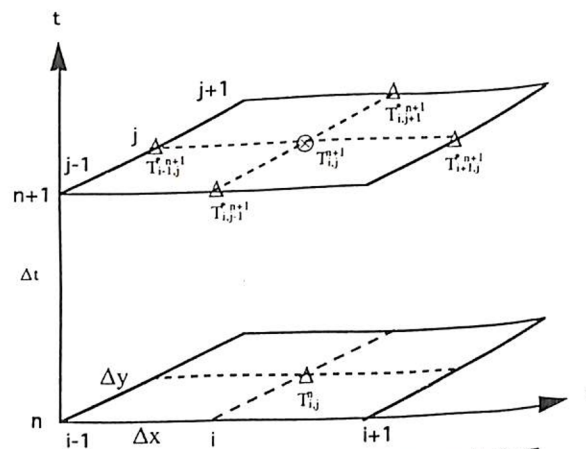
$$T_{ij}^{n+1} = T_{ij}^n - U_{ij} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (T_{i+1,j}^{*n+1} - T_{i-1,j}^{*n+1}) - V_{ij} \frac{\Delta t}{2\Delta y} (T_{i,j+1}^{*n+1} - T_{i,j-1}^{*n+1})$$

此時的 T_{ij}^{n+1} 即為真正次一時間的預測值，如此反復計算，亦可得到該資料的演化情形，雖然運算步驟多了一倍，但每一個臨近網格點的资料卻可以更相互影響，不致造成不連續的情形。

同理，尤拉反向法之穩定條件(同上述蛙跳法之推導方式)為

$$\left| V_s \frac{\Delta t}{d} \sqrt{2} \right| \leq 1$$

角頻率 Ω 最大上限範圍為 $\Omega_{max} = (3.54, 2.50)$ ，但實際模擬計算之結果 $\Omega \geq 3.40$ 為不穩定。



圖三(2) 尤拉反向法修正子之時間與空間結構圖

(三) 勒克斯勞德夫法(Lax-wendroff scheme)

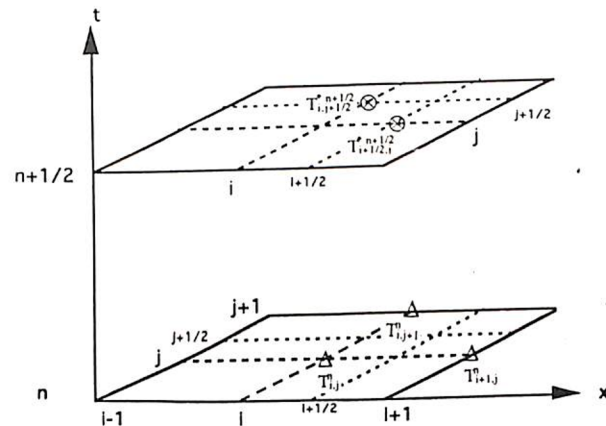
蛙跳法與尤拉反向法所採取之時間與空間格式在應用時各有其難以彌補之缺點，為了避免它們的缺點，而保有它們的優點，在時間、空間之差分格式上稍作修正，以時間 n 時刻之 T^n 值先計算 $n+1/2$ 時刻之預測值 $T^{*n+1/2}$ ，再以此預測值修正得出 $n+1$ 時刻之 T^{n+1} 值。

1. 方法一：兩預測子，一修正子(two predictors and one corrector)，其時間與空間之結構圖如附圖四。

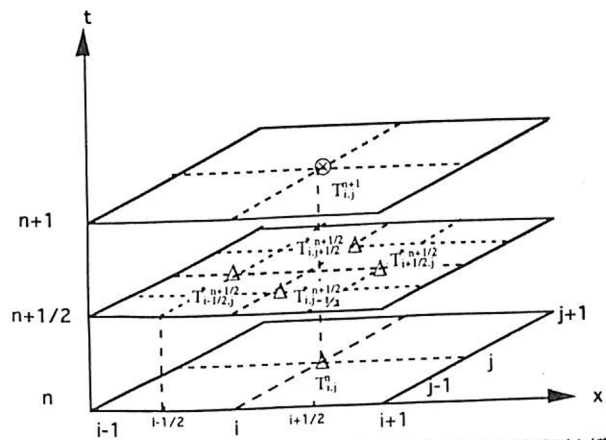
$$T_{i+1/2,j}^{*n+1/2} = \frac{1}{2} (T_{i+1,j}^n + T_{i,j}^n) - U_{ij} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (T_{i+1,j}^n - T_{i,j}^n)$$

$$T_{i,j+1/2}^{*n+1/2} = \frac{1}{2} (T_{i,j+1}^n + T_{i,j}^n) - V_{ij} \frac{\Delta t}{2\Delta y} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j}^n)$$

$$T_{ij}^{n+1} = T_{ij}^n - U_{ij} \frac{\Delta t}{\Delta x} (T_{i+1/2,j}^{*n+1/2} - T_{i-1/2,j}^{*n+1/2}) - V_{ij} \frac{\Delta t}{\Delta y} (T_{i,j+1/2}^{*n+1/2} - T_{i,j-1/2}^{*n+1/2})$$



圖四(1) 勒克斯勞德夫法方法一預測子之時間與空間結構圖



圖四(2) 勒克斯勞德夫法方法一修正子之時間與空間結構圖

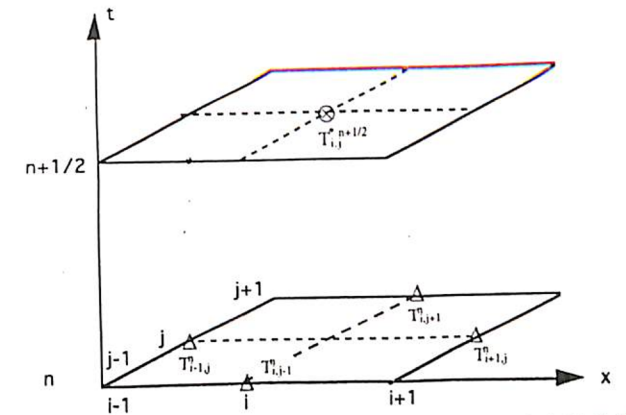
2. 方法二：一預測子，一修正子(one predictor and one corrector)，其時間與空間之結構圖如附圖五。

$$T_{ij}^{*n+1/2} = \frac{1}{4} (T_{i+1,j}^n + T_{i-1,j}^n + T_{i,j+1}^n + T_{i,j-1}^n) - U_{ij} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (T_{i+1,j}^n - T_{i-1,j}^n) - V_{ij} \frac{\Delta t}{2\Delta y} (T_{i,j+1}^n - T_{i,j-1}^n)$$

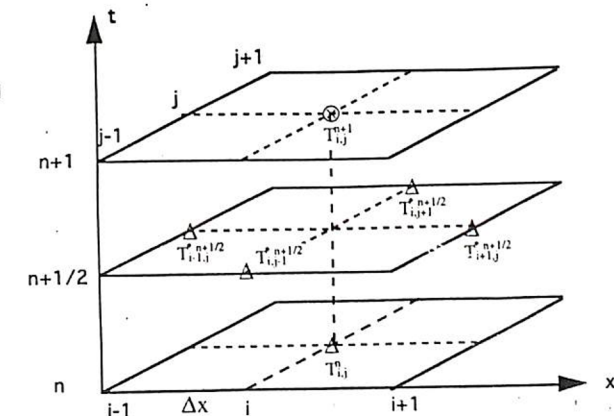
$$T_{ij}^{n+1} = T_{ij}^n - U_{ij} \frac{\Delta t}{2\Delta x} (T_{i+1/2,j}^{*n+1/2} - T_{i-1/2,j}^{*n+1/2}) - V_{ij} \frac{\Delta t}{2\Delta y} (T_{i,j+1/2}^{*n+1/2} - T_{i,j-1/2}^{*n+1/2})$$

勒克斯勞德夫法之穩定度條件仍為 $\left| V_s \frac{\Delta t \sqrt{2}}{d} \right| \leq 1$

實際模擬計算之結果 $\Omega \leq 3.70$ 屬於穩定， $\Omega \geq 3.80$ 屬於不穩定。



圖五(1) 勒克斯勞德夫法方法二預測子之時間與空間結構圖



圖五(2) 勒克斯勞德夫法方法二修正子之時間與空間結構圖

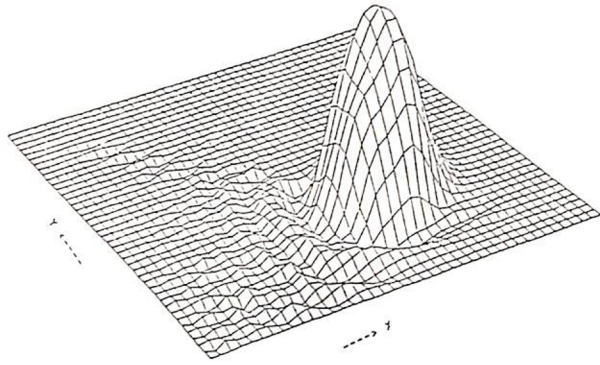
四、結果與比較：

(一) 圖六、七、八、九顯示蛙跳法(Leap-Frog) 逆時針旋轉一圈之透視圖結果，大體上，初始場之角錐體均能維持一定的形狀隨著流場的導引而移動。

各圖中顯示有擾動(不穩定)現象於運動的後方產生，可惜因垂直座標未標示各網格點之值，以致無法明白其振幅及能量之變化為彌補前面所述之缺點，吾人乃配合時間積分的過程，同時計算最大值的演變情形(即振幅之增長衰減)及總能量(ΣT^2)的生長衰減狀況。圖十

顯示系統最大值振幅(T_{max})隨時間之變化，因Leap-frog為三階格式，有計算模存在，造成A區系統最大值振幅隨時間增加。由圖中可看出A區(系統最大值振幅隨時間增加)較B區(系統最大值振幅隨時間減小—damping)為大，且B區系統最大值振幅下降之幅度不大，顯示此格式計算模之影響很大，對於first time step starter之選擇應小心，避免計算模之影響過大。圖十一顯示總能量(ΣT^2)隨時間之變化，圖中顯示Leap-Frog scheme對能量是守恆的。

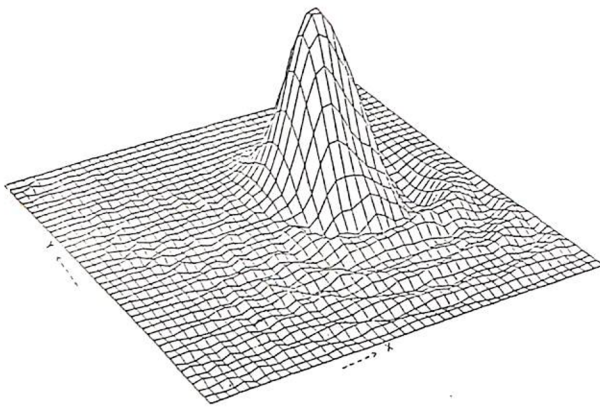
LEAP-FROG SCHEME AT 1/4 REVOLUTION



OMEGA = 1.6 m/s
ANG_HORI = -120. ANG_VERT = 30

圖六蛙跳法純量場T轉1/4圈後之結果

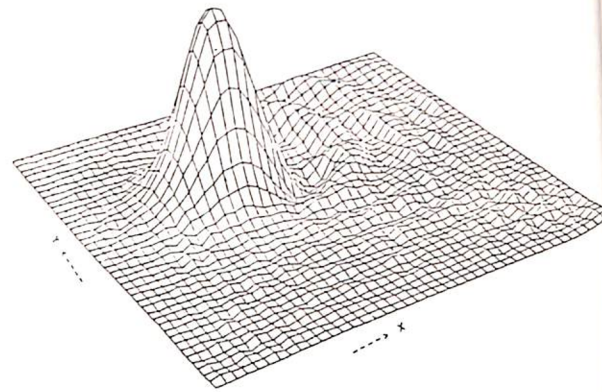
LEAP-FROG SCHEME AT 2/4 REVOLUTION



OMEGA = 1.6 m/s
ANG_HORI = -120. ANG_VERT = 30

圖七蛙跳法純量場T轉2/4圈後之結果

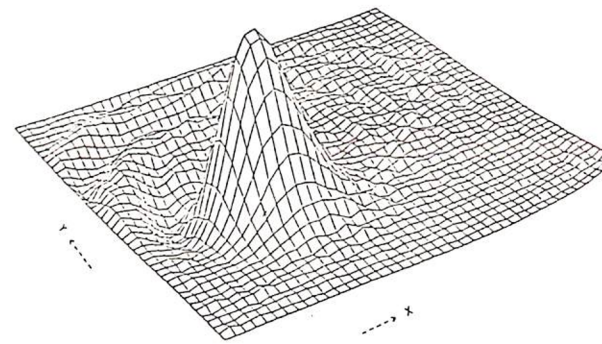
LEAP-FROG SCHEME AT 3/4 REVOLUTION



OMEGA = 1.6 m/s
ANG_HORI = -120. ANG_VERT = 30

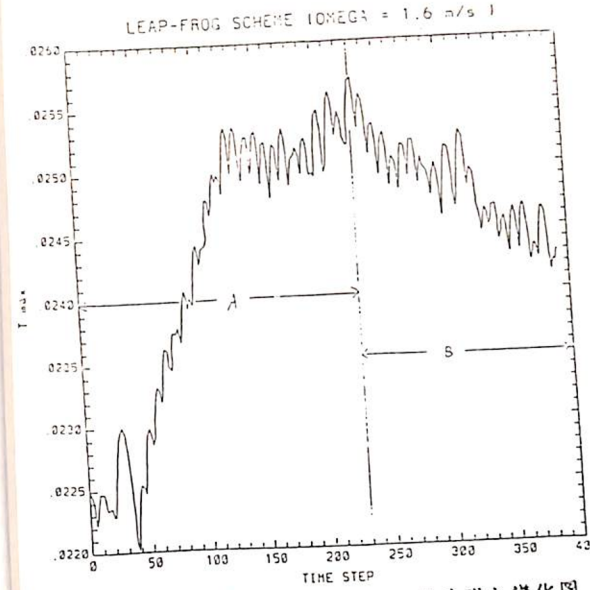
圖八蛙跳法純量場T轉3/4圈後之結果

LEAP-FROG SCHEME AT ONE REVOLUTION

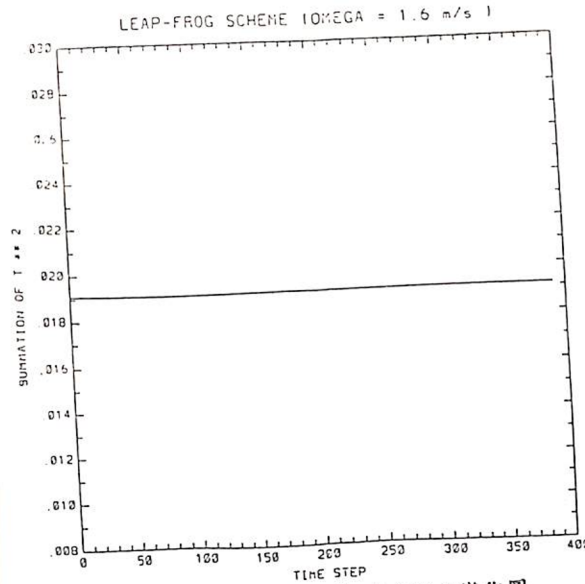


OMEGA = 1.6 m/s
ANG_HORI = -120. ANG_VERT = 30

圖九蛙跳法純量場T轉4/4圈後之結果

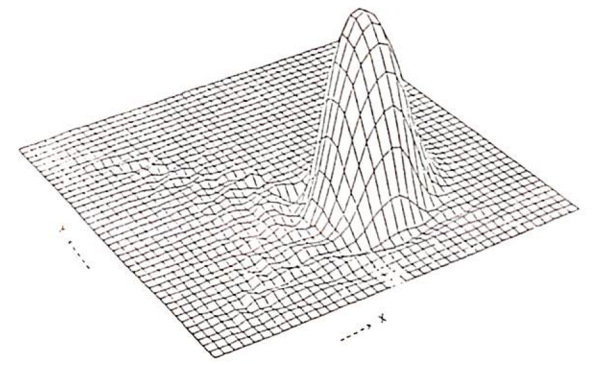


圖十蛙跳法系統最大值振幅(T_{max})隨時間之變化圖



圖十一蛙跳法系統總能量(ΣT^2)隨時間之變化圖

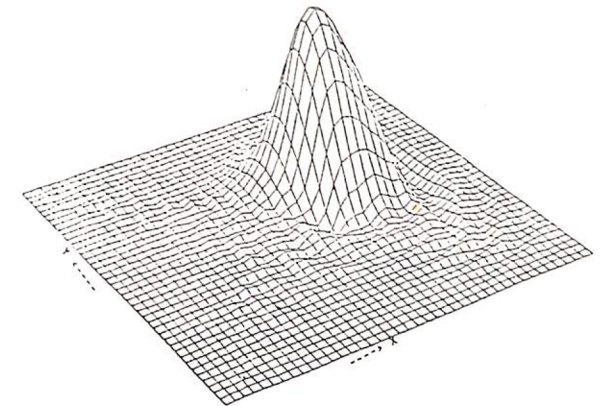
EULER - BACKWARD AT 1/4 REVOLUTION



OMEGA = 2.6 m/s
ANG_HORI = -120. ANG_VERT = 30

圖十二尤拉反向法純量場T轉1/4圈後之結果

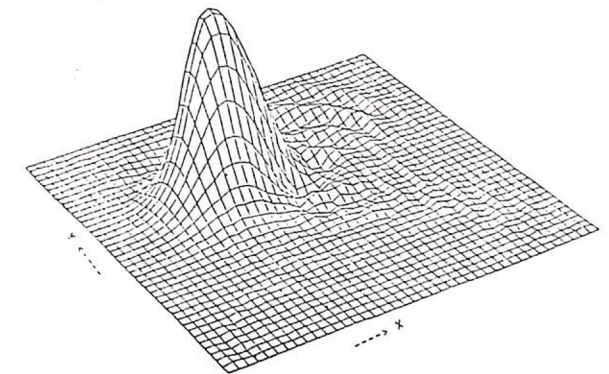
EULER - BACKWARD AT 2/4 REVOLUTION



OMEGA = 2.6 m/s
ANG_HORI = -120. ANG_VERT = 30

圖十三尤拉反向法純量場T轉2/4圈後之結果

EULER - BACKWARD AT 3/4 REVOLUTION



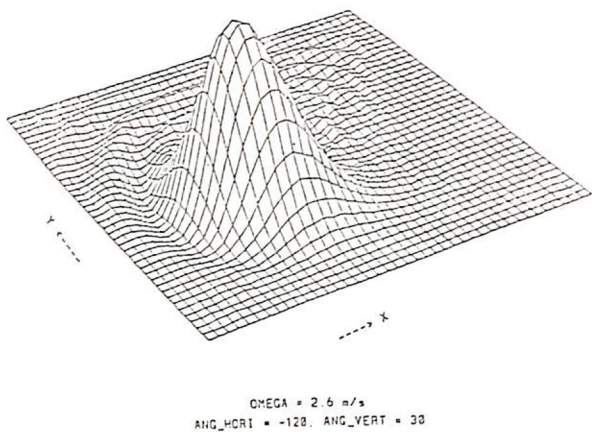
OMEGA = 2.6 m/s
ANG_HORI = -120. ANG_VERT = 30

圖十四尤拉反向法純量場T轉3/4圈後之結果

(二) 圖十二、十三、十四、十五為Euler-Backward scheme轉一圈之結果。

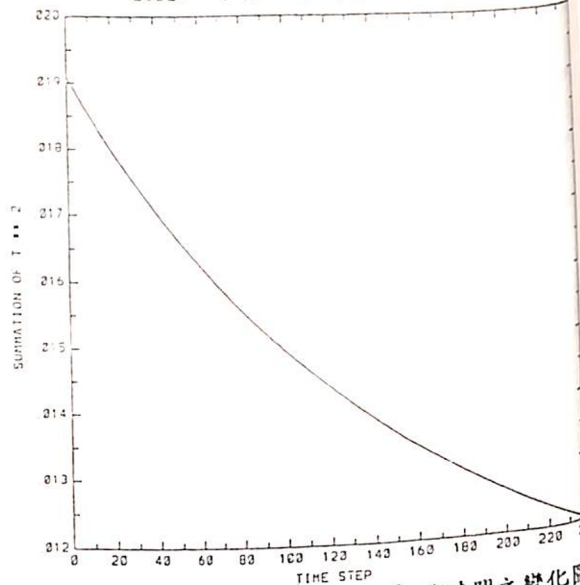
由圖中可看出運動後方之擾動(不穩定)現象比較Leap-Frog scheme產生之擾動來得小。圖十六顯示Euler-Backward scheme系統最大值振幅隨時間之變化，因為Euler-Backward scheme為二階格式(沒有計算模)，因此開始沒系統最大值振幅上升之現象，但其系統最大值振幅隨時間下降之趨勢(damping)遠較Leap-Frog scheme明顯。圖十七顯示Euler-Backward scheme之能量隨時間積分之增加會逐漸減少，這表示此法無法使能量守恆，而且流失的相當快。

EULER - BACKWARD AT ONE REVOLUTION



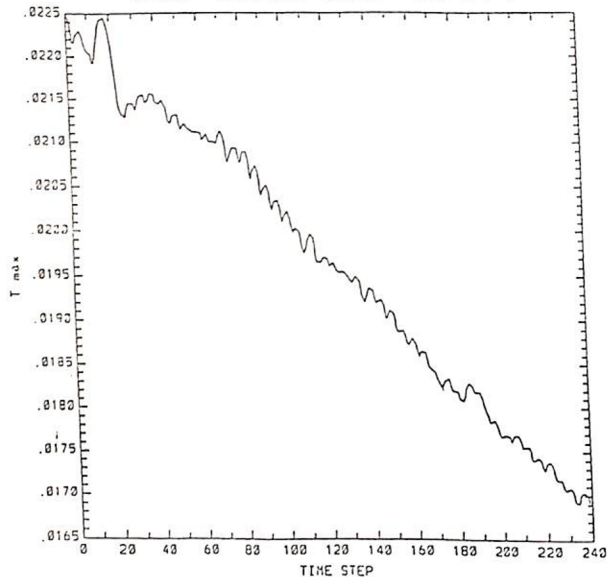
圖十五尤拉反向法純量場T轉4/4圈後之結果

EULER - BACKWARD (OMEGA = 2.6 m/s)



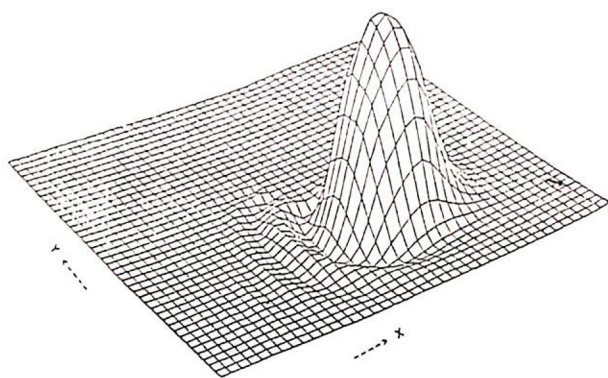
圖十七尤拉反向法系統總能量(ΣT²)隨時間之變化圖

EULER - BACKWARD (OMEGA = 2.6 m/s)



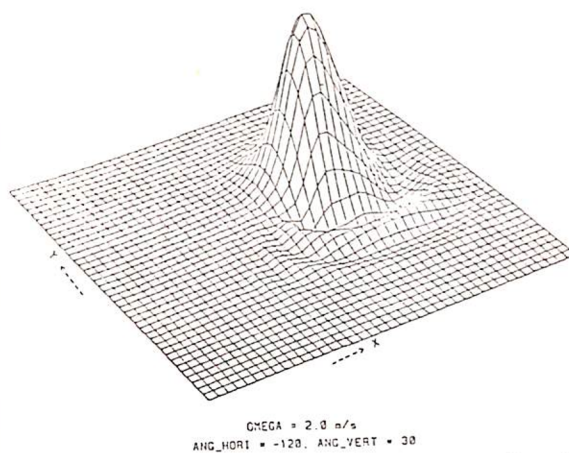
圖十六尤拉反向法系統最大值振幅(T_max)隨時間之變化圖

LAX - WENDROFF AT 1/4 REVOLUTION



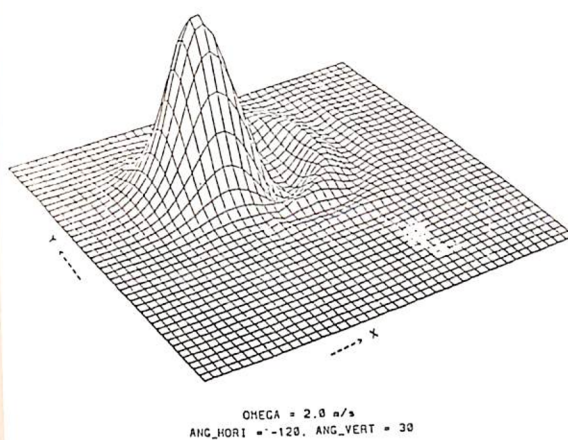
圖十八勒克斯勞德夫法方法(一)純量場T轉1/4圈後之結果

LAX - WENDROFF AT 2/4 REVOLUTION



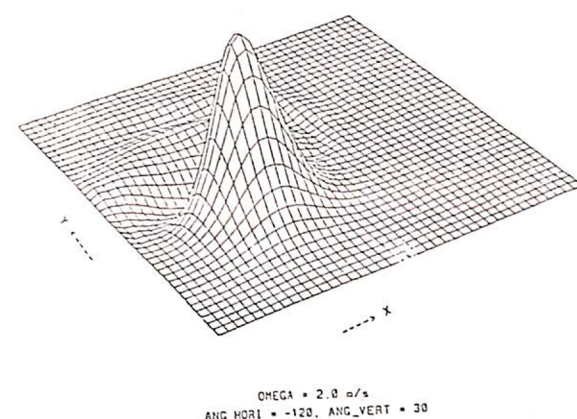
圖十九勒克斯勞德夫法方法(一)純量場T轉2/4圈後之結果

LAX - WENDROFF AT 3/4 REVOLUTION



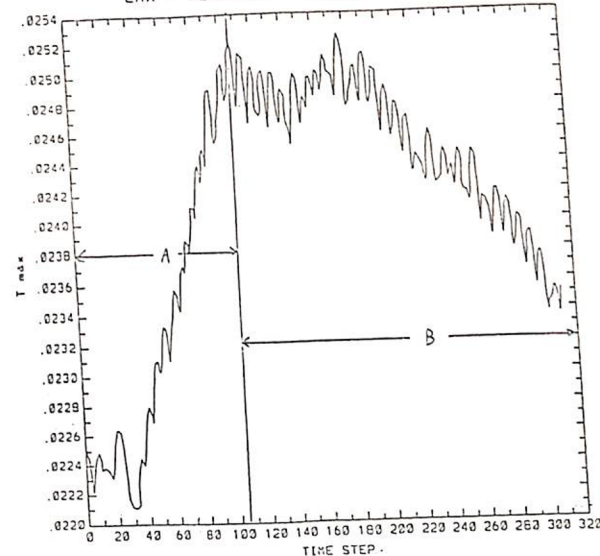
圖二十勒克斯勞德夫法方法(一)純量場T轉3/4圈後之結果

LAX - WENDROFF AT ONE REVOLUTION



圖二十一勒克斯勞德夫法方法(一)純量場T轉4/4圈後之結果

LAX - WENDROFF (OMEGA = 2.0 m/s)



圖二十二勒克斯勞德夫法方法(一)系統最大值振幅(T_max)隨時間之變化圖

(三) 圖十八、十九、二十、二十一顯示Lax-Wendroff方法一(two predictors and one corrector)轉一圈之結果。

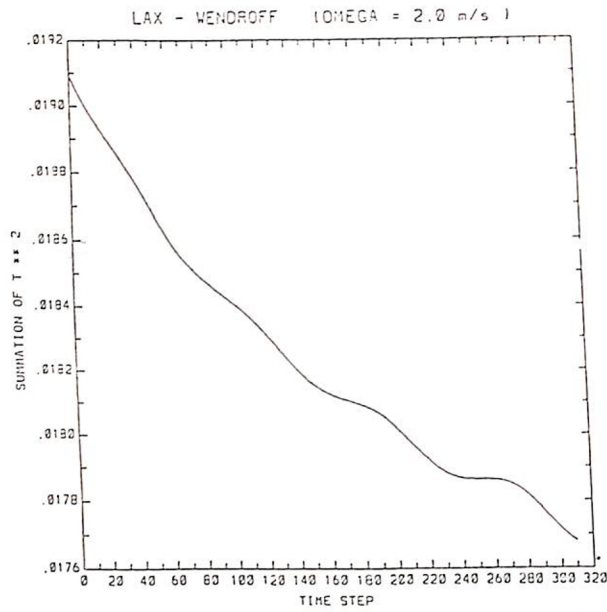
圖中顯示運動後方產生之擾動(不穩定)較Leap-Frog scheme和Euler-Backward scheme為小,且其穩定之最大角頻率Ω值較前面兩種數值格式大,而且Lax-Wendroff scheme之空間平均方式可以減低非線性項之aliasing effect,因此我們可以增加Δt之時間以節省計算機時間。圖二十二顯示Lax-Wendroff scheme系統最大值振幅在A區有明顯之增加但維持不久(遠較B區小),即開始在B區有系統最大值振幅隨時間減少之趨勢。因為我們若視

$T_{i+1/2,j}^{*n+1/2}$ 為a half-time step,那麼Lax-Wendroff scheme仍為三階格式,也有計算模之影響,因此對於predictors之初始條件須小心處理。同時比較圖十與圖二十二可看出Leap-Frog scheme之計算模影響遠較Lax-Wendroff scheme嚴重,而且其後對系統最大值振幅之damping又不若Lax-wendroff明顯。圖二十三顯示Lax-wendroff scheme的能量隨時間積分之增加也逐漸減低,但比Euler-Backward scheme減少的還慢。

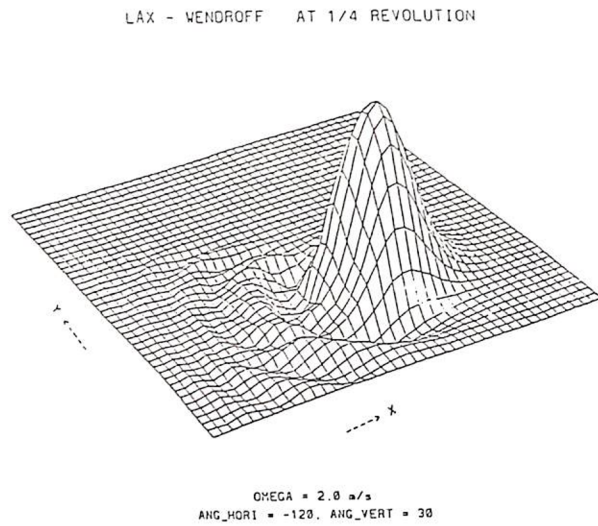
(四) 圖二十四、二十五、二十六、二十七為Lax-Wendroffschem 方法二(one predictor and one corrector)轉一圈後之結果。

由圖中所示,我們發現方法二在運動後方產生之擾動(不穩定)遠較方法一來得嚴重,而且波形的振幅和擾動振幅之比值逐漸變小,這表示方法二中能量傳遞給擾動之速度較方法一來得快。圖二十八與圖二十二比較顯示方法二計算模影響之時間較方法一小,而且方法二之系統最大振幅damping較方法一更為明顯。圖二十九顯示方法二之能量隨時間積分之流失較方法一還要小。

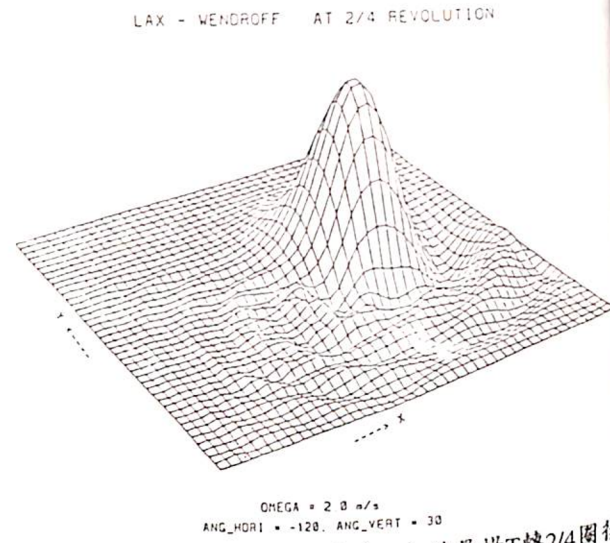
(五) 在蔡清彥等之數值天氣預報(1990)第四章中,曾以詳細之數學與物理意義,分析比較蛙跳法,尤拉反向法與勒克斯勞德夫法等數值方法在一維平流方程之應用,文中指出蛙跳法雖然能保持振幅不變,但卻有計算模存在,尤拉反向法雖無計算模存在,但其對短波無衰減效應,影響計算之穩定,而勒克斯勞德夫法之優點(有時也是其缺點)則是對短波之衰減效應遠大於長波之衰減效應,當我們討論之移動系統其物理過程之消散效應大時,勒克斯勞德夫法正好可運用來控制短波之發展。這些在一維平流方程上分析所得之結果與本文討論二維平流方程之結果亦有諸多互補呼應之效果。



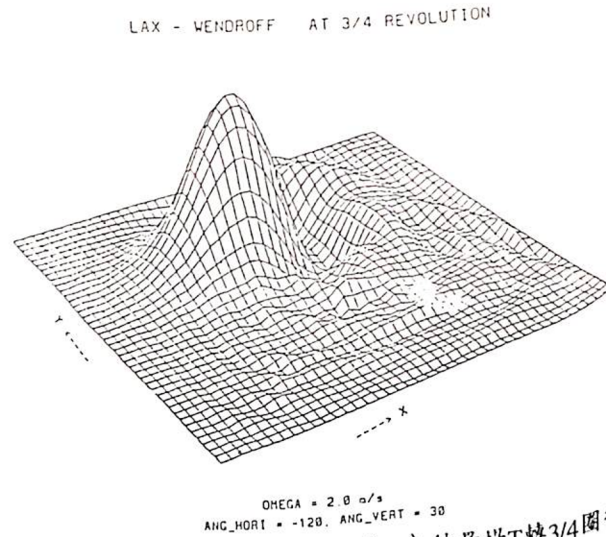
圖二十三勒克斯勞德夫法方法(一)系統總能量(ΣT^2)隨時間之變化圖



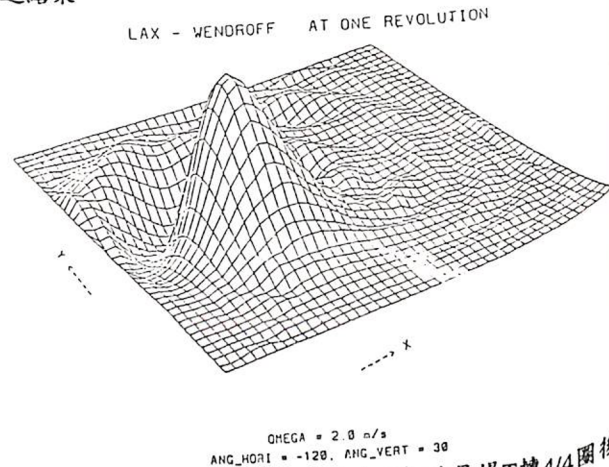
圖二十四勒克斯勞德夫法方法(二)純量場T轉1/4圈後之結果



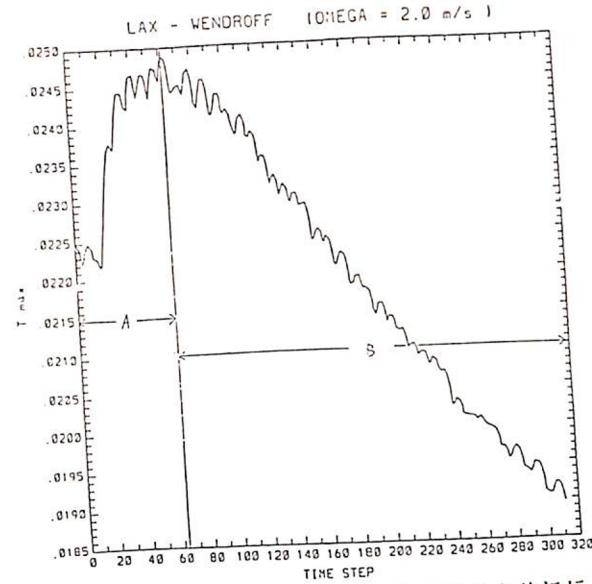
圖二十五勒克斯勞德夫法方法(二)純量場T轉2/4圈後之結果



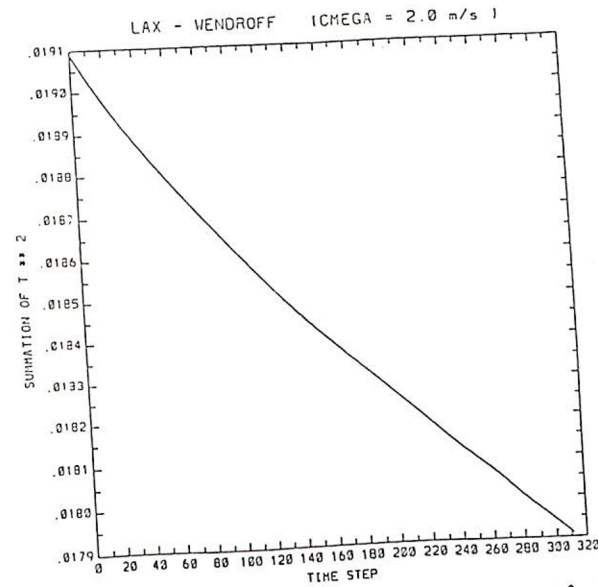
圖二十六勒克斯勞德夫法方法(二)純量場T轉3/4圈後之結果



圖二十七勒克斯勞德夫法方法(二)純量場T轉4/4圈後之結果



圖二十八勒克斯勞德夫法方法(二)系統最大值振幅(T_{max})隨時間之變化圖



圖二十九勒克斯勞德夫法方法(二)系統總能量(ΣT^2)隨時間之變化圖

五、結語

綜上所述，數值方法的運用除可彌補解析解的不足，從而推算未來的移動情形，更可借由“改變機制”的方法（如初始場及邊界場或地形效應）來深入流體分子間的變化及移動時所造成的擾動現象。唯一美中不足的是本文所採用的方法均是以網格點的型態、差分法的方式來計算流體的動向，其中的過程受制於網格點大小與時間積分步驟之長短，如是一來，網格點越密，時間步驟越短就耗費電腦的計算時間，否則即得犧牲網格間距間的資料，對於尺度較小或生命期較短的波動予以放

棄，兩者之間必須有所取捨。

在本文的探討過程中，每一種數值方法均先以穩定度條件的適合與否進行討論，其次再以立體透視圖瞭解其系統移動情形及與環境的相互作用，接著再分別以能量及振幅的變化來探討流體的移動情形，由於文中對於熱力、動力及地形等效應留在後續未來的探討課題中，是以程式設計及結果分析亦相對的簡化許多；儘管如此，吾人仍然可從前述的結果比較中，得到以下幾點結論：

- (一) 在時間積分過程中，凡用到三個時間階段的方法，則會在計算過程中產生物理模(physical mode)及計算模(computational mode)之解，其中計算模之解往往與物理模之解相位相反，容易造成對實際問題誤判。
- (二) 數值方法的計算過程中，往往為了滿足能量的守恆原理，當局部地區的振幅長大時，則必定會有其他地區的能量消耗來平衡此現象，以致降到零值界限以下的負值。這種現象若用來討論大氣中的水汽含量等問題時，即形成不實際；是以不論何種數值方法均應注意到與大氣現象是否相等。

(三) 蛙跳法中雖然能夠滿足能量守恆，但是它卻會造成顯著的擾動，影響對於移動系統的分析與追蹤。

(四) 尤拉反向法雖然不用煩惱程式所產生假值之問題，但它卻造成系統中心振幅急劇衰減，而使得能量無法守恆。

(五) 勒克斯勞德夫法雖然在運動初期造成中心振幅快速增長，但是在系統移動一段時間以後振幅的變化趨於穩定，而它雖然也有能量流失的現象，但是它的能量流失現象遠小於尤拉反向法。因此就以本文討論之三種數值方法而言，勒克斯勞德夫法大致融合了蛙跳法與尤拉反向法的優點，儘量避免了它們的缺點，是比較適合於移動天氣系統的數值方法。

六、致謝

本文之完稿承空軍氣象中心王淑貞小姐協助騰稿、繪圖謹此致謝。

七、參考文獻

蔡清彥、柯文雄、許武榮；1990 數值方法，數值天氣預報 聯經出版社，第四章。
 Courant, R., K. Friedrichs, and H. Lewy, 1928; "Uber die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik", Math. Annalen, 100, 32-74.
 Elseberry, R. L., 1979; "Applications of tropical cyclone models", Bull. Amer. Meteor. Soc., 60, 750-762.
 ---, 1984; Numerical prediction of tropical cyclone tracks, Lecture notes (3) from workshop on Numerical Weather Prediction, April 15-21, 1984, Dep't of Atmos. Sci.,

National Taiwan University, Taipei, Taiwan, ROC.

Han, Young-June., 1988; Modelling and simulation of the general circulation of the ocean, Physically-based modelling and simulation of climate and climate change, NATO ASI Series, Kluwer Academic Publishers, 465-508.

Haltiner, G. J., 1971; Numerical weather prediction, New York, Wiley, 317 pp.

----, and R. T. Williams, 1979; Numerical prediction and dynamic meteorology, chap 1-3.

Kuo, H. L., 1965; "On formation and intensification of tropical cyclones through latent heat release by cumulus convection", J. Atmos. Sci., 22, 40-63.

Lax, P.D., and B. Wendroff, 1960; "Systems of conservation laws", Commun., Pure Appl. Math., 13 217-237.

Application of the Numerical Method in Two Dimensional Moving Weather System

Chuan-Hsin Yu An-Cherng Yih
I-Fa Wang Pei-Chen Chang

ABSTRACT

To solve an equation by using different numerical methods, it will cause quite different results due to the different mechanism. Some of them satisfy the conservation of energy. However, the relationship is poor between the initial condition and numerical solution. On the other hand, some of them conserve the energy poorly, they may have good relationship between initial condition and numerical solution. Therefore, the goal of this research to find an adequate numerical scheme applying to solve the 2-D moving system.

Using the 2-D advection equation $\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = 0$ as an example, we are going to apply three different numerical schemes: (1) Leap-Frog scheme (2) Euler-Backward scheme and (3) Lax-Wendroff scheme to solve the equation under the conditions of: (1) the X-Y domain plane is equally divided into four quartrants; (2) a scaler field of T considered as a warm temperature ridge is located at the third quartrant and is moving around the original point circularly; and (3) the boundary condition is set to $T(x=0 \text{ and } 1, y=0 \text{ and } 1, t) = 0$ everywhere.

By comparing these three numerical schemes, we find:

(1) The energy is conserved in the Leap-Frog scheme. However, it causes a series of wake behind the moving system. In this case, the amplitude is going up and down periodically and significantly and the result may easily mislead us when the weather phenomenon changes dramatically in a short time period.

(2) The numerical method of the Euler-Backward scheme is a two time level scheme. There is no computational mode to cause our misjudgment to the weather phenomenon. However, this scheme will consume the energy of the moving system very quickly.

(3) The advantage of the Lax-Wendroff scheme is try to minimize the disadvantage of both the Leap-Frog scheme and the Euler-Backward scheme. Although the amplitude of the moving system is growing up quickly at the beginning stage, it will back to the stable condition immediately. On the other hand, the Lax-Wendroff scheme can't conserve the energy during the procedure of time integration. However, its energy loss is much less than the Euler-Backward scheme.

Therefore, to solve a moving weather system by using the Lax-Wendroff scheme is better than the Leap-Frog scheme and the Euler-Backward scheme.