中緯度斜壓波發展的原理：能量轉換的觀點

徐忠民　　夏鴻志

空軍氣象中心　　空軍第七天氣中心

一、前言

太陽透過輻射現象，對地球大氣產生加熱作用，供給大氣內能，再透過靜力平衡之關係，把內能轉換成位能，如果水平方向有位能差的梯度，則一部分的位能便會轉換成動能，此乃大氣運動的基本近似。所以太陽輻射是地球大氣運動的能量來源，透過太陽輻射，赤道地區愈來愈熱，極區則愈來愈冷，相差至某一程度時，開始潰散，使某些空氣往北，某些空氣往南，透過此形式達到能量的交換，同時亦維持地球大氣的角動量守恒，這整個過程即所謂斜壓不穩定；所產生的波動，便稱之爲斜壓波。本文即以能量轉換的觀點來探討斜壓波發展的原理。

二、渦度定理

考慮不可壓縮流體的大尺度運動，假設運動是以水平爲主，則運動方程式可寫成

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\omega\frac{\partial u}{\partial z}=fv-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+F_x \qquad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\omega\frac{\partial v}{\partial z}=fu-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+F_y \qquad (2)$$

因爲水平運動具有垂直的渦度，故渦度（ζ）爲

$$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

$\frac{\partial(2)}{\partial x}-\frac{\partial(1)}{\partial y}$ 可得

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\omega\frac{\partial \zeta}{\partial \zeta}\cdot+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$
$$=-f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-v\frac{df}{dy}-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

$$\zeta\equiv\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\ D\equiv\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\alpha=\frac{1}{\rho}$$

其中D爲輻散量，α爲比容，ρ爲密度，F爲摩擦力，f爲科氏參數

$$\therefore\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\omega\frac{\partial \zeta}{\partial z}+v\frac{df}{dy}$$
$$=-(f+\zeta)D-\left(\frac{\partial \omega}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial \omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial \alpha}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \tag{3}$$

(3)式即渦度方程式（Vorticity Equation），可以描述相對渦度隨時間的變化。因爲科氏參數僅爲緯度之函數，即 $f=f(y)$，故(3)式亦可寫成另一表示法，

$$\frac{d}{dt}(f+\zeta)=-(f+\zeta)D \quad \text{(A)}$$

$$-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\upsilon}{\partial z}-\frac{\partial\omega}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial z}\right) \quad \text{(B)}$$

$$-\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial x}\right) \quad \text{(C)}$$

$$+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \quad \text{(D)} \tag{4}$$

f 爲環境渦度（Ambient Vorticity），即在相對系統中，任何一空氣塊對於相對系統而言是完全靜止的話，而相對系統是在轉，所以空氣塊相對自轉系統是靜止，在絕對系統中是在轉，此即環境渦度，簡單的說，即任何一空氣塊在自轉系統中本身具有的渦度。ζ 爲相對渦度（Relative Vorticity）即空氣塊本身在自轉系統中相互運動，即由風速（u，υ）造成的運動所產生的渦度。

由(4)式告訴我們，（$f+\zeta$）即爲絕對渦度，也就是相對一慣性系統中所具有之渦度。(4)式即爲絕對渦度隨時間之變化，由A、B、C、D四項所造成；

A項：水平輻散（合）效度（渦管伸縮效應）。

B項：渦管的傾側效應。

C項：力管效應。

D項：摩擦效度。

若考慮等壓面上的渦度變化，此時運動方程可寫爲（省略摩擦項）

$$\frac{du}{dt}-f\upsilon=-\frac{1}{f}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{5}$$

$$\frac{d\upsilon}{dt}+fu=-\frac{1}{f}\frac{\partial P}{\partial y} \tag{6}$$

對上面二式作適當處理，可得等壓面上之渦度方程式，

$\dfrac{\partial(6)}{\partial x}-\dfrac{\partial(5)}{\partial y}$ 可得

$$\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)_P+u\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_P+\upsilon\left(\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)_P+\omega\frac{\partial\zeta}{\partial P}$$

$$=-(f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\right)_P-\frac{df}{dy}\upsilon$$

$$+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_P\frac{\partial u}{\partial P}-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_P\frac{\partial\upsilon}{\partial P}$$

$$\frac{d}{dt}(f+\zeta)=$$

$$-(f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\right)_P \quad \text{(A)}$$

$$+\left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)_P\frac{\partial u}{\partial P}-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)_P\frac{\partial\upsilon}{\partial p}\right] \quad \text{(B)} \tag{7}$$

(7)式即等壓面上之渦度方程式，式中(A)項爲渦管的伸縮，(B)項爲傾側效應。然而在上式中並無力管項，但此項仍是存在的，乃是包含在渦管的伸縮項中，即輻散項內。因爲在討論等壓面上的高度時，乃是由於空氣柱的厚度所形成，在提到壓力項（P－ζP）時，已將密度（ζ）之變化考慮在內，也就是說，坐標系的本身已考慮密度之變化。更何況在中小尺度，等壓坐標並不適用，但此刻力管項卻很重要。但對大尺度來說，在靜力平衡的前提下，（x、y、p）坐標適用，但力管項卻可省略，所以此處之力管項即隱含在水平的輻合（散）中，如風場（u，υ，ω）中均已隱含。而傾側項的效果是垂直速度場使水平向的渦管發

生偏斜而成爲垂直向的渦管（垂直向的分量）。對於大尺度而言，傾側項可忽略不計，但對於小尺度時，此項便非常重要，通常在水平尺度小時，才顯得出來。

由上可知，大尺度運動下之渦度方程式爲

$$\frac{d}{dt}(f-\zeta)=-(f+\zeta)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon}{\partial y}\right) \tag{8}$$

對於大尺度，力管項和摩擦項不重要，僅有緯度效應和輻合輻散效應重要，且大尺度是呈地轉平衡的，即

$$\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}_g=\hat{K}\times\frac{\nabla\Phi}{f} \tag{9}$$

Φ爲重力位

$$\because \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\upsilon}{\partial y}=-\frac{\partial\omega}{\partial P}$$

故(8)式可寫成

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial}{\partial y}(f+\zeta)$$

$$=(f+\zeta)\frac{\partial\omega}{\partial P} \tag{8a}$$

對於大尺度而言，相對渦度隨時間的變化主要是由於渦管的抽長和縮短的作用所致，即渦管的面積會隨時間而變化，例如面積縮小，即有輻合，即如低氣壓風場的向內；但然而若是地轉平衡，則風不會向內，面積不會改變，則渦管不會伸縮；因此，唯一造成渦管的伸縮，必定是由非地轉項造成的，可是運動基本上是地轉平衡的。因此，透過準地轉近似（Quasi-Geostrophic Approximation），即把運動中每一運動項均用地轉風來處理，但除了會造成渦管抽拉作用的那一項之外，所以(8a)式可寫成

$$\frac{\partial\zeta_g}{\partial t}+u_g\frac{\partial\zeta_g}{\partial x}+\upsilon_g\frac{\partial}{\partial y}(f+\zeta_g)$$

$$=(f+\zeta_g)\frac{\partial\omega}{\partial P} \tag{10}$$

$$\vec{\upsilon}_g=\hat{k}\times\frac{\nabla\Phi}{f_o}$$

$$\zeta_g=\hat{K}\cdot\nabla\times\upsilon_g=\frac{1}{f_o}\nabla^2\Phi \tag{11}$$

f_o爲所在緯度的平均科氏參數。由熱力學第一定律（絕熱）及靜力方程可得(12)式，

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial T}{\partial y}-S_P\omega$$

$$=\frac{\dot{Q}}{C_P}=0 \quad ,$$

$$S_P\equiv-T\frac{\partial\ln\theta}{\partial P}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial P}=-\frac{RT}{P}$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)=-\vec{\upsilon}_g\cdot\nabla\left(-\frac{\partial\Phi}{\partial P}\right)$$

$$+S\omega \tag{12}$$

$$S\equiv\frac{R}{P}S_P=-\frac{\alpha}{\theta}\frac{\partial\theta}{\partial P}$$

S爲大氣靜力穩定度參數；將地轉風場寫成流函數形式，

$$u_g=-\frac{\partial\phi}{\partial y},\ \upsilon_g=\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$\therefore\zeta_g=\frac{\partial\upsilon_g}{\partial x}-\frac{\partial u_g}{\partial y}=\nabla^2\phi=\frac{1}{f}\nabla^2\Phi \tag{13}$$

$$\therefore\phi=\frac{\Phi}{f_o} \tag{14}$$

(14)式可表現流函數與重力位之關係，即在地轉平衡狀況下，地轉風沿著等壓面高度吹，而等壓面高度即重力位高度，即表示沿壓面上吹的就是流線，流線場平行於等高線。將(14)式代入(10)及(12)式中，

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi=-\vec{\upsilon}_g\cdot\nabla(f+\nabla^2\phi)$$

$$+f_o\frac{\partial\omega}{\partial P} \qquad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial P}\right)=-\vec{\upsilon}_g\cdot\nabla\left(-\frac{\partial\phi}{\partial P}\right)$$

$$+\frac{S}{f_o}\omega \qquad (16)$$

(15)式中，某一定點相對渦度隨時間之變化（$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi$），乃是由絕對渦度平流（$-\vec{\upsilon}_g\cdot\nabla(f+\nabla^2\phi)$）及垂直速度在垂直方向的改變（$f_o\frac{\partial\omega}{\partial P}$）二項而來。絕對渦度平流由地轉風所平流；f 爲環境渦度，假如地轉風爲南北向，如有北風之地轉風，有空氣從北邊下來，而北邊之環境渦度要大於南邊的，所以此時$-\vec{\upsilon}_g\cdot\nabla f$爲正值，而使這一定點之相對渦度增加；同樣的，對於相對渦度，若北方之相對渦度大，則亦會使此點之相對渦度增加，因爲$-\vec{\upsilon}_g\cdot\nabla(\nabla^2\phi)$爲正值。此外，如果垂直速度在垂直方向發生變化的話，則渦管會有伸縮作用，而使此一定點之相對渦度發生變化。

(16)式中，$-\frac{\partial\phi}{\partial P}$即爲厚度，也就是溫度，$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\phi}{\partial P}\right)$即爲溫度隨時間的變化，乃是由相對渦度所造成的溫度平流（$-\vec{\upsilon}_g\cdot\nabla\left(-\frac{\partial\phi}{\partial P}\right)$）及垂直速度所造成溫度之變化（$\frac{S}{f_o}\omega$），即如有向上的垂直速度，會造成絕熱膨脹，而使溫度下降；如有向下的垂直速度，會造成絕熱壓縮，而使溫度上升；所以此項即爲絕熱膨脹或壓縮所造成之溫度變化。

三、二層模式運算處理

現將大氣分爲二層，即二層模式，如圖 1 所示：

如果地面與P_o等壓線重疊的話，$\omega_5=0$；大氣的上限$\omega_1=0$；(15)式表示相對渦度隨時間之變化，即表示大氣的運動，而我們利用二層模式來處理，即將此運動項放在第 2，4 階，可表示第 I 層和第 II 層之平均運動狀況；而

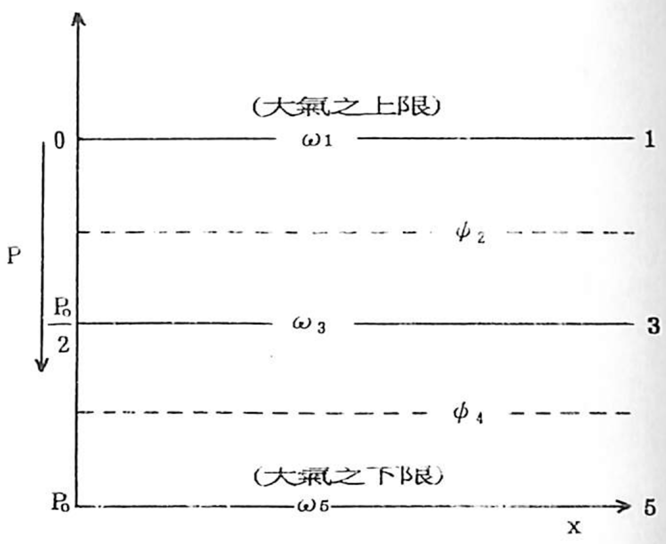


圖 1　大氣二層模式示意圖

(16)式溫度方面之變化，主要是由垂直速度所造成的，故將其放在第 3 階。根據上面的處理，方程式可改寫如下；

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi_2=-\vec{\upsilon}_{g2}\cdot\nabla(f+\nabla^2\phi_2)$$

$$+f_o\left(\frac{\partial\omega}{\partial P}\right)_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi_4=-\vec{\upsilon}_{g4}\cdot\nabla(f+\nabla^2\phi_4)$$

$$+f_o\left(\frac{\partial\omega}{\partial P}\right)_4$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-\left(\frac{\partial\phi}{\partial P}\right)_3\right)=-\vec{\upsilon}_{g3}\cdot\nabla\left(-\left(\frac{\partial\phi}{\partial P}\right)_3\right)$$

$$+\frac{S}{f_o}\omega_3$$

先求（$\frac{\partial\omega}{\partial P}$）$_2$項，利用泰勒展開式，即利用第 2 階的$\omega$作爲參考，計算第 1，3 階的$\omega$值；同樣，可利用第 4 階的計算第 3，5 階的$\omega$值。方程式可寫成

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi_2=-\vec{\upsilon}_{g2}\cdot\nabla(f+\nabla^2\phi^2)$$

$$+f_o\frac{\omega_3}{\Delta P} \qquad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi_4=-\vec{\upsilon}_{g4}\cdot\nabla(f+\nabla^2\phi^4)$$

$$+f_o\frac{\omega_3}{\Delta P} \qquad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\phi_4=-\vec{\upsilon}_{g3}\cdot\nabla(\phi_2-\phi_4)$$

$$+\frac{S}{f_o}\omega_3\nabla P \qquad (19)$$

現在要解的便是(17)，(18)，(19)式，假設此二層分別有一平均風場U_2，U_4，所以流線函數可寫成

$$\phi_2=\overline{\phi}_2+\phi_2$$

而平均之流函數必須能代表此層的平均風速，由前面可知，

$$u=-\frac{\partial\phi}{\partial y}\quad,\therefore\phi=-uy$$

即

$$\overline{\phi}_2=-U_2y$$

換句話說，(17)，(18)，(19)式中之ϕ_2，ϕ_4可寫成

$$\phi_2=-U_2y+\phi_2'(x,t)$$
$$\phi_4=-U_4y+\phi_4'(x,t)$$
$$\omega_3=\overline{\omega}_3+\omega_3'$$

代入(17)，(18)式中

因爲沒有地形效應，所以$\overline{\omega}_3=0$；假設在 2，4 階僅有 X 方向之平均風速，即$V_2=0$，並假設是小擾動，故可將方程式線性化處理；

$$(17)\rightarrow\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\phi_2'}{\partial x}+\beta\frac{\partial\phi_2'}{\partial x}$$

$$=f_o\frac{\omega_3'}{\triangle P} \qquad (20)$$

$$(18)\rightarrow\left(\frac{\partial}{\partial t}+U4\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\phi_4'}{\partial x_2}+\beta\frac{\partial\phi_4'}{\partial x}$$

$$=-f_o\frac{\omega_3'}{\triangle P} \qquad (21)$$

$$(19)\rightarrow\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_m\frac{\partial}{\partial x}\right)(\phi_2'-\phi_4')$$

$$-U_T\frac{\partial}{\partial x}(\phi_2'+\phi_4')=\frac{S\triangle P}{f_o}\omega_3' \qquad (22)$$

其中$U_m=\frac{1}{2}(U_2+U_4)$，

$$U_T=\frac{1}{2}(U_2-U_4)$$

U_m即可代表整個大氣的平均風速。假設二層之平均風速不一樣，即$U_2\neq U_4$，表示有垂直的熱力風，如果$U_4>U_2$，即平均風速（地轉風）隨高度的增加而增大，表示具有南北向之溫度梯度，即南邊的空氣較暖，北邊的較冷。

四、斜壓波的發展

(20)，(21)式分別爲第2，4階之渦度方程式，也就是第 I、II 層的運動方程式而(22)式則爲介於此二層中那一階的熱力方程式。

以ϕ_2'乘(20)式可得

$$\underset{(A)}{\phi_2'\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\phi_2'}{\partial X^2}}+\underset{(B)}{U_2\phi_2'\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial^2\phi_2'}{\partial X^2}}$$

$$+\underset{(C)}{\beta\phi_2'\frac{\partial\phi_2'}{\partial X}}=\underset{(D)}{\frac{f_o}{\Delta P}\omega_3'\phi_2'}$$

將上式中各項對一波長水平均，即對上式取$\frac{1}{L}\int_o^L dx$，而$\frac{1}{L}\int_o^L(\quad)dx=\langle(\quad)\rangle$

經運算處理後，可得

$$(A)\rightarrow\frac{1}{L}\int_o^L\phi_2'\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\phi_2'}{\partial x^2}\right)dx$$

$$= \langle \frac{\partial}{\partial t}[\frac{1}{2}(\frac{\partial \phi'_2}{\partial x})^2] \rangle$$

$$(B) \to \frac{U_2}{L}\int_0^L \phi'_2 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2 \phi'_2}{\partial x^2} dx = 0$$

$$(C) \to \beta \frac{1}{L}\int_0^L \phi'_2 \frac{\partial \phi'_2}{\partial x} dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\phi'_2}{2}) dx = 0$$

$$(D) = \frac{1}{L}\int_0^L \frac{f_o}{\Delta P}\omega'_3 \phi'_2 dx = \frac{f_o}{\Delta P}\langle \omega'_3 \phi'_2 \rangle$$

所以，(1)式可寫成

$$\frac{\partial}{e t}\langle \frac{1}{2}(\frac{\partial \phi'_2}{\partial x})^2 \rangle = -\frac{f_o}{\Delta P}\langle \omega'_3 \phi'_2 \rangle \quad (23)$$

同樣，對(21)式取$\frac{1}{L}\int_0^L \phi'_4 dx$，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{1}{2}(\frac{\partial \phi'_4}{\partial x})^2 \rangle = \frac{f_o}{\Delta P}\langle \omega'_3 \phi'_4 \rangle \quad (24)$$

(23)+(24)

$$\to \frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{1}{2}(\frac{\partial \phi'_2}{\partial x})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial \phi'_4}{\partial x})^2 \rangle$$

$$= -\frac{f_o}{\Delta P} < \omega'_3 (\phi'_2 - \phi'_4) \quad (25)$$

定義大氣的總動能為

$$E'_K = \frac{1}{2}\langle (\frac{\partial \phi'_2}{\partial x})^2 + (\frac{\partial \phi'_4}{\partial x})^2 \rangle$$

$$(25) \to \frac{\partial E'_K}{\partial t} = -\frac{f_o}{\Delta P}\langle \omega'_3 (\phi'_2 - \phi'_4) \rangle \quad (26)$$

(26)表示在此模式中，波動動能之變化乃是由右邊項所造成；如果ω'_3與$\phi'_2 - \phi'_4$同相位，即所謂的正相關，則$\langle \omega'_3 (\phi'_2 - \phi'_4) \rangle$為正，則整項為負，則動能會隨時間而減少。若$\omega'_3$與$\phi'_2 - \phi'_4$相差180°時，則動能會增加。對(22)式作同樣的處理：

$$\frac{1}{L}\int_0^L (\phi'_2 - \phi'_4) \cdot (22) dx$$

分項結果如下，

$$\frac{1}{L}\int_0^L (\phi'_2 - \phi'_4)\frac{\partial}{\partial t}(\phi'_2 - \phi'_4) dx$$

$$= \frac{1}{L}\int_0^L \frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(\phi'_2 - \phi'_4) dx$$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{1}{2}(\phi'_2 - \phi'_4)^2 \rangle$$

$$\frac{1}{L}\int_0^L U_M (\phi'_2 - \phi'_4)\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2 - \phi'_4) dx$$

$$= \frac{U_M}{L}\int_0^L \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2 - \phi'_4) dx$$

$$= \frac{U_M}{L}[\frac{1}{2}(\phi'_2 - \phi'_4)^2]_0^L = 0$$

$$-\frac{1}{L}\int_0^L U_T (\phi'_2 - \phi'_4)\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2 + \phi'_4) dx$$

$$= -U_T \langle (\phi'_2 - \phi'_4)\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2 + \phi'_4) \rangle$$

$$\frac{1}{L}\int_0^L (\phi'_2 - \phi'_4)\frac{S\Delta P}{f_o}\omega'_3$$

$$= \frac{S\Delta P}{f_o}\langle \omega'_3 (\phi'_2 - \phi'_4) \rangle$$

將上述分項結果合併可得

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \frac{1}{2}(\phi'_2 - \phi'_4)^2 \rangle$$

$$= U_T \langle (\phi'_2 - \phi'_4)\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2 - \phi'_4) \rangle$$

$$+ \frac{S\Delta P}{f_o}\langle \omega'_3 (\phi'_2 - \phi'_4) \rangle$$

將上式乘以λ^2，λ^2為垂直方向之穩定度，

$$\lambda^2 \equiv \frac{f_o^2}{S(\Delta P)_2}$$

因為假設運動為準地轉，即$\phi' \propto \Phi$，所以$(\phi'_2 - \phi'_4) \propto (\Phi'_2 - \Phi'_4) \propto T'_3$，即第2階之氣壓面高度與第4階氣壓面之高度的差，與等壓面之厚度成正比，而等壓面間之厚度與等壓面間之平均溫度成正比。

已知在連續分層之大氣中，可用位能是與溫度（T'^2）成正比，故可定義

$$E'_{AP} \equiv \langle \frac{\lambda^2}{2}(\phi'_2 - \phi'_4)^2 \rangle$$

$$\therefore \frac{\partial E'_{AP}}{\partial t} = \lambda^2 U_T \langle (\phi'_2 - \phi'_4)\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2 + \phi'_4) \rangle + \frac{f_o}{\Delta P}\langle \omega'_3 (\phi'_2 - \phi'_4) \rangle \quad (28)$$

(26)+(28)可得

$$\frac{\partial}{\partial t}E'_T = \frac{\partial}{\partial t}(E'_K + E'_{AP}) = \lambda^2 U_T \langle (\phi'_2 - \phi'_4)\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2 + \phi'_4) \rangle \quad (29)$$

(29)式右邊即為波動本身總的能量隨時間之變化，當然還有其它項，但是這些項為總位能中不能轉變為動能的，所以當然也不為時間之函數。所以$E'_K + E'_{AP}$即為波動中可真正轉換成動能的量。(29)式右邊之$\phi'_2 - \phi'_4$即為T'_3，$(\phi'_2 + \phi'_4)$即為第3階之平均高度，因此

$$\frac{\partial E'_T}{\partial t} \propto U_T \langle T'_3 \frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2 + \phi'_4) \rangle$$

故在斜壓不穩定之狀況下，$U_T > 0$且$U_M > 0$，所以完全視T'_3與$\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2 + \phi'_4)$之相位差而定，如二者相位差在90°範圍以內時，$\langle T'_3 \frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2 + \phi'_4) \rangle$為正，則$\frac{\partial E'_T}{\partial t}$增加，若在90°～180°內時，該項為負，所以總的能量會隨時間而減少。

假設$\phi'_2 + \phi'_4 = A_M \cos K(x - ct)$，$\phi'_2 - \phi'_4 = A_T \cos K(x - ct + \alpha)$，$\alpha$為相位差，代入(29)式中，

$$\langle (\phi'_2 - \phi'_4)\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2 + \phi'_4) \rangle$$

$$= \frac{K}{L}\int_0^L A_M A_T \sin K(x - ct) \cos K(x - ct + \alpha) dx$$

$$= A_M A_T \sin K\alpha \frac{K}{L}\int_0^L [\sin K(x - ct)]^2 dx$$

$$= \frac{K}{2} A_M A_T \sin K\alpha$$

$$\therefore \frac{\partial E'_T}{\partial t} = \frac{\lambda^2}{2} UTK A_M A_T \sin K\alpha \quad (30)$$

因此由上可知總的能量變化視溫度場與高度場之相位差而定，在中緯度之西風帶，較低緯地區必定比較高緯度地區為暖，所以$U_T > 0$，λ亦大於0；A_M，A_T均為振幅，也一定大於0，而在斜壓不穩定之振幅隨時間的增加呈指數增加，表示波的總能量亦在增加，即$\frac{\partial E'_T}{\partial t} > 0$，表示$K\alpha$有所限制，為$0 < K\alpha < \pi$，當$K\alpha = \frac{\pi}{2}$為最有效率，即$\frac{\partial E'_T}{\partial t}$＝極大值。

假設500HPA之平均高度場如圖2所示，$\phi'_2+\phi'_4$表示高度場，$\phi'_2-\phi'_4$表示厚度（溫度）場；在圖中I處高度漸減，即x增加氣壓降低，表示有一氣壓梯度力是向東（在I部分），而此平均流場是向東，表示紙內爲北，紙上爲南，在此區中，因爲風場與氣壓梯度力必須達成平衡，故此處吹的是北風，即由北方往南吹；在II區，氣壓梯度力是向左，則吹的是南風；故由上可知，槽後脊前，吹北風爲冷平流；槽前脊後，吹南風爲暖平流。因此亦可知，風場與溫度場實際上是同相位的。

上面表示$k\alpha=\frac{\pi}{2}$時，或在$0\sim\pi$之間，達成冷空氣往南，暖空氣往北，使冷暖空氣達成交換後，重心降低，可用位能便釋放出來轉換成動能。在此更須說明的，上圖爲擾動之量，而實際大氣中，熱力風U_T如果大於0，表示等壓面是南邊較高，北邊較低，因此把平均高度場再加進去，便會使上圖中的暖空氣更暖，冷空氣更冷，然而透過剛才的機制，即暖空氣往北，冷空氣往南，實際上可以把平均的背景之西風帶中整個位能降低的更多，所以在考慮整個平均風場時，整個平均風場的南北向溫度梯度就會降低。(30)式右邊有熱力風U_T存在，即此項釋放位能時，實際上是用到平均風場的可用位能，即將平均風場中的可用位能，透過斜壓不穩定之過程轉換成波動的擾動位能，故(30)式右邊稱爲波動（擾動）能量產生項（Generating term），即擾動的能量來源。

再看(26)式和(27)式，

$$\frac{\partial E'_K}{\partial t}=-\frac{f_o}{\Delta P}\langle\omega'_3(\phi'_2-\phi'_4)\rangle \qquad (26)$$

$$\frac{\partial E'_{AP}}{\partial t}=\lambda^2U_T\langle(\phi'_2-\phi'_4)\frac{\partial}{\partial t}(\phi'_2+\phi'_4)\rangle+\frac{f_o}{\Delta P}\langle\omega'_3(\phi'_2-\phi'_4)\rangle \qquad (27)$$

由(27)式可知，當$\langle\omega'_3(\phi'_2-\phi'_4)\rangle$爲負時，表示可用位能減少，而(26)式則動能增加；當$\langle\omega'_3(\phi'_2-\phi'_4)\rangle$爲正時，即可用位能增加，而動能則減少；故此項$\langle\omega'_3(\phi'_2-\phi'_4)\rangle$即爲能量轉換項，可定義從$E'_K$和$E'_{AP}$的能量轉換（Conversion）爲

$$C(K',A')\equiv\frac{f_o}{\Delta P}\langle\omega'_3(\phi'_2-\phi'_4)\rangle$$

動能和可用位能間之轉換與垂直速度有關，即透過垂直的環流達成能量的轉換，也就是看ω'_3與$(\phi'_2-\phi'_4)$之相位差而定。

若$\omega'_3<0$，$(\phi'_2-\phi'_4)>0$，則$E'_{AP}\rightarrow E'_K$

$\omega'_3>0$，$(\phi'_2-\phi'_4)<0$，則$E'_{AP}\rightarrow E'_K$

若$\omega'_3>0$，$(\phi'_2-\phi'_4)>0$，即$C>0$，

則$E'_K\rightarrow E'_{AP}$

$\omega'_3<0$，$(\phi'_2-\phi'_4)<0$，則$E'_K\rightarrow E'_{AP}$

所以祇有$E'_{AP}\rightarrow E'_K$時，波動才會發展，也才是我們要討論的。

而

$$\frac{dP}{dt}=\omega\approx-f\,g\,w$$

$\omega>0$，$w<0$，即爲向下之垂直速度，相對應的是$(\phi'_2-\phi'_4)<0$方能使可用位能轉換成動能，而$(\phi'_2-\phi'_4)<0$之意表示此$(\phi'_2-\phi'_4)$之厚度要小於平均厚度，即表示爲冷區，因爲冷空氣厚度小。$\omega<0$，$w>0$表示有向上之垂直速度，同樣道理，其所對應的是暖區。以上便表示要達成可用位能釋放成動能，就必須要暖空氣上升，冷空氣下降，使重心降低，可用位能才能釋放出來，如圖3所示。

現在回到原來之方程式，計算一下垂直速度；

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_2\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\phi'_2}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial\phi'_2}{\partial x}=\frac{f_o}{\triangle P}\omega'_3 \qquad (20)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_4\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial^2\phi'_4}{\partial x^2}+\beta\frac{\partial\phi'_4}{\partial x}=-\frac{f_o}{\triangle P}\omega'_3 \qquad (21)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U_m\frac{\partial}{\partial x}\right)(\phi'_2-\phi'_4)-U_T\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2+\phi'_4)=\frac{S\triangle P}{f_o}\omega'_3 \qquad (22)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(22)\rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\phi'_2}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2\phi'_4}{\partial x^2}+U_m\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\phi'_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi'_4}{\partial x^2}\right)-U_T\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\phi'_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi'_4}{\partial x^2}\right)=\frac{S\triangle P}{f_o}\frac{\partial^2\omega'_3}{\partial x^2} \qquad (28)$$

$$(20)-(21)\rightarrow\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2\phi'_2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\phi'_4}{\partial x^2}\right)=-U_2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\phi'_2}{\partial x^2}+U4\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2\phi'_4}{\partial x^2}-\beta\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2-\phi'_4)+\frac{2f_o}{\triangle P}\omega'_3$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\lambda^2\right)\omega'_3=\frac{f_o}{\triangle P}\left\{U_m\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\phi'_2}{\partial x}-\frac{\partial\phi'_4}{\partial x}\right)-U_T\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\phi'_2}{\partial x}+\frac{\partial\phi'_4}{\partial x}\right)-\left[U_2\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^2\phi'_2}{\partial x^2}\right)-U_4\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\phi'_4}{\partial x^2}\right)\right]\right\}$$

$$=-\frac{2f_oU_T}{S\triangle P}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial\phi'_2}{\partial x}+\frac{\partial\phi'_4}{\partial x}\right) \qquad (29)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\lambda^2\right)\omega'_3=-\frac{2f_oU_T}{S\triangle P}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\phi'_2}{e x^2}+\frac{\partial^2\phi'_4}{\partial x^2}\right)=-\frac{2f_oU_T}{S\triangle P}\frac{\partial}{\partial x}(\zeta'_2-\zeta'_4)=-\frac{4f_oU_T}{S\triangle P}\frac{\partial\zeta'_3}{\partial x}$$

由上面之ω方程式，可直接計算垂直速度場，令$\omega'_3=W\cos K(x-ct+\alpha\omega)$

$$\therefore\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-2\lambda^2\right)\omega'_3\propto-\omega'_3$$

$$(30)\rightarrow-\omega'_3\propto-U_T\frac{\partial}{\partial x}\zeta'_3\rightarrow$$

$$\omega'_3\propto U_T\frac{\partial-\zeta'_3}{\partial x}$$

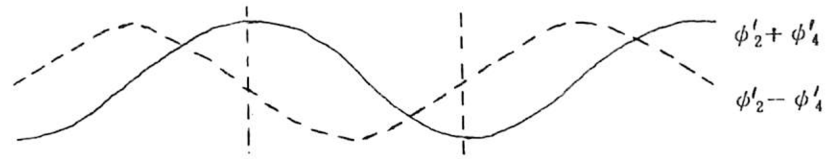


圖2　500HPA之平均高度場分布圖

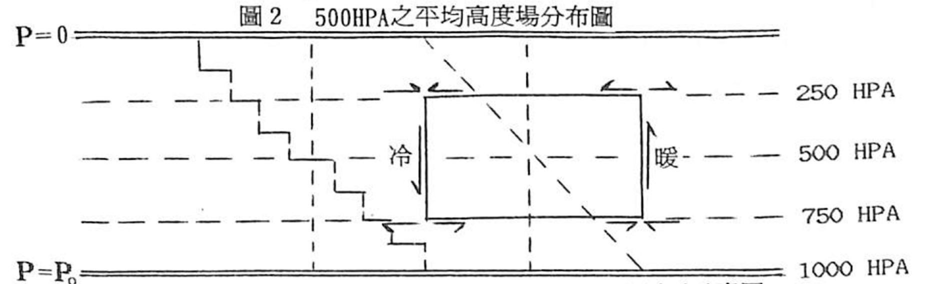


圖3　配合500HPA平均高度場之大氣垂直剖面示意圖

在$U_T>0$之情況下，$\omega'_3 \propto \frac{\partial \zeta'_3}{\partial x}$

槽前脊後$\omega'_3<0$，$w>0$；脊前槽後$\omega'_3>0$，$w<0$

$\therefore \langle \omega'_3(\phi'_2-\phi'_4) \rangle$ 小於0，

$C(K', A')<0$

$\therefore E'_{AP} \rightarrow E'_K$

只要是槽脊向西傾斜的系統，自然會強迫成一種次環流，是使暖的空氣上升，冷的空氣下降，然後使重心降低，才能把西風帶中平均風場所得到的可用位能轉換成波動發展所須之可用位能，同時轉換成波的動能，二者可同時進行，過程如圖 4 所示。

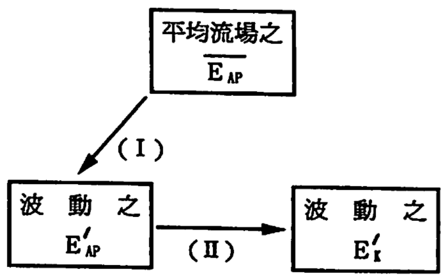
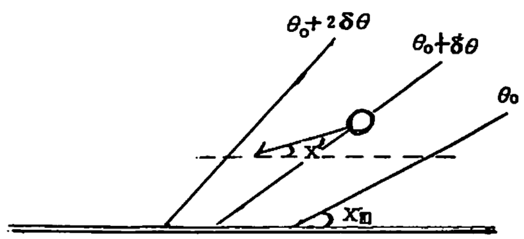


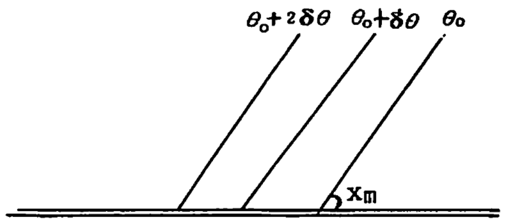
圖 4　斜壓波動發展之能量轉換示意圖

上圖中過程（I）乃是透過$U_T \langle (\phi'_2-\phi'_4)\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_2+\phi'_4) \rangle$，即經由南風造成暖平流，北風造成冷平流，過程（II）透過$-\frac{f_o}{\Delta P}\langle \omega'_3(\phi'_2-\phi'_4) \rangle$，即暖空氣上升，冷空氣下降之垂直環流。由上可知，斜壓波發展之必要條件，是暖空氣向北輸送，冷空氣向南輸送，此時背景之西風帶的可用位能（平均風場的可用位能）才會轉換成波動的可用位能，然後波動得到之可用位能透過垂直環流之型式轉換成波動的動能。

至於斜壓波的發展，當然是在斜壓不穩定的狀況下進行，所以我們用位溫場的分布來說明斜壓不穩定的物理機制；設X_m爲平均流場之等位溫面與地面之夾角，X'爲輸送空氣運動軌跡與地面之夾角。考慮下面兩種情形。



(a)



(b)

圖 5　斜壓區域中，位溫場之分布圖

對於(b)圖而言，空氣塊極易達成$X'<X_m$，這也就說明爲何在熱力風很大時（即等位溫面與地面之交角大時）容易造成不穩定。當水平波長很長時，垂直速度愈小，空氣塊運動的角度就愈小，即X'很小，容易滿足$X'<X_m$，愈易達成斜壓不穩定，使斜壓波發展。當波長短至某一程度時，達成運動的軌跡與等位溫面平行，即所謂的邊際穩定。若當波長再短時，垂直速度變大，則$X'>X_m$，即此斜壓波不可能發展，爲斜壓穩定。

五、結語

當南北的溫度梯度夠大時，其中有一波長的擾動會隨時間的增加而發展，此發展的系統必須滿足氣壓系統隨高度上升而向西傾斜之條件，而斜壓波的發展是透過冷暖平流使脊發展或槽加深，而這平流所輸送的空氣本來就是大氣環境中具有的可用位能，因爲脊的發展，槽的加深而將環境的可用位能轉換成波的可用位能，同時會產生次環流，使空氣在槽前上升、

脊前下降，使波的可用位能轉換成波的動能。

簡單的說，波的可用位能增加主要是靠冷暖平流，而波的可用位能轉換成波的動能是透過垂直速度造成的次環流所達成的。