

天氣吸引子維度的估算

李永安
國立中央大學
大氣物理研究所

(中華民國七十九年八月二十八日收稿；七十九年十二月一日定稿)

摘 要

利用台北和恆春80年的每天平均地面氣壓和溫度資料，經由時間延遲方法我們可以重組局部天氣系統在相空間的演化路徑。利用相關函數和維度的關係，我們可以計算出天氣系統在不同嵌入維度的重組相空間裡的相關維度。當相關維度隨著嵌入維度的增加達到飽和時，從這個飽和維度我們就可以估計出天氣吸引子的維度。

從計算的結果中我們發現：(1). 天氣具有一個低維度的吸引子(可能低於10)，(2). 資料長度不足會低估吸引子的維度，(3). 時間延遲參數的選擇會影響吸引子維度的估計，甚至造成相關維度無法隨著嵌入維度的增加達到飽和。另一方面我們也發現從溫度資料計算的天氣吸引子維度，一般而言都比由氣壓資料求得的高一個維度左右。我們懷疑這差異可能與天氣吸引子的局部不均勻性質有關係。

關鍵詞：吸引子，相關函數，相關維度，嵌入，動力系統，相空間重組

一、前 言

長久以來人們一直夢想著有一天可以很準確的預報未來任何一刻的天氣。然而自從Lorenz (1963)發現在非線性、決定性(deterministic)的耗散(dissipated)動力系統(dynamic system)中具有非週期性的行為以後，這個夢想就完全破滅了。人們開始認識到天氣的演化雖然可以由一組物理定律來決定，但是因為我們對於控制系統的物理機制並不完全明瞭，以至於真實的系統與我們所用的近似模式之間會有誤差。這種誤差在非線性交互作用之下會逐漸的被放大，造成天氣系統預報能力(predictability)的消失。更重要的，由於大氣是流體，我們不可能很準確的觀測到任一時刻整個大氣的真實狀態。

起始條件的誤差是我們無法避免的。在非線性交互作用下，這種誤差也會被放大而造成預報能力的消失。這些現象我們可以由近二十年來數值天氣預報的發展過程中得到証實：科技的進步使得我們可以使用更複雜、更接近於實際大氣的模式來預報天氣。短期天氣預報方面已做得相當成功。但由於模式的誤差會隨時間放大，以至於我們對於一星期以後的天氣仍沒有太多的預報能力。因此要改進我們對於天氣乃至於氣候的預報能力，除了必須要加強對於天氣現象的物理過程的了解和預報模式的改進外，我們還需要由實際天氣的演化過程中來加深我們對於天氣這個動力系統的了解，進而從中找出因應之道。

動力系統的研究在近二十年有非常多的進步。現

在我們已了解到非線性、決定性的耗散動力系統之所以會有非週期性行爲(混沌行爲, chaotic behavior)的產生與動力系統本身之吸引子(attractor)的性質有非常密切的關係。所謂吸引子就是系統在耗散作用下, 因為能量會隨時間減少, 由不同的起始條件給定的演化路徑所趨向的一個特定狀態。從相空間(Phase space)上來看, 因為系統的能量是有限的, 它在相空間的運動軌跡也就被限制在有限的體積裡。在耗散的作用下, 系統的能量會逐漸的減少, 因此它的運動軌跡隨著時間的增加會趨向吸引子, 而它在相空間的體積也就會逐漸的趨向於零。如果系統的體積在相空間的任何方向都是收縮的或者不變(Lyapounov exponents, $\lambda \leq 0$), 因為不論何種原因所引起的誤差都會隨時間減小或者不變, 因此這個系統的預報度可以是無限的。但是當系統有非線性交互作用的情況下, 雖然耗散仍會使吸引子在相空間的體積趨向於零, 然而體積在各方向並不一定都必需是收縮的。它只要滿足收縮的速度比伸張的速度快就可以了。由於系統的能量有限, 它在相空間的運動軌跡也就只能局限在有限的區域裡。所以如果軌跡在某些方向有伸張的情況(Lyapounov exponents, $\lambda > 0$), 因為它不可能無限延伸, 因此必需產生折合(folding)的現象。系統的吸引子在相空間的結構也就在這種收縮、伸張和折合的作用下產生層狀結構(Layer structure)。由於從不同的起始條件給定的運動軌跡會隨著時間的增加而進入不同的層, 以至於微小的起始差異最終演變放大成與隨機變化無異。在這種情況下, 系統的可預報度就變得非常有限。這種對於起始條件非常敏感(sensitive to initial conditions)的吸引子稱為奇異吸引子(strange attractor)。奇異吸引子因具有無限層狀結構而不具體積, 它的幾何特性並無法用一般的整數維度來表示。Mandelbrot (1974, 1983), 把整數維度的觀念推廣到實數範圍, 提出用碎度(Fractal dimension)的觀念來比較準確的描述像海岸線地形、雲的形狀等大部分自然現象的幾何維度。因此我們可以用碎度來描述奇異吸引子的幾何特性。

既然動力系統的行爲與吸引子的性質有很大的關係, 我們所存在的天氣動力系統是否也具有吸引子呢? 如果有, 那它是否是一個奇異吸引子呢? 從實際觀測資料來看, 任何的初始條件都會趨向於氣候平均狀態, 天氣系統應該是存在著吸引子。另一

方面, 實際的預報經驗告訴我們, 天氣只具有有限的預報度。因此, 如果天氣有吸引子, 那麼它應該是個奇異吸引子。要真正回答這些問題, 我們只能由實際的觀測資料結合動力系統的理论嘗試找出實際天氣系統是否具有吸引子的證據。

近十年來在非線性系統的研究有一個重大的突破, 就是發展了一套利用時間序列資料來重組動力系統在相空間的演化路徑的方法。這套方法使得科學家們得以利用觀測資料來研究實際動力系統的特徵。在氣象方面, Nicolis and Nicolis (1984, 1985) 首先應用這套方法於深海岩層 $\delta^{18}O$ 同位素的時間序列資料來研究氣候。他們發現地球氣候具有低維度(3左右)的吸引子, 同時氣候的可預報度的時間大約有3萬年左右。在這之後Fraedrich (1986, 1987), Essex et al. (1987), Hense (1987), Tsonis and Elsner (1988) 和Keppen and Nicolis (1989) 也利用測站觀測資料的時間序列來估計天氣吸引子的維度。他們的結果都顯示天氣具有低維度(< 9)的吸引子。大陸方面也有學者利用類似的方法做研究。Yang and Chan (1989) 分析大溪地和達爾文的資料, 發現ENSO的可預報度大約只有一年左右。

利用時間序列重組動力系統來計算吸引子的維度和可預報度的方法需要很長的資料才能得到比較可靠的估計(Mayer-Kress, 1986)。上述所有的研究, 因為所用的資料並不很夠, 因此他們的結論仍有爭議。本文的目的, 一方面是希望藉由較長的觀測資料來估計天氣吸引子的維度並且驗證上述研究的結論, 另一方面也希望藉由本文的發表吸引更多國內的研究者投入這方面的研究。

本文共分為四節: 第一節是前言; 第二節是針對利用時間序列重組相空間和吸引子維度的計算方法與基本理論做一個簡單的介紹; 第三節是我們做的分析和結果; 第四節是討論。

二、研究方法

一個動力系統如果有 n 個時間變數, 在數學上我們可以用 n 個一階常微分方程式來描述它,

$$\dot{x}_j = f_j(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

那麼系統的時間演化過程就可以用 $x_j, j = 1, \dots, n$, 組成的 n 維相空間的路徑表示出來。如果系統是耗

散的，所有初始值落在吸引盆地的路徑都會被吸引到吸引子，而吸引子的維度 d 一定小於相空間的維度 ($d < n$)。在前言中我們已指出吸引子的特性和系統的行爲有十分密切的關係。由於，一般而言，觀測資料所能提供的大多限於系統中少數幾個變數的時間序列，我們要如何從中萃取吸引子的特性呢？Parkard et al. 在1980提出了一個重組相空間的方法，使得我們可以利用觀測資料來研究實際動力系統的特性。以下是相空間重組的方法和吸引子維度的計算方法的簡介。

a、相空間重組(phase space reconstruction)的方法

假如一個動力系統可以用(1)式來表示，那麼系統在由 x_1, x_2, \dots, x_n 所組成的 n 維相空間中的演化路徑可以用相空間的位置向量，

$$\mathbf{x}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}, \quad (2)$$

來描述。由於(1)式這個一階常微分方程組也可以經由微分、代入消去的方法簡化成其中一個變數，例如 x_1 的 n 階常微分方程式，

$$x_1^{(n)}(t) = F\{x_1(t), x_1'(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t)\} \quad (3)$$

同樣的，我們可以把系統的演化用一個由 $x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}$ 所組成的 n 維相空間的路徑來描述。因此系統在這個相空間的路徑就可由位置向量，

$$\mathbf{x}_1^{(n)}(t) = \{x_1(t), x_1'(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t)\} \quad (4)$$

來決定。因為(1)和(3)代表同樣的系統，因此從相空間 x_1, x_2, \dots, x_n 轉換到相空間 $x_1, x_1', \dots, x_1^{(n-1)}$ 並不會失去任何有關系統演化的訊息。這就是為甚麼我們可以由單一變數的時間序列來重組系統在相空間的演化路徑的理論基礎。Ruelle (1981) 進一步指出，事實上我們可以用時間延遲坐標 $x_1(t), x_1(t+\tau), \dots, x_1(t+(n-1)\tau)$ 來代替 $x_1(t), x_1'(t), \dots, x_1^{(n-1)}(t)$ ， τ 是延遲時間常數(time lag)。如此我們就可以把系統嵌入在一個由 $x_1(t), x_1(t+\tau), \dots, x_1(t+(n-1)\tau)$ 所組成的 n 維相空間裡。而系統在相空間的位置向量就可改寫成

$$\mathbf{x}_1(t) = \{x_1(t), x_1(t+\tau), \dots, x_1(t+(n-1)\tau)\}, \quad (5)$$

這種形式在實際的應用上是十分方便的。因為對一個離散 (discrete) 的觀測時間序列， $x(t)$ ，而言，時間延遲變數 $x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(n-1)\tau)$ 遠比 $x, x', \dots, x^{(n-1)}$ 容易得到。不過，在利用時間延遲坐

標重組相空間時，要特別注意時間延遲常數 τ 的選擇。因為 $x, x', \dots, x^{(n-1)}$ 是線性獨立的，因此在 τ 的選擇上也必需儘量使得 $x(t), x(t+\tau), \dots, x(t+(n-1)\tau)$ 愈線性獨立愈好，否則系統在相空間的結構很容易在坐標轉換過程中被扭曲了。

由於大氣是流體，在空間上具有連續性，因此如果天氣動力系統以(1)式來表示，那麼理論上我們需要用無限的正交模才能描述天氣的複雜時空結構。但是如果天氣具有吸引子，而且它的維度又是有限時，這表示系統中只有有限的模是活躍的。我們實際上只需要用這有限維度的系統就足以描述天氣系統的演化。因此接下來我們就要介紹如何從重組的相空間裡判斷系統是否具有吸引子和吸引子維度的估算。

b、維度

在傳統上我們所謂的維度都是指拓樸學上的維度 (topological dimension)。由於這種維度是整數，它並不能準確的描述比較複雜或具有不連續性的形態的維度。因此Mandelbrot (1974, 1983) 把整個維度的觀念推廣到實數範圍，提出了所謂碎度 (fractal dimension) 的觀念來比較正確的描述如海岸線，地形，雲的形狀等複雜形態的幾何維度。在文獻上碎度的定義和計算方法有很多 (Fraedrich, 1986, Schuster, 1984)，在這裡我們只就相關維度 (correlation dimension; Grassberger and Procaccia, 1983a, b) 的定義和計算做陳述。

首先我們定義相關函數，

$$C(r) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \Theta(r - |x_i - x_j|), \quad (6)$$

在此 N 是相空間中所有點的總數。 $\Theta(u)$ 是Heaviside函數，有 $u > 0$, $\Theta(u) = 1$ 和 $u < 0$, $\Theta(u) = 0$ 的特性。 $|x_i - x_j|$ 是相空間中兩點之間的距離， r 是臨界距離。所以相關函數所描述的是相空間中兩點距離小於 r 的對數隨著臨界距離 r 增加而增加的情況。當 $N \rightarrow \infty$ 或 $r \rightarrow 0$ 時，相關函數與臨界距離有下列關係

$$C(r) \approx r^d \quad (7)$$

d 是相關維度。因此

$$d \cong \ln C(r) / \ln r \quad (8)$$

在實際應用上，由於我們並不知道天氣系統的維度，因此我們必需在不同的重組相空間裡計算出相對應的相關維度。由嵌入定理(embedding theorem; Taken, 1981)我們知道一個 n 維相空間裡演化的 d 維體系(例如 n 維動力系統的 d 維吸引子)可以被嵌入在一個 $2d+1$ 的相空間裡。因此當我們增加重組相空間的維度，相關維度不再增加而趨向一飽和值時，這個飽和值就是系統吸引子的相關維度。在真正計算時，有一點值得注意：對每一個 m 值而言，在求相關函數 $C(r)$ 時，我們至少要計算 $N^2/2$ 個兩點間距離。如果 N 太大時，所需要的CPU時間會很多。

三、分析與結果

這一節中我們利用上節所介紹的方法來分析實際的觀測資料。所用的資料是臺北與恆春80年(1910-1989)的每日平均海平面氣壓與溫度。我們實際計算吸引子維度的步驟如下：

- 一、選定時間延遲常數 τ ，的值；
- 二、利用觀測資料的時間序列與時間延遲坐標來重組天氣系統在 m 維嵌入相空間的路徑；
- 三、計算相關函數 $C(r)$ 隨臨界距離 r 和嵌入相空間維度 m 的變化；
- 四、在固定的 m 值取 $\ln C(r)$ 隨 $\ln r$ 呈近似線性變化的區域，利用最小方差(least square fit)求出系統在 m 維相空間的相關維度 d ；
- 五、畫出相關維度 d 隨嵌入維度 m 變化的圖。

如果 d 會達到飽和，也就是說當 $d = d_\infty$ 時， d 就不再隨 m 增加而增加，那麼 d_∞ 就是我們的天氣吸引子的相關維度。以下就是我們分別對氣壓與溫度資料所做的分析結果。

a、氣壓資料

爲了要了解不同的時間延遲常數 τ 是否會影響天

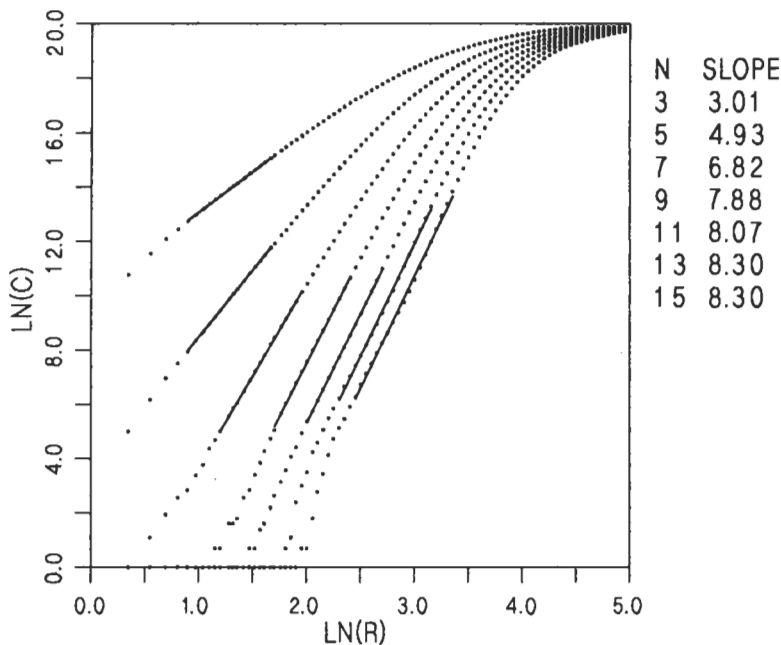


圖1 $\tau = 3$ 時利用恆春的氣壓資料得到的，在不同的 m 值，相關函數的 $\ln C(r)$ 隨臨界距離的 $\ln r$ 的變化圖。

氣吸引子維度的估算，我們分別就 $\tau = 1, 3, 6, 10, 15$ 用80年的資料來計算。圖1是 $\tau = 3$ 時利用恆春資料得到的，在不同的 m 值，相關函數的 $\ln C(r)$ 隨臨界距離的 $\ln r$ 的變化圖。首先我們看到在 $\ln r$ 大時，對所有的 m 值而言， $\ln C(r)$ 都趨近於飽和值。這是因為 r 越大，兩點間的距離小於 r 的對數就越多，最後都會趨近於 N^2 。另外在 τ 小時，由於有噪音(noise)存在， $\ln C(r)$ 與 $\ln r$ 之間的關係會呈現不規則的變化。因此在求每個 m 維嵌入相空間的相關維度時，我們只能取 $\ln C(r)$ 隨 $\ln r$ 呈線性變化的部分

來計算斜率。圖2與圖3是恆春與臺北在不同的 τ 值時，相關維度 d 隨嵌入相空間維度 m 變化的情形。從圖中我們很清楚的看到，除了 $\tau = 1$ 外，對其它的 τ 值而言，相關維度 d 在 $m = 9$ 左右就達到飽和。這顯示，從臺灣的資料來分析，天氣具有低維度的吸引子。另外我們也看到了 d_{∞} 隨著 τ 的增加有遞減的趨勢。這現象是否有實際的物理意義隱含其中目前尚不清楚。可以肯定的是 τ 的選擇會影響吸引子維度的估計，甚至造成相關維度無法隨嵌入相空間維度的增加而收斂。

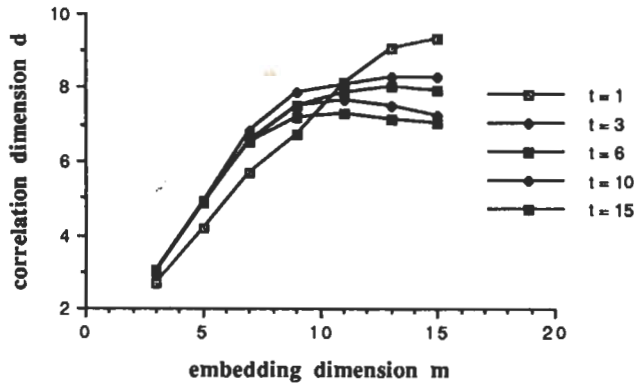


圖2 利用恆春的氣壓資料得到的，在 $\tau = 1, 3, 6, 10, 15$ 時，相關維度 d 隨嵌入相空間維度 m 變化的情形。

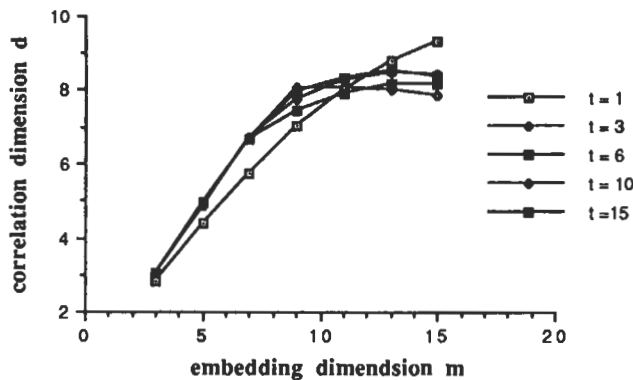


圖3 除了是利用臺北的氣壓資料外，餘同圖2。

爲了要了解不同的資料長度可能產生的影響，我們將資料分成20, 40, 60, 80年，取 $\tau = 3$ 來估算吸引子的維度。圖4與圖5是恆春與臺北，在不同的資料長度時， d 隨 m 變化的關係。我們發現，對所有的資料長度而言，相關維度都會收斂到 d_{∞} 。而且隨著資料長度的增加， d_{∞} 也會跟著增加。這顯示了如果所使用的資料長度不夠，吸引子的維度會被低估。在圖中我們還看到了 d_{∞} 的增加隨資料長度的增加有飽和的趨勢。這趨勢告訴我們，也許80年的資料仍會低估天氣吸引子的維度，但是由這資料所估

計的 d_{∞} 應該已接近實際的相關維度值。

b、溫度資料

因爲一個80年的時間序列至少有 $N = 365 \times 80 = 29,200$ 個資料點，計算 $C(r)$ 所需要的CPU時間太多了。所以，對於溫度資料，我們只計算 $\tau = 3$ 和10時的相關維度。圖6與圖7是利用恆春與臺北的80年資料所得到的 d 隨 m 變化的關係圖。很明顯的我們看到由溫度所得的相關維度對於 τ 更敏感。在 $\tau = 3$ 時，恆春的 d 值在 $m = 13$ 時近乎收斂，可是

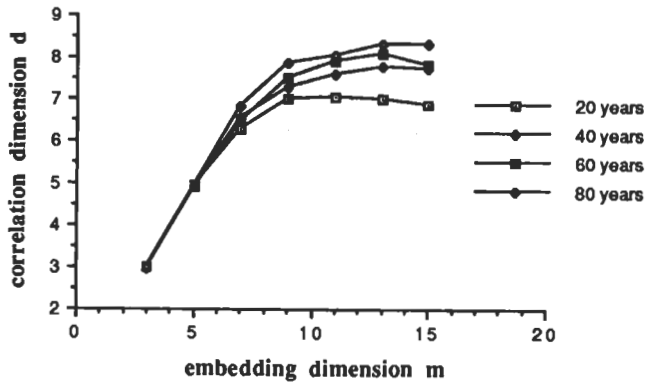


圖4 恆春在 $\tau = 3$ 和資料長度為20, 40, 60, 80年時， d 隨 m 變化的關係圖。

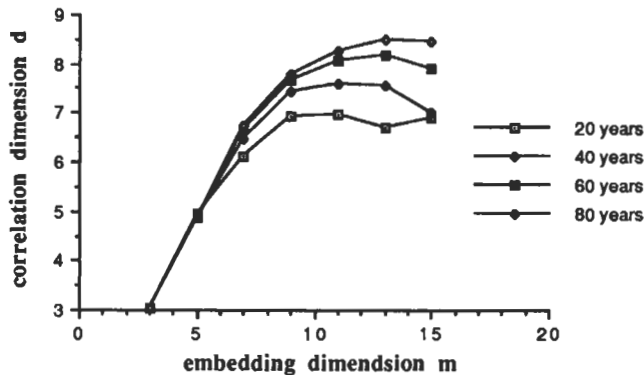


圖5 除是臺北外，餘同圖4。

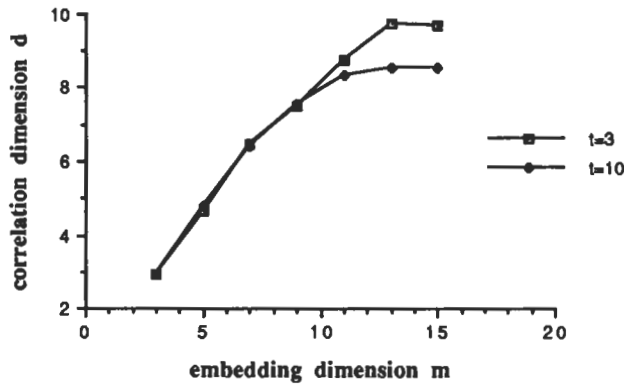


圖6 利用恆春80年的溫度資料，在 $\tau = 3, 10$ 時，所得的 d 隨 m 變化的關係圖。

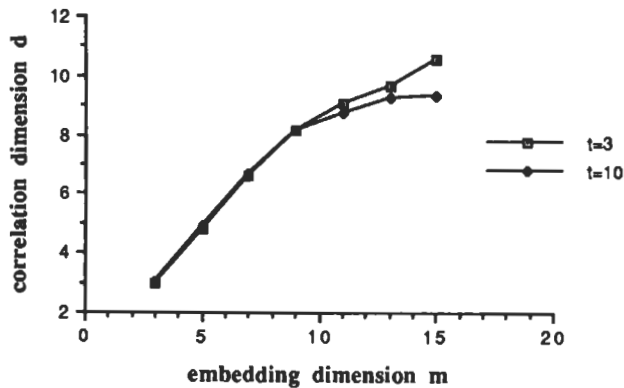


圖7 除是臺北外，餘同圖6。

臺北的 d 值一直到 $m = 15$ 都沒有收斂。當 $\tau = 10$ 時，恆春與臺北的 d 值都有飽和(恆春 $d_{\infty} = 8.6$ ，臺北 $d_{\infty} = 9.3$)。與氣壓資料在 $\tau = 10$ 時所得的 d_{∞} 值(臺北8.0，恆春7.6)比較，不僅兩地之間的 d_{∞} 值差異大，而且同一地區由不同資料所得的 d_{∞} 值差異更大。我們懷疑這些差異可能與天氣吸引子的局部不均勻性質有關係，不過實際的原因仍有待查證。

- 1、天氣具有低維度的吸引子($d_{\infty} < 10$)；
- 2、資料長度不夠會低估吸引子的維度；
- 3、不同時間延遲常數 τ 的選擇會影響吸引子維度的估計，甚至造成相關維度無法隨嵌入相空間維度的增加而收斂。

另外我們也發現由溫度所估計的吸引子維度比由氣壓估計的要高一個維度左右。我們懷疑這可能與天氣吸引子的局部不均勻性質有關係。

由於相關函數(6)式的計算太耗費CPU時間，我們所能分析的情況極為有限。而且(6)式是一個平均

四、討 論

從上節的分析中我們得到下列的結論：

狀態，並不能描述相關函數的不均勻性。因此在後續的研究中我們將採用其他的方法(參見Mayer-Kress, 1986)來改進我們的計算效率和估計吸引子在相空間的不均勻性。另一方面，相空間重組方法並不限於吸引子維度的估計而已。事實上它還可被應用於可預報度的估計，觀測資料噪音的過濾和預報(Farmer et al, 1987; Kostelich and Yorke, 1989)。這些應用也都是我們未來值得研究的方向。

誌 謝

感謝邵耀亭先生之資料處理、分析與計算。感謝國立中央大學大氣物理研究所、中央氣象局和國科會提供Convex電腦的支援。本文在國科會專案計畫NSC79-0202-M008-19支援下完成。

參考文獻

- Essex, C., T. Lookman, and M. A. H. Neremberg., 1987: The climate attractor over short time scales. *Nature*, 326, 64-66.
- Farmer, J. D. and J. J. Sidorowich, 1987: Predicting chaotic time series. *Phy. Rev. Lett.*, 59, 845-848.
- Fraedrich, K., 1986: Estimating the dimensions of weather and climate attractors. *J. Atmos. Sci.*, 432, 419-432.
- Fraedrich, K., 1987: Estimating weather and climate predictability on attractors. *J. Atmos. Sci.*, 44, 722-728.
- Grassberger, P., and I. Procaccia, 1983a: Characterization of strange attractor. *Phy. Rev. Lett.*, 50, 346-349.
- Grassberger, P., and I. Procaccia, 1983b: Measuring the strangeness of strange attractors. *Physica*, 9D, 189-208.
- Hense, A., 1987: On the possible existence of a strange attractor for the southern oscillation. *Beitr. Phys. Atmos.*, 60, 34-47.
- Keppenne, C. L., and Nicolis, C., 1989: Global properties and local structure of the weather attractor over western Europe. *J. Atmos. Sci.*, 46, 2356-2370.
- Kostelich, E. J. and J. A. Yorke, 1989: Using dynamic embedding methods to analyze experimental data. *Contemporary Mathematics*, 99, 307-312.
- Lorenz, E. N., 1963: Deterministic nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141.
- Mandelbrot, B. B., 1974: Intermittent turbulence in self-similar cascades: Divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. Fluid Mech.*, 62, 331-352.
- Mandelbrot, B. B., 1983: *The Fractal Geometry of Nature*. Freeman, 468 pp.
- Mayer-Kress, G., Ed., 1986: *Dimensions and entropies in chaotic systems*. Springer-Verlag, 256 pp.
- Nicolis, C. and Nicolis, G., 1984: Is there a climatic attractor? *Nature*, 311, 529-532.
- Nicolis, C. and Nicolis, G., 1985: Reconstruction of the dynamics of the climate system from time-series data. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 83, 536-540.
- Packard, N. H., J. P. Crutchfield, J. D. Farmer, and R. S. Shaw, 1980: Geometry from a time series. *Phys. Rev. Lett.*, 45, 712-716.
- Ruelle, D., 1981: Chemical kinetics and differentiable dynamical systems. *Nonlinear phenomena in chemical dynamics*, A. Pacault and C. Vidal. Berlin, Eds. Springer-Verlag, 30-37.
- Schuster, H. G., 1984: *Deterministic Chaos*. Physik-Verlag, 220 pp.

Takens, F., 1981: Detecting strange attractors in turbulence. *Dynamical systems and turbulence*. Warwick, Springer-Verlag, 366-381.

Tsonis, A. A., and J. B. Elsner, 1988: The weather

attractor over very short time scales. *Nature*, 333, 545-547.

Yang, P., and Chen, L., 1989: On the predicability of El Nino / southern oscillation. *Chinese J. of Atmos. Sci.*, 14, 77-86.

Estimation the Dimension of Weather Attractor

Yung-An Lee

Institute of Atmospheric Physics
National Central University
Chung-Li, 32054

(manuscript received 28 August 1990; in final form 1 December 1990)

Abstract

By using time-lag coordinates we can reconstruct the evolution of weather dynamic system in embedding phase spaces from 80 year's observed daily averaged surface pressure and temperature data at Taipei and Heng-Chun. From the relation between correlation function and dimension we can calculate the correlation dimension in different embedding spaces. If the correlation dimension dose not increase with the increasing embedding dimension, we say there exists an attractor in the weather system. The dimension of the attractor is the saturated value of the correlation dimension.

In this study, we found that: (1). there exists a low dimensional (possibly less than 10) attractor in the weather dynamic system; (2). the dimension of the attractor may be underestimated due to insufficient data and (3). the choice of time-lag constant may affect the saturated value of the correlation dimension, thus may affect our estimation of the dimension of the weather attractor. Furthermore, we found that the saturated value of correlation dimension derived from temperature data are, in general, one degree larger than those from pressure data. We suspect that this phenomenon may be caused by the local inhomogeneous properties of the weather attractor.

Key words: attractor, correlation function, correlation dimension, embedding, dynamic system, phase space reconstruction.