數值預報計算不穩定之研究與實例

劉廣英

一、導　言

天氣現象卽發生於包圍吾人四周，時時爲各式運動之大氣中，則由解大氣運動方程，應可預測未來天氣變化。此一數値天氣預報槪念，早在1912年卽已由英人李察遜(Richardson)提出，並做實際計算，惜所得結果頗令人失望；復因缺乏有利工具，計算速率難與天氣變化速率相匹敵，而至自他以後三十餘載無人問津。至二次大戰後，先是戰時爲應軍事需要已發展成功高速電子計算機，又有芝加哥大學賈尼(Charney)教授推導成功之重力波過濾技術[1]，方使數値預報獲得新生。經廿餘年的努力與改進，美中央氣象局固以數値預報爲主要工具，卽其他先進國家亦急起直追，成就之大，有目共睹。

基本言之，解大氣運動方程有兩種法則，卽吾人熟知由擾動 (Perturbation) 求其分析解之擾動法，及以導數 (derivative) 極限求近似值之定差法。所謂計算不穩定，實卽運用第二種方法時，因吾人所取時間與距離之定差（卽$\triangle t$與$\triangle x$）不恰當，而使計算結果產生誤差之謂。此種誤差可使答案中包含很多非因大氣波動而起之變化，純係計算誤差累積而來，故稱爲計算不穩定。在一次線性偏微分方程中，欲保持計算呈穩定狀態，時、距定差之關係必須爲 $(c\triangle t/\triangle x)<1$[2]。

二、計算穩定條件實例：熱導方程（heat equation）之計算穩定條件

熱導方程爲抛物線型 (parabolic) 偏微分方程，其形式爲

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u=u(x、t)$$

如設σ爲傳導係數，$u(x、t)\equiv T(x、t)$，爲導熱體之溫度，則在充足邊界條件之下，由

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\sigma\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

可解得該導體上隨時變化之溫度分佈$T(x、t)$。爲便於改(1)式爲定差方程式，$T(x、t)$可改寫成T_j^n，卽以上角註n表時間變化，而以下角註j代表距離變化，而後再取某一定時間之空間變化，及某一定空間上的時間變化。由而可得[3]：

$$\frac{\partial^2 T_j^n}{\partial x^2}\simeq\frac{T_{j+1}^n-2T_j^n+T_{j-1}^n}{\triangle x^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\frac{\partial T_j^n}{\partial t}\simeq\frac{T_j^{n+1}-T_j^n}{\triangle t} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

將(2)及(3)式代入(1)，整理後卽得，

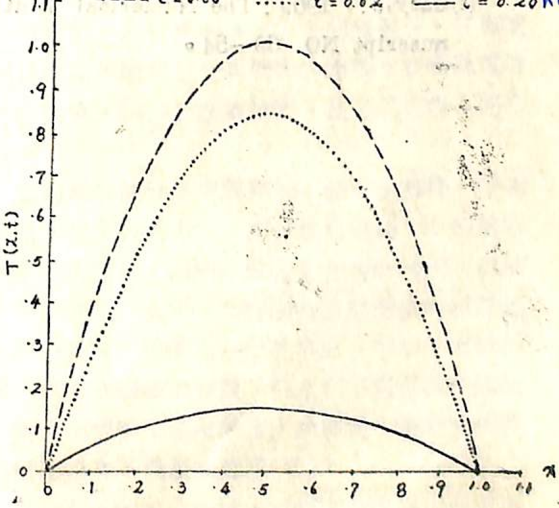
$$T_j^{n+1}=T_j^n+\mu\left(T_{j+1}^n-2T_j^n+T_{j-1}^n\right) \cdots(4)$$

式中 $\mu=\sigma\Delta t/\Delta x^2$，卽代表欲保持計算穩定，時、距定差應遵守之條件。

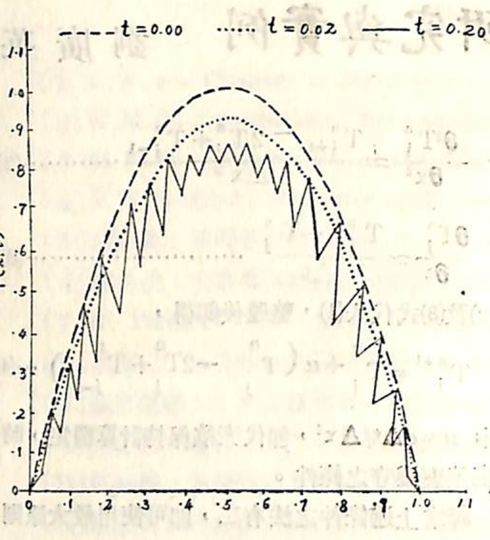
尋求上述條件之法有二，卽可使用最大原則（Maximum principle）或福立葉表示法（Fourier representation）求μ之上限。根據以上二法則可證[4]，欲使(4)式保持計算穩定，μ值必須小於0.50。

三、實驗結果：

爲證明理論推導正確，並加深認識，筆者曾使用 CDC—6400 數字計算機做實際計算。在計算中，令 $\sigma=1$，卽使 $\Delta t=\mu/\Delta x^2$；在x全長0至1之間分爲41個計算點，卽令$\Delta x=0.025$；所採用之邊界條件爲：$T(0,t)=T(1,t)=0$，卽在任何時間，該熱導體兩端之溫度相同，且均爲零，此一假定，相當於熱導體之中央溫度最高，熱由此中心向兩端傳送。



圖(一)　$\mu=0.45$時所得之$T(x,t)$曲線



圖(二) $\mu=0.55$時所得之T(x,t)曲線

根據以上條件所計算出之結果如圖(一)及圖(二)所示。在計算圖(一)時，所選之μ值爲$0.45<0.50$，結果所得三不同時間之T(x、t)曲線均呈穩定狀態。而在圖(二)中，因 $\mu=0.55>0.5$，所示T(x、t)之計算結果，在 t=0.~~02~~20 時已不穩定，此種不穩定顯非溫度分佈本身所有，而係由計算引起。

四、結論

以上計算與理論相符，足證在應用電子計算機做數値天氣預報時，有其基本上必須遵守之限制。當然，在數値預報先進者如美國而言，此種實用技術已是與日俱新，但對我們來說，尙未正式起步，無倫就時代趨勢，或今後需要而言，吾人似均應急起直追，故望此文能達拋磚引玉之目的，蔚成我空軍氣象作業邁向新里程之研究風氣，以期保持旣有之優良傳統與成就。

參考文獻

(1)Charney, J.G., 1948: On the Scale of Atmospheric Motions. Geof. Publ., Vol.17, No.2, pp4
(2)曲克恭：定差法解微分方程之誤差。氣象預報與分析，52期。
(3)Petterssen, S.: Weather Analysis and Forecasting, Vol.I, pp54,新陸書局，56年9月。
(4)Gary, J., 1969: The Numerical Solution of Partial Differential Equations. NCAR Manuscript NO. 69—54。