其他

五十年度中山獎學金留學考試理論氣象學試題及解答

章燕禧

此次中山獎學金留學考試於九月二十二及二十三兩日在臺北市師範大學舉行，報名者凡五百餘人，因事先必須教育部留學考試及格後方准參加此次考試，故實際應考者僅一百七十人。參加氣象學門考試者僅有四人，而本軍則佔有三人之多。

理論氣象學試題比較新穎，共計四題，兩小時完卷，其中有三題屬於輻散與旋率方面。作者不揣愚陋，特爲解答刊出，俾供我氣象工作人員而有志參加此等考試者的參考。解答中如有錯誤或不嚴正之處，尚請專家不吝指正。

（一）水平運動流體，x方向的分速 $u=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$，y 方向的分速 $v=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，試證除 (0,0) 點外，水平輻散 (Divergence) 與鉛直旋率 (Vorticity) 皆爲零。

【解】u與v對x與y取偏導式，得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$$

故知水平輻散 $\vec{\nabla}_H\cdot\vec{V}=\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$

鉛直旋率 $\vec{\nabla}\times\vec{V}\cdot\vec{k}=\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$

即爲所證。

（二）在等溫大氣中，海平面氣壓及位溫各爲 p_0 與 θ_0，高度 z 處各爲 p 與 θ，試證當 $z=\dfrac{C_PT}{g}$ 時，$\theta=\theta_0e$，e 爲自然對數的底。

【解】 (i) 先求在等溫大氣中，氣壓 (p) 與高度 (z) 的關係式。

流體靜力方程式 $dp=-\rho g dz$ ……………………(1)

狀態方程式 $p=\rho RT$ ……………………(2)

(1)/(2) 得 $\dfrac{dp}{p}=-\dfrac{g}{RT}dz$

設海面氣壓爲 p_0，高度z處氣壓爲p，由假設T＝常數，將上式積分

$$\int_{P_0}^{P}\frac{dp}{P}=-\frac{g}{RT}\int_0^z dz$$

亦即 $\ln\dfrac{p}{p_0}=-\dfrac{gz}{RT}$ ……………………(3)

(ii) 再求出在絕熱程序下，氣壓 (p) 與溫度 (T) 的關係式，

熱力學第一定律 $dQ=C_P dT-\dfrac{dp}{\rho}$，絕熱時 $dQ=0$，此式可寫爲

$$C_P\,dT=\frac{dp}{\rho}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

(2)×(4) 得 $\dfrac{dp}{p}=\dfrac{C_P}{R}\dfrac{dT}{T}$

積分 $\displaystyle\int_{P_0}^{P}\frac{dp}{p}=\frac{C_P}{R}\int_{T_0}^{T}\frac{dT}{T}$

亦即 $\ln\dfrac{p}{p_0}=\dfrac{C_P}{R}\ln\dfrac{T}{T_0}$ …………(5)

(iii) 按位溫的定義及 (5) 式可得出地面的位溫 (θ_0) 與高度z處的位溫 (θ) 各爲

$$\ln\frac{1000}{p_0}=\frac{C_P}{R}\ln\frac{\theta_0}{T_0}\ \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

與 $\ln\dfrac{1000}{p}=\dfrac{C_P}{R}\ln\dfrac{\theta}{T}$ …………(7)

(6)-(7) 得 $\ln\dfrac{p}{p_0}=\dfrac{C_P}{R}\ln\dfrac{\theta_0}{\theta}$ …………(8)

因題設 $T=T_0$ 之故也。

(iv) 證得結論

合併 (3) (8) 兩式，得

$$\ln\frac{\theta_0}{\theta}=-\frac{gz}{C_PT}$$

題設 $z=\dfrac{TC_P}{g}$，即 $\dfrac{gz}{C_PT}=1$，故由上式得

$$\ln\frac{\theta}{\theta_0}=1.$$

故 $\theta=\theta_0e$

即爲所證。

（三）p 爲鉛直坐標之連續方程式爲 $\vec{\nabla}_P\cdot\vec{V}=-\dfrac{\partial\omega}{\partial p}$，說明式中符號 p，$\vec{V}$，$\omega$ 與 $\dfrac{\partial\omega}{\partial p}$ 的意義。並將此式稍予變化後，推出 Dine 氏抵償(Compensation)。

【解】p 表示氣壓，以氣壓單位爲單位的鉛直方

向的坐標，相當於普通直角坐標中的z。而 $\vec{\nabla}_P$ 中的p，則表示p爲常數之意。

$\vec{V}=\vec{i}u+\vec{j}v$，表示在等壓面上的風速。

$\omega=\frac{dp}{dz}$，表示鉛直運動的速度。相當於普通直角坐標中的 $w=\frac{dz}{dt}$，

$\frac{\partial\omega}{\partial p}$ 表示鉛直速度在鉛直方向的改變率。

玆再由連續方程式推出 Dine 氏抵償。

令 $D=\vec{\nabla}_P\cdot\vec{V}$，原式改寫爲

$$D=-\frac{\partial\omega}{\partial p} \quad \cdots\cdots (1)$$

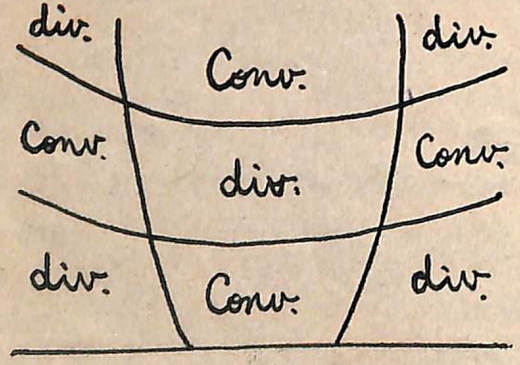
設 $\bar{D}$ 表示在兩等壓面間的平均輻散，將 (1) 式積分可得

$$\bar{D}(p_1-p_0)=-(\omega_1-\omega_0) \quad \cdots\cdots (2)$$

式中下標 (Subscript) 0與1各表底層與高層等壓面上的情況，如果此積分式從海平面 ($p_0\doteqdot 1000$mb) 起積分至大氣層的頂部 ($p_1=0$，$\omega_1=0$)，(2) 式可改寫爲

$$D=-\frac{\omega_0}{1000} \quad \cdots\cdots (3)$$

在海平面上大氣的運動方向大致是水平的，ω_0 較之局部氣壓變化 $\frac{\partial p_0}{\partial t}$ 甚爲微小。因此，即使局部氣壓變化 (或 ω_0) 大至每三小時 (÷11,000秒鐘) 10mb，此整個氣柱中的平均輻散不會超過 10^{-6} 秒$^{-1}$。但由 (1) 式所表示的D值爲某二氣層間的輻散，其值決不小於 10^{-5}秒$^{-1}$。從海平面至大氣頂部的平均輻散 $\bar{D}$ 較之某二氣層間的輻散約小至十倍之多。但是全部輻散爲各層輻散的總和。由此可知，從海平面起至大氣頂部的整個大氣柱中的各層輻散至少要改變符號一次，改變多次，是屬常事。



圖一：Dine 氏抵償

同時，在水平面上已知輻散與輻合是交錯排列的，所以大氣中輻散與輻合所分佈的垂直剖面圖如第一圖所示，此等情形，稱爲 Dine 氏抵償。

(四) 導出 Rossby 長波公式，詳細說明推證時程序中的假定及所用符號的意義。

【解】在正壓 (Barotropic) 流體及無輻散的條件下，Rossby 氏推證出長波運動方程式爲

$$c=u-\beta\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$$

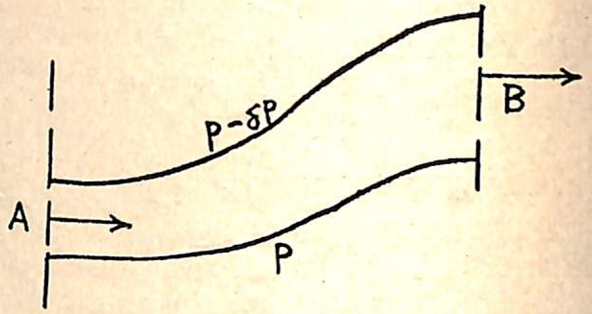
式中c爲長波運動的速度，u爲平均帶風(zonal wind)的風速，L 爲波長，$\beta=\frac{df}{dy}$ 稱爲 Rossby 參數。

此公式推求的方法很多，玆介紹三種方法如下。

(i) 輻散方法　考慮在兩等壓線 p 及 p−δp 與槽線A及脊線 B間一塊面積內的輻散，此塊面積稱爲等壓線溝，(Channel)，如第二圖所示，經槽線 A每秒間空氣流入的質量爲

$$\delta F=\rho v\delta n\delta z \quad \cdots\cdots (1)$$

式中δn 爲二等壓線間的寬度，ρ 爲大氣密度，v 爲速度，δz爲某高度層至大氣頂間的厚度。



圖二：等壓線溝中的輻散

梯度風方程式

$$kv^2+fv=\frac{1}{\rho}\frac{\delta p}{\delta n} \quad \cdots\cdots (2)$$

因δp>0，上式右端應取正號，故 (1) 式可改寫爲

$$\delta F=\frac{\delta p\delta z}{kv+f}$$

脊線B上諸量以撇號(Prime)表之，同樣可得

$$\delta F'=\frac{\delta p\delta z}{k'v'+f'}$$

由是在氣壓溝內的輻散爲

$$D=\delta F'-\delta F=\frac{\delta p\delta z}{(kv+f)\ (k'v'+f')}\left[(kv+f)-(k'v'+f')\right]$$

設在某高度層上 (在 600mb 高度上下) 無輻散 D=0，則上式立可變爲

$$kv+f=k'v'+f' \quad \cdots\cdots (3)$$

上式稱爲絕對旋率不變定理，凡空氣質點運動滿足 (3) 式者的軌跡線 (Trajectory) 稱爲絕對旋率不變軌跡線，簡寫爲 CAVT。

取空氣質點開始運動時的原點在轉向點 (Point of inflection) 上，此處 K=0，(3) 式變爲

$$k'v'=-(f'-f) \quad \cdots\cdots (4)$$

再者，Rossby 參數 $\beta=\frac{df}{dy}$，視β爲常數，將此式積分可得

$$f'-f=\beta y \quad \cdots\cdots (5)$$

如質點運動的波幅 (Amplitude) 不甚大時 $\frac{dy}{dx}\doteqdot 0$，則

$$k'=\frac{d^2y}{dx^2} \quad \cdots\cdots (6)$$

將 (5，6) 兩式代入 (4) 式內，得出 CAVT的微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\beta}{v'}y$$

視β，v' 爲常數，此方程式的積分爲一正弦曲線，故可設空氣質點的運動方程式爲

$$y=A\sin\frac{2\pi}{L}(x-ct) \quad \cdots\cdots (7)$$

式中A爲波幅，L爲波長，c爲波速，將 (7) 式對 x 取導式，得

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{2\pi}{L}A\cos\frac{2\pi}{L}(x-ct) \quad \cdots\cdots (8)$$

與

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2A\sin\frac{2\pi}{L}(x-ct) \quad \cdots\cdots (9)$$

在槽線或脊線上，$\frac{\partial y}{\partial x}=0$，即

$$\cos\frac{2\pi}{L}(x-ct)=0$$

則在槽線上 $\sin\frac{2\pi}{L}(x-ct)=-1$，(9)式爲

$$\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2A \quad \cdots\cdots (10)$$

在脊線上 $\sin\frac{2\pi}{L}(x-ct)=1$，(9)式爲

$$\frac{\partial^2y}{\partial x^2}=-\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2A \quad \cdots\cdots (11)$$

與 (6) 式同樣得出氣流線的曲率

$$k_s=\frac{\partial^2y}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots (6')$$

由 (6'，10，11) 諸式可知

$$k_s=-k_s'=\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2A \quad \cdots\cdots (12)$$

Blaton 方程式表出軌跡線曲率與氣流線曲率間的關係爲

$$\left.\begin{aligned}kv&=k_s(v-c)\\ k'v'&=k_s'(v'-c)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (13)$$

合併 (12，13) 兩式，可得

$$kv-k'v'=2k_s(u-c) \quad \cdots\cdots (14)$$

式中 $u=\frac{1}{2}(v+v')$，稱爲平均帶風。

其次，與 (5) 式同樣可得出

$$f'-f=2A\beta \quad \cdots\cdots (5')$$

再將 (12) 式代入 (5') 式內得

$$f'-f=2k_s\beta\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \quad \cdots\cdots (15)$$

(14，15) 兩式代入 (3) 內，整理之立得

$$c=u-\beta\left(\frac{L}{2\pi}\right)^2$$

即爲所求者。

(ii) 旋率方法　在正壓流體中，等壓等比容力管 (Solenoids) 之數爲零，可得出旋率方程式

$$\frac{d}{dt}(q+f)=-D(q+f) \quad \cdots\cdots (16)$$

在某高度層上，輻散爲零D=0，則上式爲

$$\frac{d}{dt}(q+f)=0 \quad \cdots\cdots (3')$$

亦即

$$\frac{\partial q}{\partial t}+u\frac{\partial q}{\partial x}+v\frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad \cdots\cdots (17)$$

因q爲x，t的函數，f僅爲y的函數故也。

相對旋率的直角坐標表示法爲

$$q=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

設u 爲平均帶風，視 u 爲常數，$\frac{\partial u}{\partial y}=0$，則上式爲

$$q=\frac{\partial v}{\partial x} \quad \cdots\cdots (18)$$

再將 (7) 式按t取導式，得

$$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{2\pi}{L}cA\cos\frac{2\pi}{L}(x-ct) \quad \cdots\cdots (19)$$

(19) 式按x取導式，再利用 (18) 式得

$$q=\frac{\partial v}{\partial x}=\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2cA\sin\frac{2\pi}{L}(x-ct) \quad \cdots\cdots (20)$$

(20) 式先後按t與x取導式，且將 (19) 式代入可得

$$\frac{\partial q}{\partial t}=-\left(\frac{2\pi}{L}\right)^3c^2A\cos\frac{2\pi}{L}(x-ct)=\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2cv \quad \cdots\cdots (21)$$

與 $$\frac{\partial q}{\partial x}=(\frac{2\pi}{L})^3 cA\cos\frac{2\pi}{L}(x-ct)$$

$$=-(\frac{2\pi}{L})^2 v \cdots\cdots\cdots\cdots (22)$$

又因 $$\frac{\partial f}{\partial y}=\beta \cdots\cdots\cdots\cdots (23)$$

將（21，22，23）諸式代入（17）式內，化簡即得

$$c=u-\beta(\frac{L}{2\pi})^2$$

(iii) 氣流線方法　按氣流線的定義，氣流線的微分方程式爲

$$v=u\frac{\partial y_s}{\partial x}$$

相對氣流線的微分方程式爲

$$\frac{\partial y_r}{\partial x}=\frac{v}{u-c}=\frac{u}{u-c}\,\frac{\partial y_s}{\partial x}$$

式中下標s與r各表氣流線與相對氣流線的各種情況，上式積分

$$y_r=\frac{u}{u-c}y_s$$

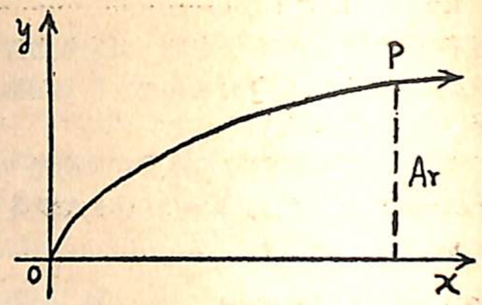
波幅 A爲氣流線上縱坐標的極值，故上式可改寫爲

$$A_r=A_s\,\frac{u}{u-c}\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

相對旋率在自然坐標中的表示法爲

$$q=k_s v-\frac{\partial v}{\partial n}$$

假設切力項$(-\frac{\partial v}{\partial n})$不隨質點運動而變化，則得出絕



圖三：相對氣流線

對旋率不變定理，如（3）式所表示者

$$f_P+k_{SP}v_P=f_0+k_{S0}v_0$$

式中下標0與p各表在原點 0 與相對氣流線上任一點 p 的情況，如第三圖所示，取原點爲轉向點 $k_{S0}=0$，上式爲

$$f_P+k_{SP}v_P=f_0\cdots\cdots\cdots\cdots(4')$$

爲（5）式同樣可得出

$$f_P-f_0=\beta A_r$$

且平均帶風　$v_P=u$

由是（4'）式可寫爲

$$k_{SP}u=-\beta A_r\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

在極大點p點氣流線的曲率，由（12）式可知

$$k_{SP}=-(\frac{2\pi}{L})^2A_S\cdots\cdots\cdots\cdots(12')$$

合併（24，25，12'）諸式，即可得出

$$c=u-\beta(\frac{L}{2\pi})^2$$

—— 完 ——

美國空軍氣象勤務作業原則

童文海摘譯

美空軍氣象勤務部（AWS）曾對其所屬單位作業作原則上之指示，特將其有關及重要各條摘錄如下，以供參考。

1. 發佈之預報切記隨時修正，保持供應最新資料。

2. 供應氣象避用飛行作戰等詞句，有關飛行作戰之判斷應由飛行人員決定。

3. 明確規定及執行本單位作業程序，務使天氣警告及突變能於飛行失事前供應及飛行人員。

4. 各屬單位主官與基地作戰單位加強連繫。

5. 基地天氣供應傳報系統與裝備之改進須呈報指揮官配合發展計劃。

6. 重申加強應用「附註 (Significant Remarks)」，務求作最有效之應用。

7. 講解應適切配合任務需要，不可悲觀，並儘可能減短講解時間。

8. 請飛行人員注意飛機擋風玻璃對於能見度視障之影響。

9. 亂流與急降氣流無法測報，沿該航線飛行之飛機，須注意飛行員天氣報告，以作警告。

10. 計劃航路上如有劇烈天氣警告，必須確實對飛行員講解。

11. 雷雨之強度不必講解。

12. 除非有適當之聯合參謀與通信作業，僅氣象單位作天氣警報，尚不能達成天氣警報之目的。

13. 儘可能製供最準確之預報，但不可特別着重某一方面，因而影響作戰任務人員之決定。

14. 預報人員如已儘量應用所有資料與學識製供預報，如預報不準，該預報員並未失當。

15. 過度的批評—已儘其能力製備而結果錯誤之預報，將導致過份的悲觀態度。

16. 僅由天氣因素一項，不能認爲係飛行失事之主要因素。

17. 了解主管飛行單位將突變天氣等通知每一飛行中飛機，有時不一定能達到。但飛行員有許多其他地方能索取及獲得天氣報告。

（摘自"Operational Policics"原刊 AWS Operation Digest. vol. II. No. 3）