

Smolarkiewicz 正定義數值方法中的交錯項

柳再明¹ 郭鴻基²

¹ 中央氣象局氣象資訊中心

² 國立臺灣大學大氣科學系

(中華民國八十三年四月二十八日收稿；中華民國八十三年六月七日定稿)

摘 要

Smolarkiewicz 指出一數值平流方法應納入交錯項而未納入者是一不穩定法。我們針對 Smolarkiewicz 法交錯項加入與否、圓錐初始位置的改變、穩定度的探討以及邊界的影響進行多方面的探討。研究結果指出有納入交錯項的 Smolarkiewicz 法如 Smolarkiewicz 所言是一穩定的方法，而對於 Smolarkiewicz 法沒有加入交錯項的部份，只要注意 Δt 大小的使用及圓錐所在位置，雖然 Smolarkiewicz 法沒有納入交錯項，也會是一穩定的方法。以分離法的執行多維運算方式，除了可以使用比直接二維運算較大的 Δt 外，亦自動包含交錯項的效應，可以免除二維處理時，考慮交錯項是否納入的困擾。以上這些最重要的結果，總結於圖 13 至圖 15，這是 Smolarkiewicz 法所沒有的重要補充，此外我們亦更正了 Smolarkiewicz 法多維公式之錯誤。

關鍵詞：交錯項、正定義數值方法

一、引 言

Smolarkiewicz(1982)指出任何數值平流方法，應加入交錯項(cross-space partial derivative terms)而沒有納入者，是一種不穩定的數值方法(文中說明 Crowley 1968 二階法因為沒有包含交錯項，所以產生不穩定)。Smolarkiewicz(1983, 1984)在其正定義水汽平流方法的基礎探討裏，指出 Smolarkiewicz 法沒有納入交錯項的平流結果，會因校正階段的重覆執行而產生額外的質量(文後以 S83 簡稱 Smolarkiewicz 1983，以 S84 簡稱 Smolarkiewicz 1984)。本文針對 Smolarkiewicz 法中交錯項納入與否、初始圓錐所在位置及穩定度的改變，作多方面的詳細探討。根據研究結果，我們清楚的指出交錯項在 Smolarkiewicz 法裏所扮演的角色。另外我們要先說清楚的是，Smolarkiewicz 法的優缺點在 S83 及 S84，已作了透澈的分析，本文是針對 S83、S84 文中有關 Smolarkiewicz 交錯項的探討，以及其文中對交錯項的說明方式提出補充；我們研究之目的，是將 Smolarkiewicz 交錯項的特點，做全盤性的分析，本文的討論不影響 Smolarkiewicz 法的結果。文中第二節陳述 S83 及 S84 文中有關交錯項的說明，以及分離法包含交錯項的相關證明。第三節是研究結果與討論，結

論則放在第四節。要附帶說明的是,本文是柳(1993)博士論文的一部份,我們從其中獨立出本文來發表。

二、交錯項

作二維以上的平流研究問題時,所使用的數值平流方法,才可能會面對交錯項的問題,譬如 Smolarkiewicz 法有交錯項的問題,但 Hsu-Arakawa 法(1990)沒有。因為 Smolarkiewicz 法是用泰勒展開,來推導其反擴散過程,所以存在有交錯項的問題。Smolarkiewicz 法要加入交錯項,才會和其分離法(分離法的定義,請見本節之第3.小節)得相同的結果。分離法的執行多維運算方式,會自動包含交錯項的效應。若 Smolarkiewicz 法沒有納入交錯項,結果不會和其分離法相同,因此也可以知道,Smolarkiewicz 法存在有交錯項的問題。Hsu-Arakawa 法校正階段的校正方式,不是用泰勒展開,不存在交錯項的問題,假若存在交錯項的問題,分離法會自動包含交錯項的效應, Hsu-Arakawa 法之二維與其分離法的結果相同, Hsu-Arakawa 法之二維,沒有加與不加交錯項的選擇方式,因此 Hsu-Arakawa 法,不存在交錯項的問題。作一維平流探討沒有交錯項的困擾。Smolarkiewicz 法及其與交錯項的關係,請參考 Smolarkiewicz(1983,1984)。Smolarkiewicz(1984)文中三維公式的推導有誤,正確的式子請見柳再明(1993),或是本文末尾的附錄。

(1) 二維平流包含交錯項

以下以二維平流方程式(1),來說明為何會有交錯項的存在,

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

當我們對(1)式做定差化, ψ 變數在 i, j 網格點上第 n 時距的時間預報項 $\psi_{i,j}^{n+1}$, 以泰勒二階展開

$$\psi_{i,j}^{n+1} = \psi_{i,j}^n + \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{i,j}^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \Big|_{i,j}^n + O(\Delta t^3). \quad (2)$$

(2)式中的時間導式項 $\partial \psi / \partial t$ 及 $\partial^2 \psi / \partial t^2$, 我們借用(1)式來替換,讓 u, v 為常數,可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -u \frac{\partial \psi}{\partial x} - v \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= +u^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2uv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (3)$$

將(3)式代入(2)式(以下省略 i, j 足標)

$$\begin{aligned} \psi^{n+1} &= \psi^n - u \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial x} - v \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{2} u^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \\ &\quad + \frac{1}{2} v^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + uv \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \quad (4)$$

(4)式等號右邊的最末項 $uv\Delta t^2\partial^2\psi/\partial x\partial y$ 就是所謂的交錯項。Smolarkiewicz法在二(多)維以上處理時,會納入交錯項。

(2) 一維平流不包含交錯項

作一維平流探討沒有交錯項的困擾。以一維平流方程式為例

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + u\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad (5)$$

而且

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial t} &= -u\frac{\partial\psi}{\partial x} \\ \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} &= +u^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

將(6)式代入(2)式

$$\psi^{n+1} = \psi^n - u\Delta t\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{2}u^2\Delta t^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}. \quad (7)$$

(7)式並不存在交錯項((4)式中的最末項 $uv\Delta t^2\partial^2\psi/\partial x\partial y$),由此可見,一維平流沒有包含交錯項。

(3) 分離法包含交錯項

分離法的執行方式,是用原來一維的方程,先作 x 方向的模擬,再作 y 方向的模擬。這種分離法的執行多維運算方式,會自動包含交錯項的效應。我們的推導證明如下:對一維平流方程式(5)式做定差化, ψ 變數的時間預報項 ψ^{n+1} ,以泰勒一階展開,而暫且以 ψ^* 表之

$$\begin{aligned} \psi^* &= \psi^n + \Delta t\frac{\partial\psi}{\partial t} \\ &= \psi^n - u\Delta t\frac{\partial\psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (8)$$

將(8)式得到的 ψ^* (x 方向平流的結果),拿來作 y 方向的模擬

$$\psi^{n+1} = \psi^* - v\Delta t\frac{\partial\psi^*}{\partial y}, \quad (9)$$

將(8)式,代入(9)式,讓 u, v 為常數,可得

$$\psi^{n+1} = \psi^n - u\Delta t\frac{\partial\psi}{\partial x} - v\Delta t\frac{\partial\psi}{\partial y} + uv\Delta t^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}. \quad (10)$$

(10)式等號右邊的最末項 $uv\Delta t^2\partial^2\psi/\partial x\partial y$ 和(4)式等號右邊的最末項相同,就是交錯項。因此以分離法的執行多維運算方式,自動包含交錯項的效應,可以免除二維處理時,考慮交錯項是否納入的困擾。

在以上推導中,風場是假設為非幅散的,所以平流型式和通量型式是一樣的,在本文所有之數值計算,所牽涉皆是非幅散風場,因此和上述分析推導相吻合。

(4) 分離法比二維有較高精確度

前面分離法的探討,如果(8)及(9)式都以泰勒二階展開(和二維交錯項討論(2)式的階數一致)

$$\begin{aligned}\psi^* &= \psi^n + \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \\ &= \psi^n - u \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2} u^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},\end{aligned}\quad (11)$$

將(11)式得到的 ψ^* (x 方向平流的結果),拿來作 y 方向的模擬

$$\psi^{n+1} = \psi^* - v \Delta t \frac{\partial \psi^*}{\partial y} + \frac{1}{2} v^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial y^2}, \quad (12)$$

將(11)式,代入(12)式,讓 u, v 為常數,可得

$$\begin{aligned}\psi^{n+1} &= \psi^n - u \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial x} - v \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ &\quad + \frac{1}{2} u^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} v^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + uv \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \\ &\quad - \frac{1}{2} u^2 v \Delta t^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y} - \frac{1}{2} u v^2 \Delta t^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} + \frac{1}{4} u^2 v^2 \Delta t^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2}.\end{aligned}\quad (13)$$

比較(13)與(4)兩式,分離法的(13)式,比二維的(4)式多出比二階還高的參項來,為 $-\frac{1}{2} u^2 v \Delta t^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^2 \partial y}$ 、 $-\frac{1}{2} u v^2 \Delta t^3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2}$ 與 $+\frac{1}{4} u^2 v^2 \Delta t^4 \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2}$ 。分離法((13)式)多計算了某些二維((4)式)所截斷的幾項(參項),似乎指出(13)式的截斷誤差之階數,較原來的截斷誤差(為三階($O(\Delta t^3)$))為高。也就是說,以 x 方向模擬的結果,拿來作 y 方向的模擬(將(11)式代入(12)式),這種分離式的執行過程,似乎提高了原有的精確度。Smolarkiewicz法的研究結果明顯指出,在大 Δt 的情形下分離法的精確度比二維的來得高;雖然本節是線性的推導,然而所推導的結果,或許正是Smolarkiewicz分離法之精確度,比二維來得高的原因所在。

(5) 分離法的三維推導

三維分離法的執行方式,是用原來一維的方程,先作 x 方向的模擬,接著作 y 方向的模擬,最後作 z 方向的模擬。我們先處理本節第3.小節的泰勒一階展開部份。接著(10)式的 x, y 方向之平流後, ψ^{n+1} 以 ψ^* 表之

$$\psi^* = \psi^n - u \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial x} - v \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial y} + uv \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}, \quad (14)$$

將(14)式得到的 ψ^* (x, y 方向平流的結果),拿來作 z 方向的模擬

$$\psi^{n+1} = \psi^* - w \Delta t \frac{\partial \psi^*}{\partial z}, \quad (15)$$

將(14)式,代入(15)式,讓 u, v 為常數,可得

$$\begin{aligned}
\psi^{n+1} = & \psi^n - u\Delta t \frac{\partial\psi}{\partial x} - v\Delta t \frac{\partial\psi}{\partial y} - w\Delta t \frac{\partial\psi}{\partial z} \\
& + uv\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + vw\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} + wu\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x} \\
& - uvw\Delta t^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y\partial z}.
\end{aligned} \tag{16}$$

(16)式等號右邊的最後四項,都是交錯項。

假若以本節第4.小節的泰勒二階展開,接著(13)式的 x, y 方向之平流後, ψ^{n+1} 以 ψ^* 表之

$$\begin{aligned}
\psi^* = & \psi^n - u\Delta t \frac{\partial\psi}{\partial x} - v\Delta t \frac{\partial\psi}{\partial y} \\
& + \frac{1}{2}u^2\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}v^2\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + uv\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} \\
& - \frac{1}{2}u^2v\Delta t^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} - \frac{1}{2}uv^2\Delta t^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y^2} + \frac{1}{4}u^2v^2\Delta t^4 \frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2},
\end{aligned} \tag{17}$$

將(17)式得到的 $\psi^*(x, y$ 方向平流的結果),拿來作 z 方向的模擬

$$\psi^{n+1} = \psi^* - w\Delta t \frac{\partial\psi^*}{\partial z} + \frac{1}{2}w^2\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi^*}{\partial z^2}, \tag{18}$$

將(17)式,代入(18)式,讓 u, v 為常數,可得

$$\begin{aligned}
\psi^{n+1} = & \psi^n - u\Delta t \frac{\partial\psi}{\partial x} - v\Delta t \frac{\partial\psi}{\partial y} - w\Delta t \frac{\partial\psi}{\partial z} \\
& + uv\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + vw\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} + wu\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x} \\
& - uvw\Delta t^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial x\partial y\partial z} \\
& + \frac{1}{2}u^2\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2}v^2\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{1}{2}w^2\Delta t^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \\
& - \frac{1}{2}u^2v\Delta t^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial y} - \frac{1}{2}u^2w\Delta t^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial x^2\partial z} - \frac{1}{2}v^2w\Delta t^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial y^2\partial z} \\
& - \frac{1}{2}v^2u\Delta t^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial y^2\partial x} - \frac{1}{2}w^2u\Delta t^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\partial x} - \frac{1}{2}w^2v\Delta t^3 \frac{\partial^3\psi}{\partial z^2\partial y} \\
& + \frac{1}{4}u^2v^2\Delta t^4 \frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{1}{4}v^2w^2\Delta t^4 \frac{\partial^4\psi}{\partial y^2\partial z^2} + \frac{1}{4}w^2u^2\Delta t^4 \frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial x^2} \\
& + \frac{1}{2}u^2vw\Delta t^4 \frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y\partial z} + \frac{1}{2}v^2wu\Delta t^4 \frac{\partial^4\psi}{\partial y^2\partial z\partial x} + \frac{1}{2}w^2uv\Delta t^4 \frac{\partial^4\psi}{\partial z^2\partial x\partial y} \\
& - \frac{1}{4}u^2v^2w\Delta t^5 \frac{\partial^5\psi}{\partial x^2\partial y^2\partial z} - \frac{1}{4}v^2w^2u\Delta t^5 \frac{\partial^5\psi}{\partial y^2\partial z^2\partial x} - \frac{1}{4}w^2u^2v\Delta t^5 \frac{\partial^5\psi}{\partial z^2\partial x^2\partial y} \\
& + \frac{1}{8}u^2v^2w^2\Delta t^6 \frac{\partial^6\psi}{\partial x^2\partial y^2\partial z^2}.
\end{aligned} \tag{19}$$

比較(19)與(16)兩式,以泰勒二階展開的(19)式,比泰勒一階展開的(16)式,多出十九項交錯項(等號右邊最後十九項)。

(6) 三維平流推導

爲了明瞭(19)式分離法,較之實際三維所多出來的項次,我們進行實際三維的泰勒展開,交錯項之推導

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u \frac{\partial \psi}{\partial x} + v \frac{\partial \psi}{\partial y} + w \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (20)$$

(20)式是三維平流方程,由(20)式,讓 u, v 爲常數,可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -u \frac{\partial \psi}{\partial x} - v \frac{\partial \psi}{\partial y} - w \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= +u^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + w^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ &\quad + 2uv \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + 2vw \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + 2wu \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x}, \end{aligned} \quad (21)$$

將(21)式代入(2)式

$$\begin{aligned} \psi^{n+1} &= \psi^n - u \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial x} - v \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial y} - w \Delta t \frac{\partial \psi}{\partial z} \\ &\quad + \frac{1}{2} u^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{1}{2} v^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{2} w^2 \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \\ &\quad + uv \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + vw \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + wu \Delta t^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \quad (22)$$

比較(22)式(三維)與(19)式(分離法),分離法的(19)式有三至六階共計十七項,是三維的(22)式所沒有的(最高只到二階項)。因此Smolarkiewicz法三維處理時,利用分離法的結果,可以比實際三維有更高的精確度。

圖1是S83用來探討其平流方法的圓錐,研究範圍 $(x, y) \in [-50, 50] \times [-50, 50]$, $\Delta x = \Delta y = 1$, $\Delta t = 0.1$,角速度 $\omega = 0.1$, $u = -\omega(y - y_0)$, $v = \omega(x - x_0)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ 。研究範圍中max. CFL數 $(C) = (u^2 \Delta t^2 / \Delta x^2 + v^2 \Delta t^2 / \Delta y^2)_{\max}^{1/2} \approx 0.7$ 。圓錐繞一圈共執行628次積分。圓錐半徑 $15\Delta x = 15\Delta y = 15$,圓錐高是1,位於 $(0, -25)$ (在研究範圍的正下方)。圖1右上角標高是1,左下角標高是-0.5(圖1的 x 軸向左, y 軸向下旋轉 180° ,旋轉圖形是爲了和S83、S84文中圖向一致),圖4的 x 軸向右, y 軸向上)。圖2(即爲S83的圖12),是經二次校正,沒有納入交錯項圓錐繞六圈的結果,圓錐中心極大值爲1.212(也見圖5),較圓錐的原極大值1(圖1及圖4)多了21.2%。S83的解釋是,沒有納入交錯項時,重覆校正階段,會放大沒有納入交錯項所衍生的缺點,而產生額外的質量。加入交錯項後(見圖3,即爲S84的圖9),就不會產生額外的質量。

三、結果與討論

由圖2沒有交錯項會有不穩定的結果,及有交錯項圖3的穩定結果,似乎顯示Smolarkiewicz(1983, 1984)的論點“應加入而沒有納入交錯項的多維Smolarkiewicz法,是一不穩定的方法”是對的。然而圖5圓錐繞6圈後,圓錐不但變長形且已接觸到邊界(對照圖4圓錐初始形狀及位

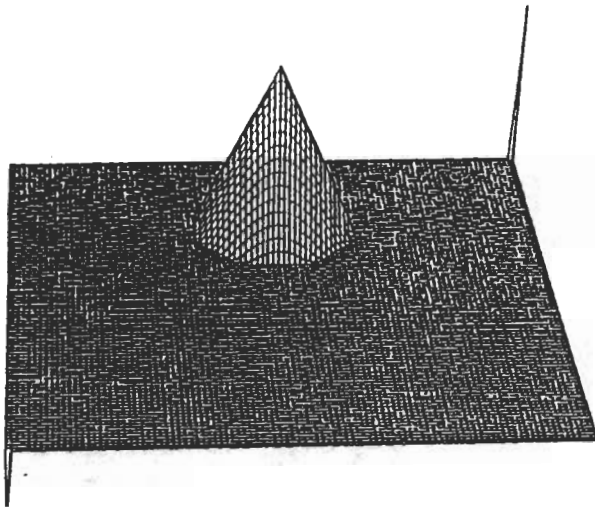


圖1 初始圓錐場，右上角標高是1，左下角標高是-0.5, x 軸向左, y 軸向下(旋轉 180°) (旋轉圖形是爲了和S83、S84文中圖向一致),研究範圍 $(x, y) \in [-50, 50] \times [-50, 50]$,圓錐位於 $(0, -25)$ 。(即S83的圖1)。

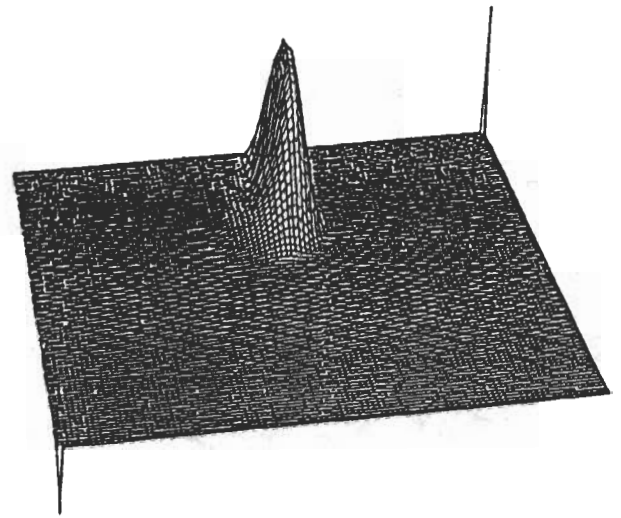


圖2 校正階段執行兩次，圓錐繞6圈的結果，計算中沒有納入交錯項，(即S83的圖12)。

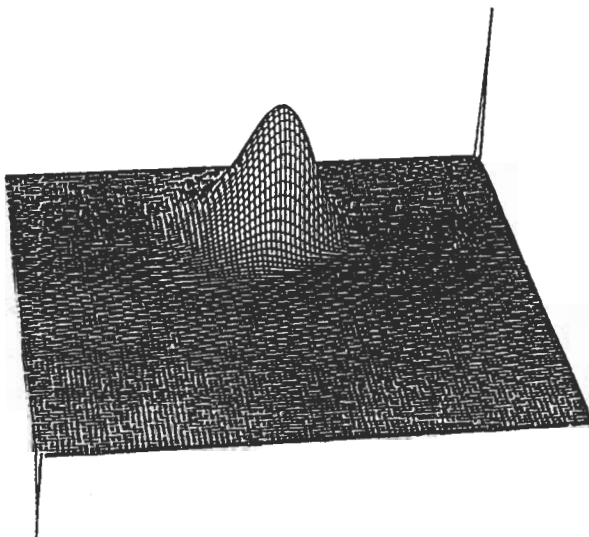


圖3 和圖2同，唯是有納入交錯項(即S84的圖9)。

置)。由圖5(即S83的圖12)的結果,我們有理由相信S83的圖12包含了邊界效應,可能是圓錐過於靠近邊界(圓錐中心位於 $(0, -25)$, 圓錐半徑15, 零值線離邊界僅10個網格點),加上圓錐繞6圈執行時間過長,導致圖5無法免除邊界的問題。因此我們針對Smolarkiewicz法中交錯項納入與否、初始圓錐所在位置及穩定度的改變,作各方面的探討。首先我們將圓錐往中心移8個網格(圓錐中心位置變為 $(0, -17)$)其他變數保持不變,繞6圈後的結果為圖6,圓錐沒有產生額外的質量,中心強度0.857。雖然沒有納入交錯項,然而在圖6的運算環境下不會如圖5產生額外的質量。由圖5及圖6,我們已有足夠的理由懷疑Smolarkiewicz(1982,1983,1984)所指出“應加入而沒有納入交錯項的多維Smolarkiewicz法,是一不穩定法”的論點是否全然正確。圖6將圓錐移離邊界的效果,除了比圖5較少受邊界的影響(圖12清楚的指出,何種狀況的結果才沒有受邊界的影響),也改變圓錐所在位置的平流速度,亦即圓錐中心比圖5有不同的CFL數(圓錐中心之CFL數我們稱之為區域CFL數)。圖6是改變兩樣(遠離邊界及減少區域CFL數)的結果,圖6或許只比圖5少受邊界的影響,但仍受邊界的影響,或許圖6的結果全然是區域CFL數減小的緣故。圖6的結果是受何者左右,或是兩者的共同結果,至此我們無法得知。另外,區域CFL數及max. CFL數在圓錐探討中扮演何種角色,是值得研究的重點。圖5圓錐變長形及圖6圓錐下緣有類似魚尾巴狀的圖形,似乎顯示二者有不穩定的現象,二者都使用 $\Delta t = 0.1$, max. CFL數 $(C) \sim 0.7$,我們懷疑S83使用的 Δt 是否太大。圖7即是 Δt 由 $0.1(C=0.7)$ 減少為 $0.05(C=0.35)$,而圓錐位置和圖5一樣都較靠近邊界,圖7裏圓錐中心強度0.749。圖7或許仍受邊界的影響(圓錐變長且和邊界相當接近),但是只要降低區域CFL數,雖然沒有加入交錯項,也不會如S83所言重覆校正階段產生額外的質量。圖6及圖7共同指出,對於沒有納入交錯項的狀況,要注意其區域CFL數大小的使用,圖6的區域CFL數由圖5的0.25降為0.17,圖7則降低為0.125,二者同時指出使用較小的區域CFL數,雖然沒有納入交錯項也不會產生額外的質量。至此,經由上述的分析,雖然還有許多疑點企待我們去探討(如區域CFL數和max. CFL數,在平流方法的探討中是代表何種意義、以及如何免除邊界的效應、何種結果才是沒有包含不穩定現象的結果),但我們已全然相信,一應納入交錯項而未加入的多維Smolarkiewicz法,只要使用較小的區域CFL數(較小 Δt),也會是一穩定的方法。

圖3納入交錯項,就可以免去圖2沒有加入交錯項會產生額外質量的結果,似乎告訴我們有交錯項比沒有交錯項,有較寬的穩定度限制,納入交錯項後穩定度限制可能變大。圖8是有無交錯項穩定度的探討, x 軸是 Δt ,A、B線是沒有交錯項經一、二次校正的結果,C、D線是有納入交錯項經一、二次校正的結果。圖8清楚的指出三個特點,一是當使用很小的 Δt (如 $\Delta t = 0.01(C=0.07)$),沒有交錯項的B線和有交錯項的D線得到近乎相同的精確度。在數值天氣預報作業的單位,為了作業的穩定性,常使用較小的 Δt ,由圖8可知在較小 Δt 的情況下,有無交錯項,結果幾乎沒有差別。二是在最大可使用 Δt 方面,有交錯項D線的 $\Delta t_{max} = 0.11(C=0.77)$,比沒有交錯項B線的 $\Delta t_{max} = 0.1(C=0.7)$ 略大,有納入交錯項的比沒有交錯項的,有較寬的穩定度限制。第三個特點是,正常而言,多一次校正的結果會比上一次的結果有更好的精確度,如二次校正的D線比一次校正的C線誤差來得小,然而沒有交錯項二次校正的B線比一次校正的A線,在 $\Delta t \geq 0.07(C=0.49)$ 明顯的有較大的誤差。沒有納入交錯項在 $\Delta t \geq 0.07$,隨著 Δt 的變大,受邊界的影響也愈大,所以誤差也變大。有納入交錯項的,不論用多大的 Δt ,似乎都不受邊界的影響(有無交錯項者受邊界影響情形,待文末的圖13、圖14再細談)(圖8上頭兩行數字

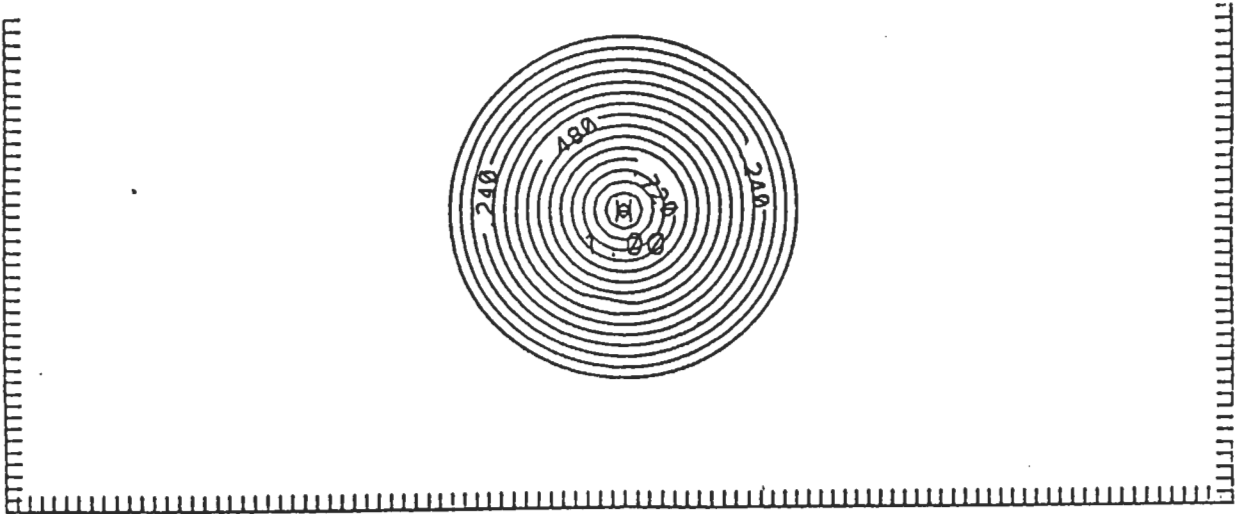


圖4 初始圓錐場(即圖1的二維繪圖法), x軸向右, y軸向上, 研究範圍 $(x,y) \in [-50,50] \times [-50,50]$, 圓錐位於 $(0,-25)$, 圖為計算區域之下半部。

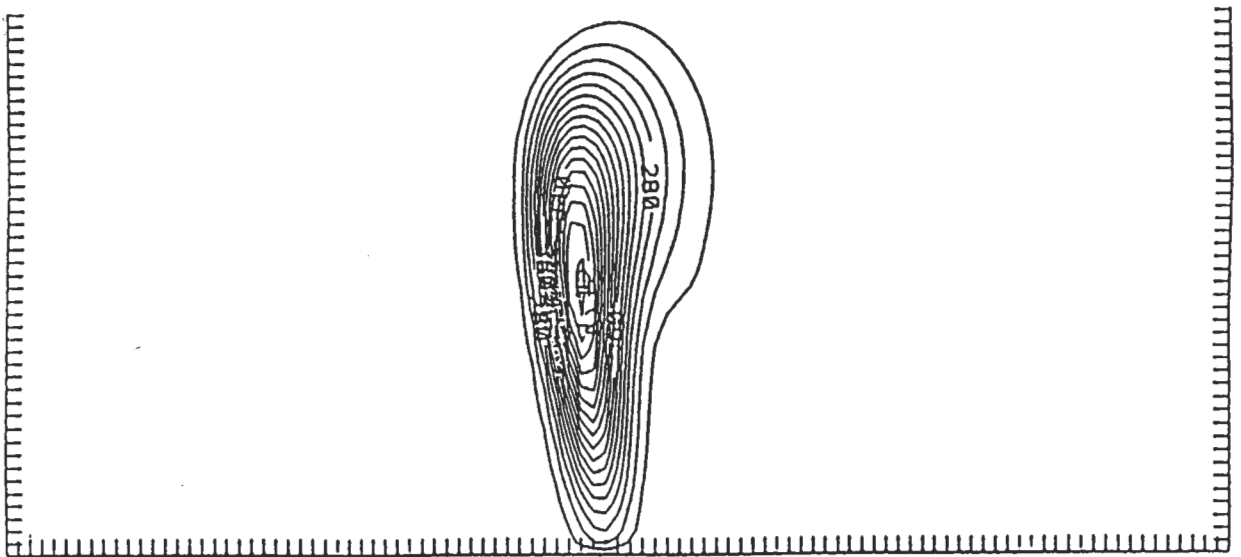


圖5 即圖4的二維繪圖法, 中心極大值1.212。 $\Delta t = 0.1, C = 0.7(0.5 \times \sqrt{2})$ 。

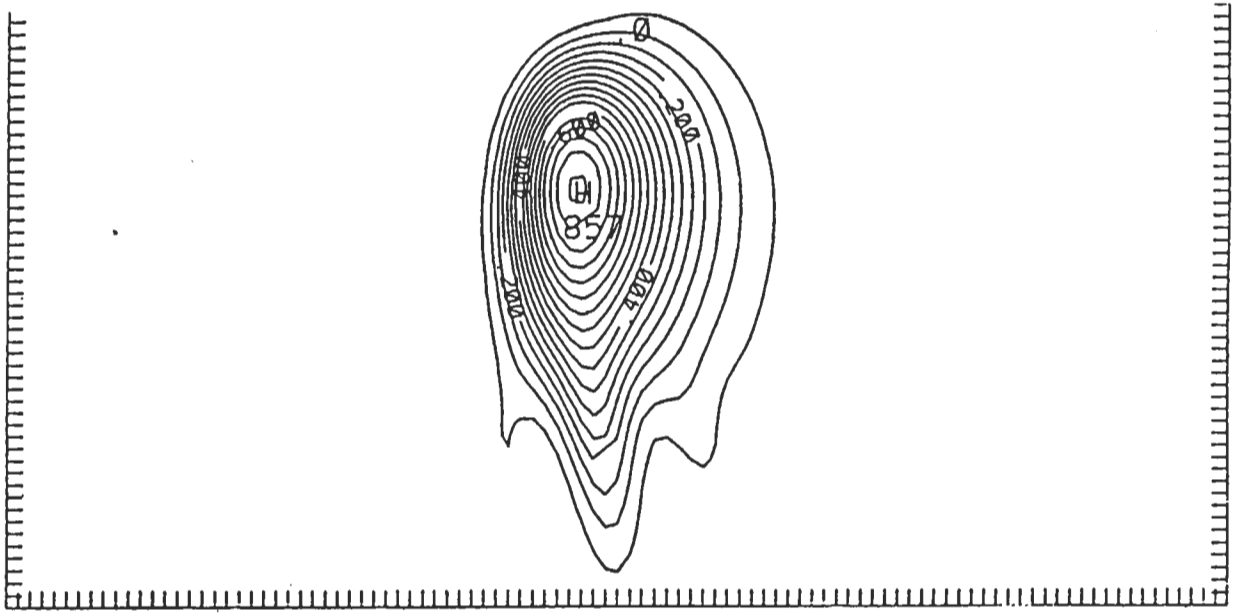


圖6 和圖5同，唯圓錐中心位置往上移8個網格為(0,-17)。

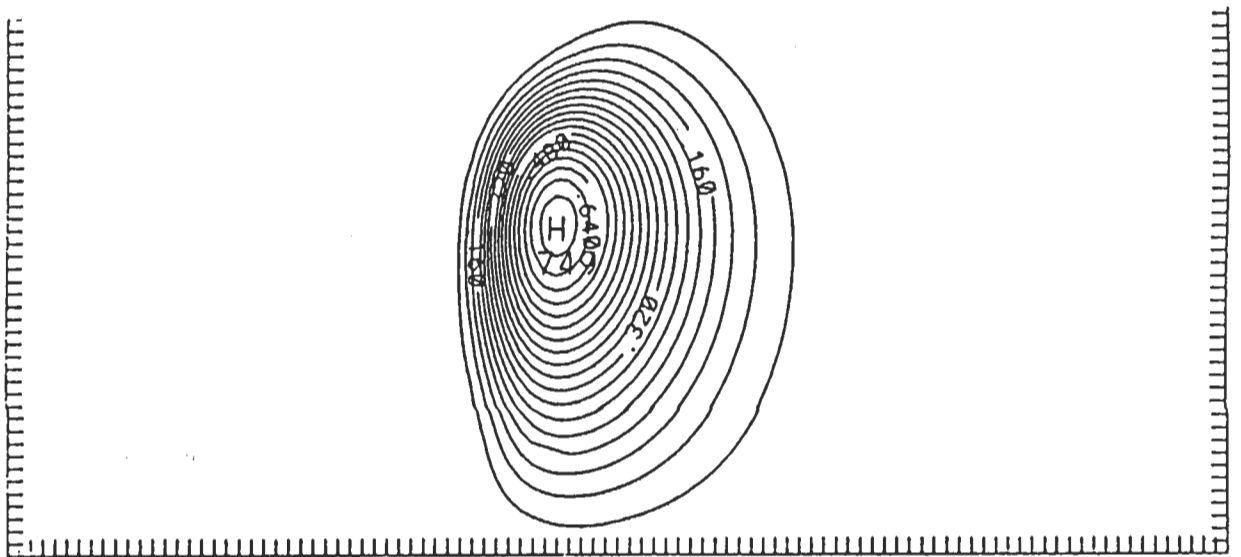


圖7 和圖5同，唯 $\Delta t = 0.05$, $C = 0.35(0.25 \times \sqrt{2})$ 。

是無交錯項(B線)及有交錯項(D線)的圓錐極大值,由這兩行數字可清楚的看出,無交錯項的B線在 $\Delta t = 0.06, 0.07(C=0.42, 0.49)$ 附近,圓錐中心極大值就開始大幅跳升,顯示在 $\Delta t \sim 0.06, 0.07$ 附近邊界的影響就很明顯了,而有交錯項的D線其圓錐中心極值呈現很平穩的上升,顯示有交錯項似乎比較不受邊界影響)。另外B線的 $\Delta t_{max} = 0.1$,正是S83圖12所使用的 Δt 。沒有納入交錯項的B線,其 $\Delta t = 0.1$ 的結果受邊界的影響最多,且在穩定區的邊緣呈極不穩定,是最壞的結果。以沒有納入交錯項者而言, $\Delta t = 0.1$ 是最不具代表性的,應以 $\Delta t \leq 0.05(C=0.35)$ 的來代表無交錯項者。圖8顯示納入交錯項後,如S83、S84所言是一穩定的方法,然而在沒有加入交錯項時,注意其區域CFL數不可太大,雖然沒有納入交錯項也會是一穩定的方法。圖9大約和圖8相同,唯圓錐較圖8遠離邊界8個網格點在 $(0, -17)$ 處,較圖8少受邊界影響一些。因為受邊界影響程度不同,所以圖9呈現和圖8幾個些許差異及共同的特點。一是在 Δt 很小時,有無交錯項二者的差別並不大(圖8也指出此點)。二是有交錯項的D線($\Delta t_{max} = 0.12(C=0.84)$),比沒有交錯項的B線($\Delta t_{max} = 0.1(C=0.7)$)有較寬的穩定度限制,此特點和圖8類近,唯一不同的是,圖9 D線的 $\Delta t_{max} = 0.12(C=0.84)$,比圖8 D線的 $\Delta t_{max} = 0.11(C=0.77)$ 稍大。 Δt_{max} 的大小對同一數值方法而言,應只受限於max.CFL數,圖8及圖9有相同的max. CFL數,其 Δt_{max} 對同一條線而言應相同,然而二圖在計算精確度的些微差異,所以C、D線的 Δt_{max} 有些許不同。三是二次校正的結果(B、D線),比一次校正的結果(A、C線)有較佳的精確度(此特點和圖8不同,圖8因為受邊界影響較大, $\Delta t \geq 0.07(C=0.49)$ 沒有交錯項部分二次校正的B線,比一次校正的A線有較大的誤差)。由圖8及圖9的B線二者都共同指出, $\Delta t \geq 0.07(C=0.49)$ 圓錐已受邊界很大影響(由二圖上方圓錐中心極大值的大幅跳升可知)。

擴大研究的範圍,應可減少邊界的影響,圖10及圖11即是將圖8及圖9東西南北方各增加20個網格點,亦即研究範圍由 $(x, y) \in [-50, 50] \times [-50, 50]$ 擴大到 $(x, y) \in [-70, 70] \times [-70, 70]$,其餘部份圖10和圖8約同、圖11和圖9大約相同。比較圖8及圖10,很明顯的因為二圖的max. CFL數不同,所以就B線而言,圖8的 $\Delta t_{max} = 0.1(C=0.7)$ 而圖10的 $\Delta t_{max} = 0.07(C=0.69)$,圖10的max. CFL數和圖8約相同,而圖10的 $|\vec{V}_{max}|$ 較大,所以對同一數值方法而言,圖10所能用的 Δt_{max} 比圖8來得小。另外由圖10及圖8二圖上方兩行圓錐中心極大值,我們發現對同一條線,相同的 Δt 有相同的圓錐中心極大值。圖8及圖10唯一相同的是有相同的區域CFL數,因此我們得知,一般而言圓錐探討的精確度對同一數值方法,只和區域CFL數相關,而max. CFL數則只關係著 Δt_{max} 的大小。另外由圖10、圖11,二圖上頭兩行圓錐中心極大值似乎指出,圓錐初始位置愈靠近研究範圍的中心,研究結果精確度愈高,也就是說區域CFL數愈小,圓錐中心極大值愈佳。因此圖12是 $(x, y) \in [-70, 70] \times [-70, 70]$ 的研究範圍沒有納入交錯項,圓錐繞6圈, x 軸為圓錐中心距邊界的點數, y 軸為圓錐中心極大值,A、B、...G為 $\Delta t=0.07、0.06 \dots 0.01$ 的結果。當使用較小的 Δt (如 $\Delta t = 0.01(C \sim 0.099)$ 的G線),圓錐由研究範圍的內部往外移精確度漸減,圓錐中心極大值幾乎呈線性遞減,然而當使用較大的 Δt (如D線 $\Delta t = 0.04(C \sim 0.395)$),起初圓錐中心極大值隨圓錐外移仍下降,後來圓錐過於接近邊界,受到邊界的影響,在 $x \leq 31$ 圓錐中心極值不減反增,當使用最大的 $\Delta t(=0.07)(C=0.69)$,僅於 $x \leq 49$ 就受到邊界極大的影響,圓錐中心極大值即大幅跳升。圖12似乎是檢驗圓錐平流結果,是否受到邊界影響的好方法,圓錐中心極大值的大小,隨區域CFL數的增加會降低,只有圓錐的平流結果受到邊界反射的影響,圓錐中心極大值的大小才會增加。圖13和圖12大約相同,唯是 $(x, y) \in [-50, 50] \times [-50, 50]$ 較

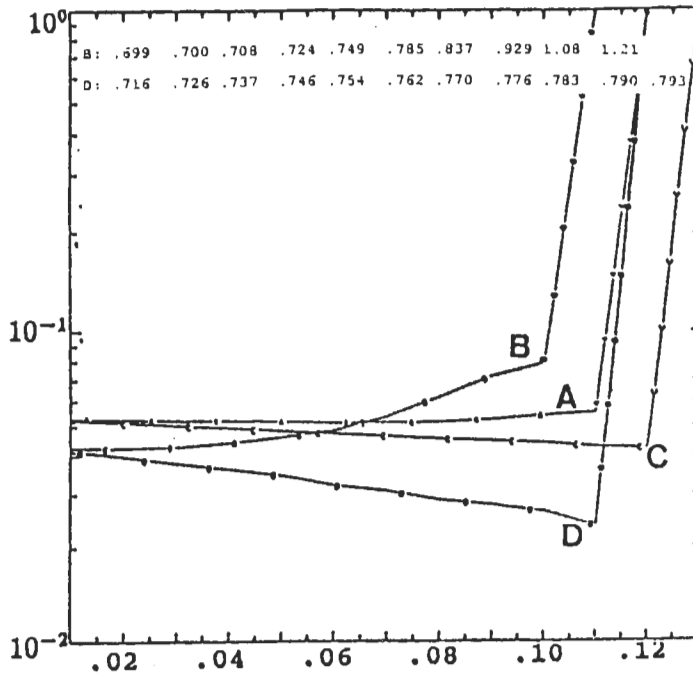


圖8 x軸是 Δt , Δt 愈大CFL數也愈大, A、B線是無交錯項經一、二次校正, C、D線是有交錯項經一、二次校正的穩定度探討。圓錐位於(0,-25), 圖上端兩行數字是B、D線圓錐繞6圈後波形中心的極大值。 $\Delta t = 2^x$ 。

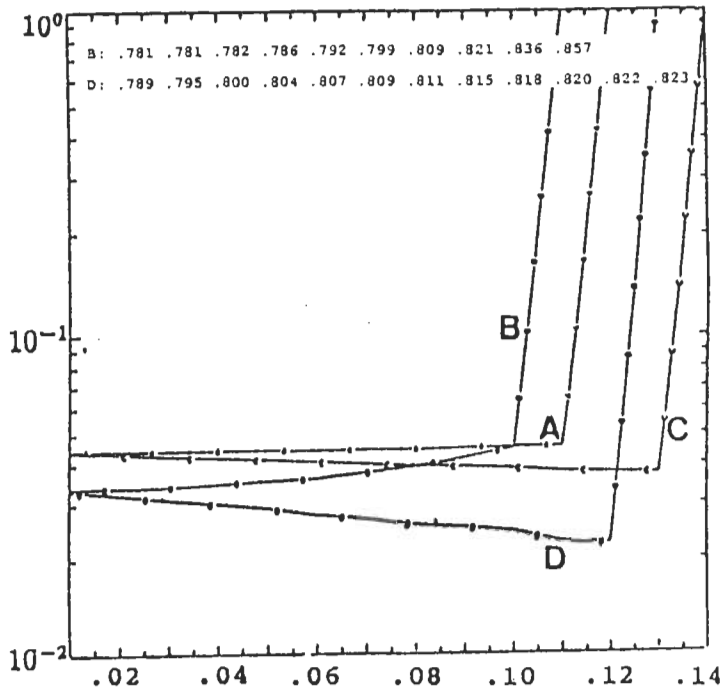


圖9 和圖8約同, 唯圓錐往上移8格於(0,-17)。

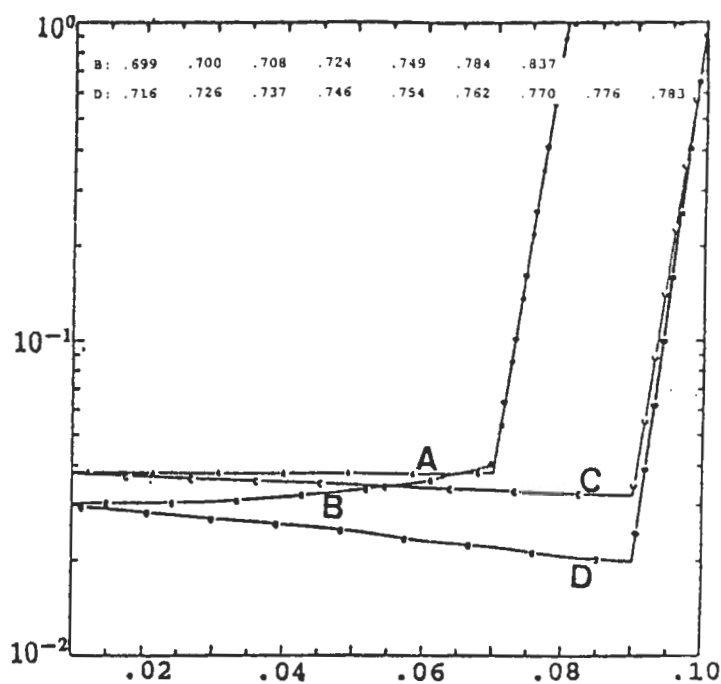


圖10 和圖8同，唯研究範圍由圖8的 $(x,y) \in [-50,50] \times [-50,50]$ ，放大到 $(x,y) \in [-70,70] \times [-70,70]$ 。

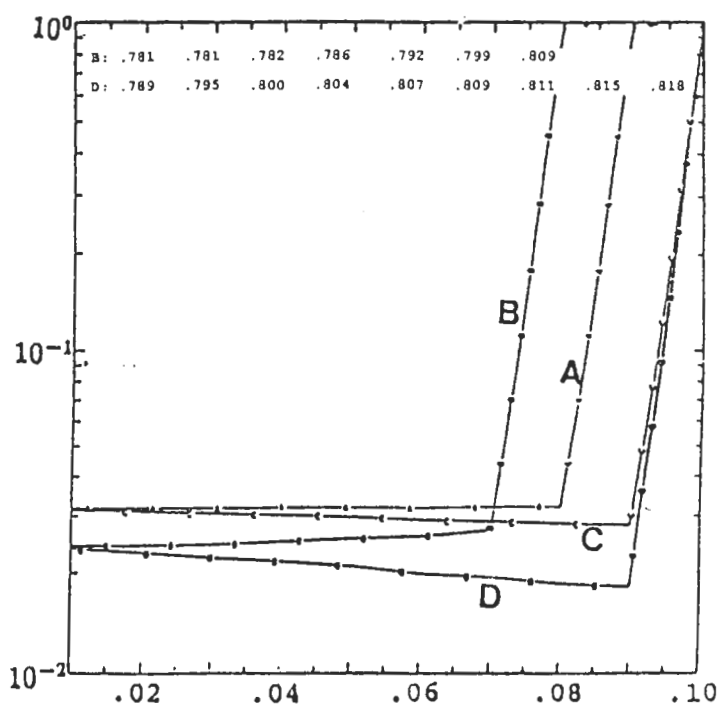


圖11 和圖9同，唯研究範圍由圖9的 $(x,y) \in [-50,50] \times [-50,50]$ ，放大到 $(x,y) \in [-70,70] \times [-70,70]$ 。

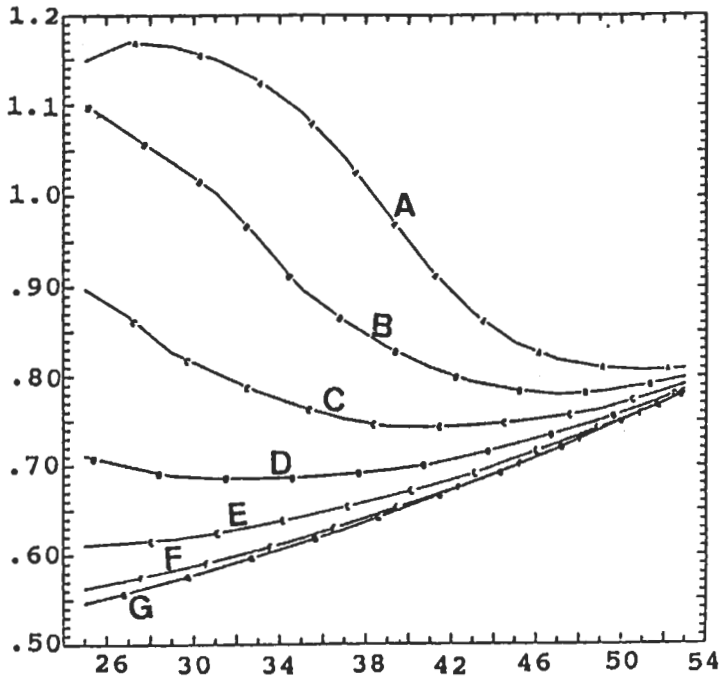


圖 12 x 軸指圓錐中心離邊界的點數，y 軸指圓錐繞 6 圈後中心的極大值，A 至 G 線分別指 $\Delta t=0.07、0.06、\dots、0.01$ 研究範圍為 $(x,y) \in [-70,70] \times [-70,70]$ ，為沒有納入交錯項圓錐繞 6 圈的結果。

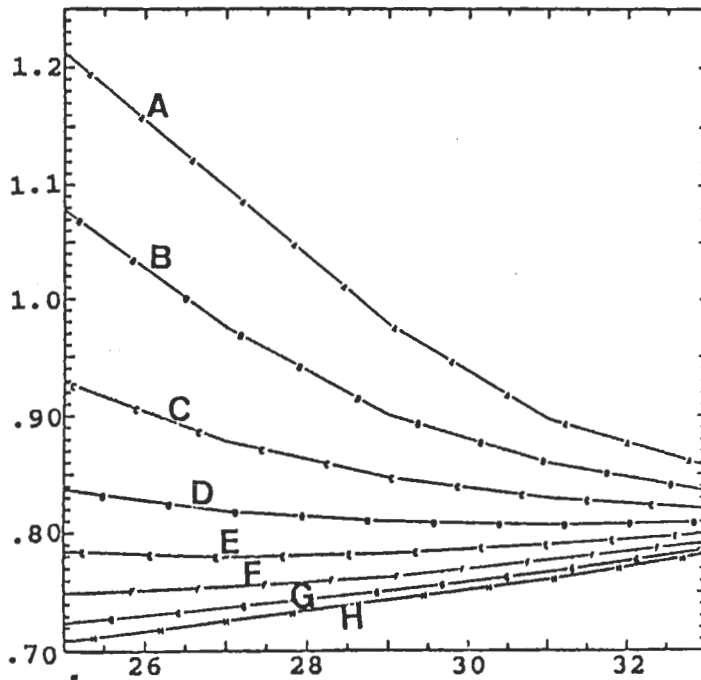


圖 13 和圖 12 約同，唯 A 至 H 線分別指 $\Delta t=0.1、0.09、0.08、\dots、0.03$ ，研究範圍為 $(x,y) \in [-50,50] \times [-50,50]$ 。

小研究範圍的結果。A、B...H線是 $\Delta t=0.1$ 、 0.09 、... 0.03 的研究結果。當 $\Delta t \geq 0.08$ ($C \geq 0.56$ 的有A、B、C三線)不論圓錐擺在研究範圍的何處，圓錐中心極大值都受了邊界影響，隨區域CFL數增加(離邊界愈近)而增加， $\Delta t = 0.1$ 的A線，其 $x = 25$ 正是S83圖12所使用的 Δt 及圓錐所在位置，是極受邊界反射影響很不好的結果。圖13也指出若使用Smolarkiewicz不納入交錯項的方法，必須 $\Delta t \leq 0.05$ ($C \leq 0.35$ 的有F、G、H三線)，才能使研究結果免除邊界的干擾。圖14和圖13約同，唯圖14是有納入交錯項，圖中顯示，當Smolarkiewicz法納入交錯項後，無論 Δt 的使用大小及圓錐位於研究範圍何處，都不受邊界影響，是一穩定的數值平流方法。圖15和圖13約同，唯是分離法的結果。分離法的執行多維運算方式，除了可以使用比直接二維運算較大的 Δt 外，亦自動包含交錯項的效應，可以免除二維處理時，考慮交錯項是否納入的困擾。

四、結論

Smolarkiewicz(1982)指出一數值平流方法應納入交錯項而未納入者，是一不穩定法。同時也說明當Smolarkiewicz法未加入交錯項時，校正步驟不可重覆執行，因為重覆執行會擴大未加入交錯項的缺點而產生不穩定。我們針對Smolarkiewicz法交錯項加入與否、圓錐初始位置的改變、穩定度的探討以及邊界的影響進行多方面的探討與補充。研究結果指出有納入交錯項的Smolarkiewicz法如作者所言是一穩定的方法，而對於Smolarkiewicz法沒有加入交錯項的部份，只要使用較小之 Δt 及圓錐遠離邊界，或者縮短積分時間，雖然Smolarkiewicz法沒有納入交錯項，也會是一穩定的方法。以上這些結果，總結於圖13至圖15，這是S83、S84所沒有的重要補充，此外我們亦更正了S84之多維公式的錯誤。最後我們總結本文之結論如下：

1. Smolarkiewicz法納入交錯項比沒有加入交錯項，有較寬的穩定度限制及稍好的精確度，亦即在相同的研究條件下，有交錯項者比沒有交錯項者，可以使用較大的 Δt (約大29%)。
2. 當使用很小的 Δt 時(CFL數很小)，有無交錯項的結果很相近，二者有近乎相同的精確度。一般天氣系統的噴流帶其風速都較大，250mb的噴流，風速可達100m/s左右，因此模式常使用過小的 Δt ，經由本章的探討，在過小的 Δt 情形下，交錯項的作用很小，沒有納入交錯項的Smolarkiewicz法在三階以上，因為計算項數較少，可以節省不少電腦運算時間。
3. Smolarkiewicz法沒有加入交錯項者比有納入交錯項者，較易受邊界的影響(因為沒有加入交錯項比有交錯項者，有較大的頻散誤差，圓錐隨積分時間變大，則容易受邊界影響)。
4. max. CFL數關係到一數值方法所能使用的 Δt_{max} ，區域CFL數則和圓錐模擬結果的精確度及中心極大值相關。
5. 以分離法的執行多維Smolarkiewicz法之運算方式，除了可以使用比直接二維運算較大的 Δt 外，亦自動包含交錯項的效應，可以免除二維處理時，考慮交錯項是否納入的困擾。在高階多維計算，分離法可以節省許多計算時間。此外在同樣情形下，較大的 Δt 可以維持較好的極值。

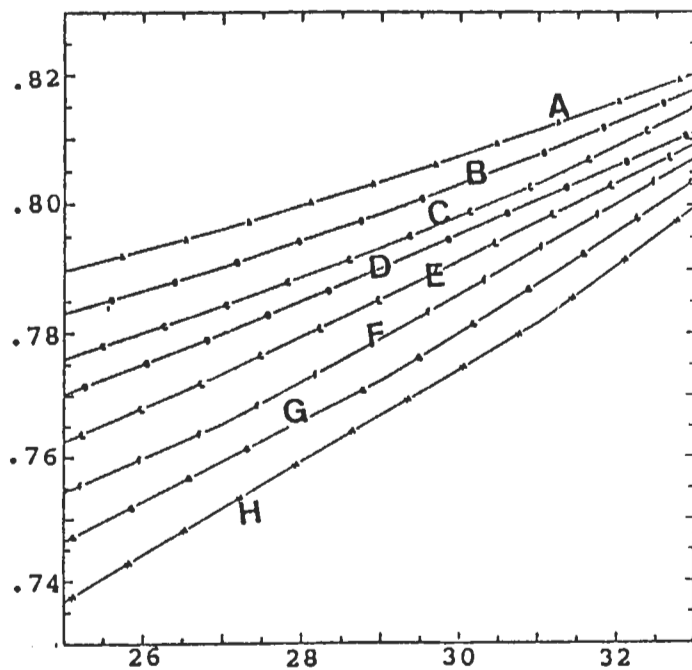


圖14 和圖13約同，唯是有納入交錯項。

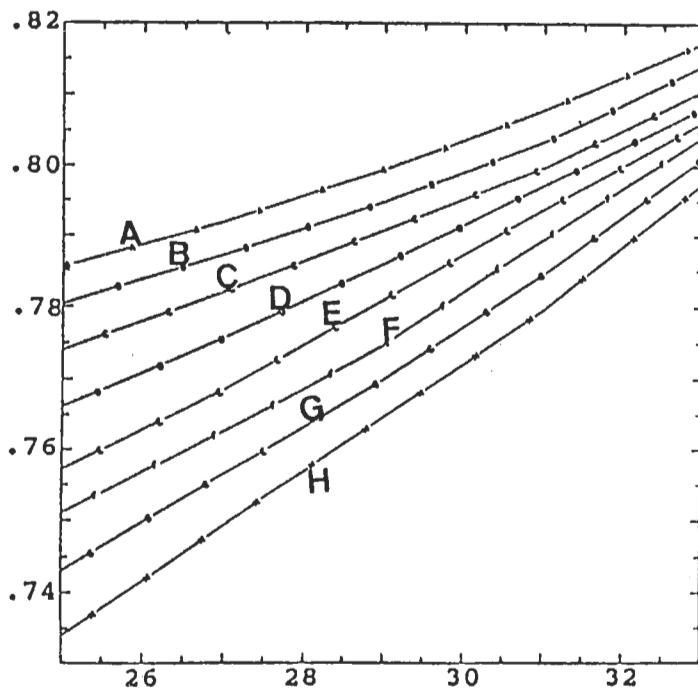


圖15 和圖13約同，唯是分離法的結果。

誌謝

本文在國家科學委員會專案計劃NSC83-0202-M-002-058支援下完成。

參考文獻

柳再明, 1993: 正定義數值方法的探討。國立臺灣大學大氣科學所博士論文。300頁。

Crowley, W. P., 1968: Numerical advection experiments. *Mon. Wea. Rev.*, **96**, 1-11.

Hsu, Y.-J., and A. Arakawa, 1990: Numerical modeling of the atmosphere with an isentropic vertical coordinate. *Mon Wea. Rev.*, **118**, 1933-1959.

Smolarkiewicz, P. K., 1982: The multidimensional Crowley advection scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **110**, 1968-1983.

Smolarkiewicz, P. K., 1983: A simple positive definite advection scheme with small implicit diffusion. *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 479-486.

Smolarkiewicz, P. K., 1984: A fully multidimensional positive definite advection transport algorithm with small implicit diffusion. *J. Comput. Phys.*, **54**, 325-362.

附錄

這部份方程式的編號, 依據 Smolarkiewicz(1984) 文中所載, 以求其一致。Smolarkiewicz(1984) 以連續方程(1)來推導 Smolarkiewicz 法

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^M \frac{\partial}{\partial x^i} (\psi u^i) = 0 \quad (1)$$

這裡 M 指 M 維空間, $\psi = \psi(t, x^1, \dots, x^M)$ 是被平流場, 不為負值。

$u^I = u^I(t, x^1, \dots, x^M)$ 是第 I 個速度分量, $I = 1, \dots, M$ 。

$t, x = (x^1, \dots, x^M)$ 是時間與空間的獨立變數。

ψ_i^n 是方程式(1)在 (t^n, x_i) 網格位置的數值解。

這裡, $t^n = n\Delta t$, $x_i = (i^1\Delta x^1, i^2\Delta x^2, \dots, i^M\Delta x^M)$; $n = 0, \dots, NT$; $i^I = 0, \dots, NX^I$ 且 Δx^I 是 I 方向的網格距。大寫如 " I, J ," 指分量, 下標小寫如 " i, j ," 指網格位置。

$e_I = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ 是 I 方向的單位向量。

$u_{i+\frac{1}{2}e_I}^I$ 指在 I 方向, $\frac{1}{2}\Delta X^I$ 交錯網格點上的第 I 個速度分量。

ψ^* 為預報階段後之 ψ 場。

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{i+(1/2)e_I}^I &= \left[|u_{i+(1/2)e_I}^I| \Delta X^I - \Delta t (u_{i+(1/2)e_I}^I)^2 \right] \times \frac{\psi_{i+e_I}^* - \psi_i^*}{(\psi_{i+e_I}^* - \psi_i^* + \varepsilon) \Delta X^I} \\ &\quad - \sum_{J=1, J \neq I}^M 0.5 \Delta t u_{i+(1/2)e_I}^I \bar{u}_{i+(1/2)e_I}^J \\ &\quad \times \frac{\psi_{i+e_I+e_J}^* + \psi_{i+e_I}^* - \psi_{i+e_I-e_J}^* - \psi_{i-e_J}^*}{(\psi_{i+e_I+e_J}^* + \psi_{i+e_I}^* + \psi_{i+e_I-e_J}^* + \psi_{i-e_J}^* + \varepsilon) \Delta X^J}, \end{aligned} \quad (13)$$

這裡

$$\bar{u}_{i+(1/2)e_I}^J = 0.25 (u_{i+e_I+(1/2)e_J}^J + u_{i+(1/2)e_I}^J + u_{i+e_I-(1/2)e_J}^J + u_{i-(1/2)e_I}^J), \quad (14)$$

$$\tilde{u}_{i+(1/2)e_I}^I = (\tilde{u}_{i+(1/2)e_I}^I)_{Eq.(13)} + \hat{u}_{i+(1/2)e_I}^I, \quad (35)$$

這裡

$$\begin{aligned} \hat{u}_{i+(1/2)e_I}^I &= -\frac{1}{3} (u_{i+(1/2)e_I}^I (\Delta X^I)^2 - (u_{i+(1/2)e_I}^I)^3 \Delta t^2) \\ &\quad \times \frac{(\psi_{i-e_I}^* - \psi_i^* - \psi_{i+e_I}^* + \psi_{i+2e_I}^*)}{(\text{sum of the above terms} + \varepsilon) (\Delta X^I)^2} \\ &\quad + \sum_{J=1, J \neq I}^M \Delta t^2 (u_{i+(1/2)e_I}^I)^2 \bar{u}_{i+(1/2)e_I}^J \\ &\quad \times \frac{\psi_{i+e_I+e_J}^* - \psi_{i+e_I-e_J}^* - \psi_{i+e_I}^* - \psi_{i-e_J}^*}{(\text{sum of the above terms} + \varepsilon) \Delta X^I \Delta X^J} \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{J=1, J \neq I}^M u_{i+(1/2)e_I}^I \bar{u}_{i+(1/2)e_I}^J \sum_{L=1, L \neq J \neq I}^M \bar{u}_{i+(1/2)e_I}^L \\ &\quad \times \frac{\psi_{i+e_I+e_L}^* - \psi_{i-e_J+e_L}^* - \psi_{i+e_I-e_L}^* + \psi_{i-e_J-e_L}^* + \psi_{i+e_I+e_L+e_J}^* - \psi_{i+e_I+e_L-e_J}^* - \psi_{i+e_I+e_J-e_L}^* - \psi_{i+e_I-e_J-e_L}^*}{(\text{sum of the above terms} + \varepsilon) \Delta X^I \Delta X^L}. \end{aligned} \quad (36)$$

以上四個方程式 (13)、(14)、(35) 及 (36) 是 Smolarkiewicz (1984) 文中, 對 Smolarkiewicz 高階法三維處理所推導的公式。(36) 式中大致有三大項, 第二大項和我們所推導的不同, 少了常數 $\frac{1}{2}$, 而且第二大項的最後一小項 $-\psi_{i-e_J}^*$, 應該是正的, 為 $+\psi_{i-e_J}^*$, 所以我們認為第二大項應改成

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{2} \sum_{J=1, J \neq I}^M \Delta t^2 (u_{i+(1/2)e_I}^I)^2 \bar{u}_{i+(1/2)e_I}^J \\ &\quad \times \frac{\psi_{i+e_I+e_J}^* - \psi_{i+e_I-e_J}^* - \psi_{i+e_I}^* + \psi_{i-e_J}^*}{(\text{sum of the above terms} + \varepsilon) \Delta X^I \Delta X^J}. \end{aligned} \quad (A.1)$$

根據柳再明 (1993) 文中, 附錄 E Smolarkiewicz 法三維定差形式的推導, 我們認為方程式 (36) 漏了一項, 依據其公式的寫法, 我們將它寫在下面

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3}{4} \sum_{J=1, J \neq I}^M \Delta t^2 u_{i+(1/2)e_I}^I (\bar{u}_{i+(1/2)e_I}^J)^2 \\
 & \times \frac{(\psi_{i+e_I+e_J}^* + \psi_{i+e_I-e_J}^* + \psi_{i+e_J}^* + \psi_{i-e_J}^* - 2\psi_{i+e_I}^* - 2\psi_i^*)}{(\psi_{i+e_I+e_J}^* + \psi_{i+e_I-e_J}^* + \psi_{i+e_J}^* + \psi_{i-e_J}^* + \psi_{i+e_I}^* + \psi_i^* + \varepsilon)(\Delta X^J)^2}.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

(36)式的最後一大項少乘了 Δt^2 ，而且項中後半部的八小項裡，有五個負項，只有三個正項，一般而言，正負項數會相等(數值中差法的特性)，最後小項 $-\psi_{i+e_I-e_J-e_L}^*$ 應為正的，為 $\psi_{i+e_I-e_J-e_L}^*$ ，所以正確的(36)式應為

$$\begin{aligned}
 \hat{u}_{i+(1/2)e_I}^I & = -\frac{1}{3}(u_{i+(1/2)e_I}^I (\Delta X^I)^2 - (u_{i+(1/2)e_I}^I)^3 \Delta t^2) \\
 & \times \frac{(\psi_{i-e_I}^* - \psi_i^* - \psi_{i+e_I}^* + \psi_{i+2e_I}^*)}{(\text{sum of the above terms} + \varepsilon)(\Delta X^I)^2} \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{J=1, J \neq I}^M \Delta t^2 (u_{i+(1/2)e_I}^I)^2 \bar{u}_{i+(1/2)e_I}^J \\
 & \times \frac{\psi_{i+e_I+e_J}^* - \psi_{i+e_I-e_J}^* - \psi_{i+e_J}^* + \psi_{i-e_J}^*}{(\text{sum of the above terms} + \varepsilon) \Delta X^I \Delta X^J} \\
 & + \frac{3}{4} \sum_{J=1, J \neq I}^M \Delta t^2 u_{i+(1/2)e_I}^I (\bar{u}_{i+(1/2)e_I}^J)^2 \\
 & \times \frac{(\psi_{i+e_I+e_J}^* + \psi_{i+e_I-e_J}^* + \psi_{i+e_J}^* + \psi_{i-e_J}^* - 2\psi_{i+e_I}^* - 2\psi_i^*)}{(\psi_{i+e_I+e_J}^* + \psi_{i+e_I-e_J}^* + \psi_{i+e_J}^* + \psi_{i-e_J}^* + \psi_{i+e_I}^* + \psi_i^* + \varepsilon)(\Delta X^J)^2} \\
 & + \frac{1}{3} \sum_{J=1, J \neq I}^M \Delta t^2 u_{i+(1/2)e_I}^I \bar{u}_{i+(1/2)e_I}^J \sum_{L=1, L \neq J \neq I}^M \bar{u}_{i+(1/2)e_I}^L \\
 & \times \frac{\psi_{i+e_J+e_L}^* - \psi_{i-e_J+e_L}^* - \psi_{i+e_J-e_L}^* + \psi_{i-e_J-e_L}^* + \psi_{i+e_I+e_L+e_I}^* - \psi_{i+e_I+e_L-e_J}^* - \psi_{i+e_I+e_J-e_L}^* + \psi_{i+e_I-e_J-e_L}^*}{(\text{sum of the above terms} + \varepsilon) \Delta X^J \Delta X^L}.
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

(A.3)才是三維Smolarkiewicz三階法正確的公式。

The Spatial Cross Derivative Terms in the Smolarkiewicz Positive Definite Scheme

Tzay-Ming Leou¹ Hung-Chi Kuo²

¹Computer Center Central Weather Bureau

²Department of Atmospheric Sciences
National Taiwan University

ABSTRACT

Smolarkiewicz pointed out that the multi-dimensional numerical advection scheme without the spatial cross derivative terms is an unstable scheme. We explore the impact of the spatial cross derivative terms in the Smolarkiewicz method. Both the analytical Taylor expansion and numerical calculations in two dimension are used in the study. Our results indicate that the Smolarkiewicz method without the cross terms can be a stable scheme if not too large Δt is used or the position of the advected cone is not too near the computational boundary. Splitting process allow the usage of a larger Δt than the multi-dimensional calculations with the cross terms. In addition, the splitting process involves the cross spatial derivative terms automatically in the calculation. The main results of our work are summarized in fig.13 ,14 and 15, which complement the Smolarkiewicz results of 1983 and 1985. We also give the correct multi-dimensional cross spatial derivative terms for the Smolarkiewicz method.

Key Words : cross derivative terms, positive definite scheme