

Barnes客觀分析方法中影響半徑的選擇

林松錦 陳雯美

國立中央大學 大氣物理系

(中華民國七十五年十二月四日收稿，七十六年一月十六日定稿)

摘要

Barnes的客觀分析方法在理論上並沒有影響半徑的限制，但為提高計算效率通常都會設定一影響半徑來限制尋求測站的範圍。影響半徑設定得適當與否，不但影響分析的品質，也決定計算的效率。本文經由理論的推導，並以實際東亞地區探空觀測網及模擬氣象場分佈做分析驗證。結果顯示以 $4k^{1/2}$ 做為影響半徑時分析結果最為理想，而且計算最經濟迅速。 k 為 Barnes 的權重函數參數。

一、前言

Barnes (1964) 提出的客觀分析法基本上和 Cressman (1959) 的逐次修正法是相類似的，也就是先在網格點上設定一初始值，然後利用網格點附近的觀測值來做逐次的修正。為提高計算效率，Barnes (1973) 進一步將 1964 年的方法修訂而應用於中尺度氣象資料的分析。經修訂之後，通常初始場只需要一次的修正便可得到理想的收斂分析值。由於這個方法具有選擇和控制尺度的能力，目前普遍受到氣象界的重視與採用，尤其是在中尺度氣象資料的分析。

理論上，Barnes 所定義的權重函數並不需要決定影響半徑。不過在分析過程中為節省計算機時間，通常都會選擇一影響半徑來限制找尋測站的範圍。當然，影響半徑選擇得適當與否，不但決定計算的效率而且影響分析的結果。本文將就影響半徑的選擇以及資料內插時測站數目的選擇作深入的探討，藉以尋求一理想的影響半徑。

二、Barnes客觀分析法的基本理論

若以 φ 代表一氣象變數，逐次修正法基本上可以下式表示：

$$\varphi_g^m = \varphi_g^{m-1} + \frac{\sum_{i=1}^N W_i (\varphi_{i0} - \varphi_{ia}^{m-1})}{\sum_{i=1}^N W_i} \quad (1)$$

其中 φ_g^m 及 φ_g^{m-1} 為網格點上第 m 次及 $m-1$ 次的分析值， φ_{i0} 為網格點附近第 i 個測站上的觀測值， φ_{ia}^{m-1} 為第 i 個測站上第 $m-1$ 次的分析值（可由網格點上的分析值內插得到）， W_i 為第 i 個測站對網格點的權重因子， N 為在網格點附近參與內插的測站總數。Barnes (1964) 採用高斯 (Gaussian) 形式的權重函數，即

$$W_i = \exp\left(-\frac{r_i^2}{4k}\right) \quad (2)$$

r_i 為第 i 個測站和網格點之間的距離, k 為決定權重函數形狀的參數。 k 值的大小由測站分佈的密度以及所期望分析的尺度來決定。為提高計算效率, Barnes (1973) 將(2)式之權重函數修訂為

$$W_i' = \exp\left(-\frac{r_i^2}{4\eta k}\right) \quad (3)$$

η 為另外一個參數, 其目的是用來降低 k 值以便增加分析的收斂速度, η 值在 $0 \sim 1$ 之間, 而理想之值為 $0.2 \sim 0.4$ (Barnes, 1973)。 Barnes (1973) 指出, 使用新的方法可以不必事先設定初始場而且只要一次修正便可得到收斂的分析值。其計算過程為先利用(1)式及(2)式之權重函數並假設 φ_g^{m-1} 及 $\varphi_{i_a}^{m-1}$ 為零, 將計算所得之網格點分析值當作是初始場。然後再利用(1)式及(3)式之權重函數來修正這初始場, 計算所得之結果即為最後之分析值 (Barnes, 1973; Lin 與 Chiou, 1985)。

由(2)或(3)式可知, 當 r_i 無窮大時 W_i 趨近於零, 因此理論上 Barnes 的權重函數並沒有影響半徑的限制。為了尋求一理想的影響半徑以便達到提高計算效率的目的, 在此將(1)式以積分形式表示成

$$\varphi_g(x, y) = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \varphi_{i_a}(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) W_i^* r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty W_i^* r dr d\theta} \quad (4)$$

或

$$\varphi_g(x, y) = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \varphi_{i_a}(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) W_i^* r dr d\theta}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty W_i^* r dr d\theta}$$

$$\frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty \varphi_{i_a}(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta) W_i^* r dr d\theta}{\int_0^{2\pi} \int_0^\infty W_i^* r dr d\theta} \quad (5)$$

其中 (x, y) 及 $(x + r \cos \theta, y + r \sin \theta)$ 分別是網格點及測站在極座標上的位置 (圖 1)

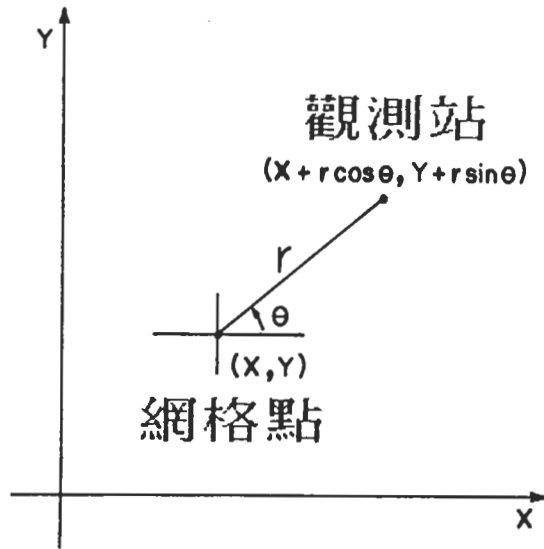


圖 1 網格點和測站位置圖。

而 $W_i^* = W_i / 4\pi k$ 。實際上(4)或(5)式即為當 $m = 1$ 及初始場為零時(1)式的積分形式。若令 $a = r^2 / 4k$, 則積分(5)式中之分母可得

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{r^2}{4k}\right) d\left(\frac{r^2}{4k}\right) d\theta = \int_0^\infty e^{-a} da = 1 \quad (6)$$

(6)式的結果顯示, 在沒有影響半徑的限制下, 所有測站對網格點的權重總和應為 1。假若給予一影響半徑 R 的限制, (6)式之積分結果變成

$$\int_0^{\frac{R^2}{4k}} e^{-a} da = 1 - e^{-\frac{R^2}{4k}} \quad (7)$$

而(7)式的積分亦可寫成

$$\int_0^{\frac{R^2}{4k}} e^{-a} da = \int_0^{\infty} e^{-a} da - \int_{\frac{R^2}{4k}}^{\infty} e^{-a} da = 1 - \epsilon \quad (8)$$

因此 $\epsilon = e^{-\frac{R^2}{4k}}$ 所代表的是在影響半徑之外被忽略掉的測站對網格點上分析值的影響，在此姑且以誤差稱之。將 ϵ 取自然對數，可得

$$\ln \epsilon^{-1} = \frac{R^2}{4k} \equiv E \quad (9)$$

由表一之結果可知當 $E = 1$ 時， $\epsilon = 0.368$ 。也就是說當選擇影響半徑為 $R = (4k)^{1/2}$ 時，約有 36.8% 的測站資料並沒有用來修正網格點上的初始值。而當 $E = 4$ 時，則只有 1.83% 而已。利用(9)式再決定一適當的 E 值，影響半徑可由下式約略估計得到

$$R = (4kE)^{1/2} \quad (10)$$

表一 E 值及其相對之 ϵ 值。

E	1	2	3	4	5
ϵ	0.368	0.135	0.050	0.0183	0.00673

若將大氣運動看成是一種波動形式，以一簡單的一維正弦波來表示測站的觀測值

$$\varphi_{i_0}(x, y) = A \sin \ell x \quad (11)$$

其中 A 為振幅， $\ell = \frac{2\pi}{\lambda}$ 為波數，而 λ 為波長。經

以(2)式的權重函數，利用(5)式將這正弦波由測站內插到網格點後，在網格點上的值變為

$$\varphi_g(x, y) = \exp\left(-\frac{4k\pi^2}{\lambda^2}\right) \varphi_{i_0}(x, y) \quad (12)$$

Barnes 將 $D \equiv \exp\left(-\frac{4k\pi^2}{\lambda^2}\right)$ 定義為反應函數，其所代表的意義是當一氣象觀測資料從測站上內插到網格點之後尚保留的原有特性的比例。若以 Barnes (1973) 的方法來做分析時，其經修正後分析值的反應函數為

$$D' = D(1 + D^{-\eta} - D^{\eta+1}) \quad (13)$$

因此對於某一特定波長，只要決定反應函數及 η 的值，便可經由解(13)式得到 k 值 (Lin 與 Chiou, 1985)。

三、實驗設計

以客觀分析方法利用電子計算機來處理大量的氣象資料往往需要耗費不少計算機時間，因此在客觀分析過程中，如何節省時間是一個很重要的課題。在整個過程中又以選取測站及決定權重最為費時。雖然在第二節中由理論的推導，可以用(10)式來估計影響半徑。不過，這理論推導之影響半徑在實際作業上是否合理，以及(10)式中 E 值應取多少，必須做進一步的試驗才能驗證。基於此，本文做了以下的實驗設計：

(一)由特定之波長 λ 、 η 、反應函數 D' 及 E 值，經由(10)式及(13)式可以得到理論之影響半徑 RI ，再分別選用大於、等於及小於 RI 的影響半徑來做分析比較。

(二)對固定之波長 λ 、 η 、及反應函數 D' ，選取不同之 E 值，進而決定不同的影響半徑，試驗並尋求最理想的 E 值。

(三)不考慮影響半徑及 E 值，對每一網格點僅選取最接近的固定測站數來做內插。

在做以上分析時，所使用之電子計算機為CYBER-720，對每一種情況均記錄其所耗費的CPU時間，同時參考分析結果相互比較。

由於如果使用實際的觀測資料，並沒有所謂的正確分析結果可供比較，因此在進行實驗時採用模擬之波狀氣象場分佈，其在水平面上之分佈可用下式表示

$$\varphi = 1000 - \frac{\phi - \phi_0}{2} + A \sin \left[2\pi \left(\frac{\theta - \theta_0}{\lambda / \Delta x} \right) \right] \quad (4)$$

ϕ 及 θ 分別為緯度及經度，A 為波動之振幅，而 Δx 為一個經度之實際距離。 ϕ_0 及 θ_0 分別為分析區域之中心緯度及經度，實際之分析區域為 $20^\circ N \sim 40^\circ N$ 及 $100^\circ E \sim 130^\circ E$ (一度經緯度網格點)，因此 ϕ_0 及 θ_0 分別為 $30^\circ N$ 及 $115^\circ E$ 。雖然採用的是模擬氣象場分佈，但測站仍是實際的東亞地區探空觀測站，其分佈如圖 2 所示。也就是

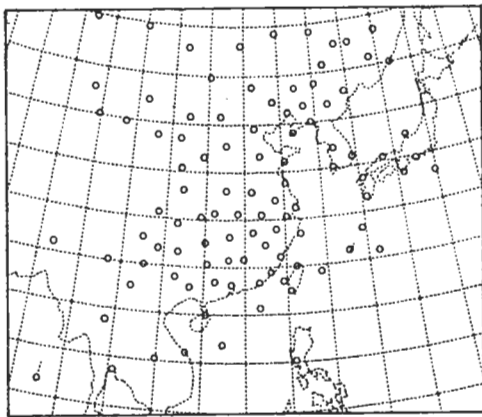


圖 2 東亞地區探空觀測站分佈圖。

說以測站的經緯度將(4)式的計算結果當作是測站上的觀測值，再將測站上的值內插到網格點上。圖 3 之分析圖分別是波長為 1000 公里及 2000 公里 (振幅分別是 1.5 及 3.0) 的理論分析圖。

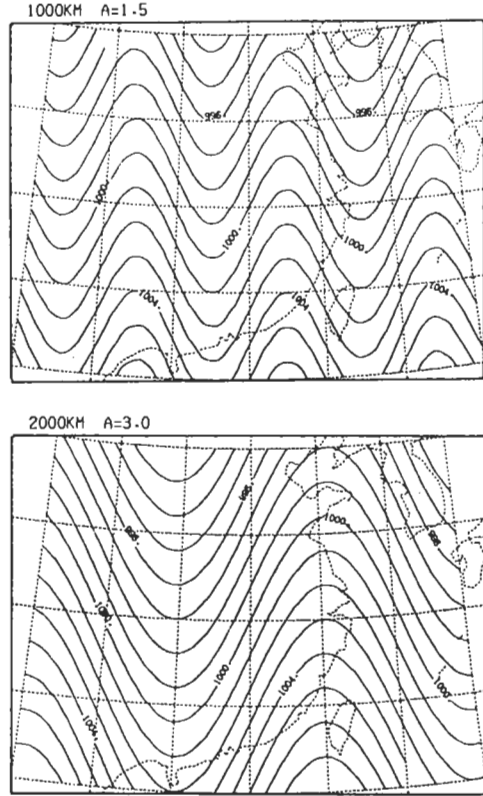


圖 3 波長為 1000 公里(a)及 2000 公里(b)之理論分析圖，其振幅分別為 1.5 及 3.0

四、結果與討論

根據第三節的實驗設計，分別來看分析結果並討論之：

(一)若波長為 1000 公里，並取 $\eta = 0.3$ ， $D' = 0.95$ 及 $E = 4$ ，則經由(13)式計算所得之 k 值為 $11992 (Km)^2$ ，而由(10)式計算所得之理論影響半徑 (RI) 為 438 公里。E 值之選取在第(二)小節中會詳細討論，在此選取之值為最理想之值。圖 4 至圖 7 分別為 $R = 0.5 RI$ 、 $R = RI$ 、 $R = 1.5 RI$ 及 $R = 2.0 RI$ 之分析圖。這些圖和圖 3 a 之理論分析圖比較可發現在海面上及西北邊上之分析都有相當大的出入，不過這是由於在這兩區內測站太稀少所引起，在此將摒棄不討論。表二為選用這四種不同影響半徑做分析時所需之 CPU 時間。由

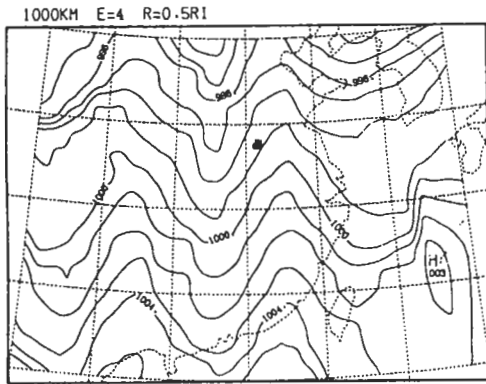


圖 4 波長為 1000 公里， $\eta = 0.3$ ， $D' = 0.95$ ， $E = 4$ ，影響半徑為 $0.5 RI$ 之分析圖 ($RI = 438$ 公里)。

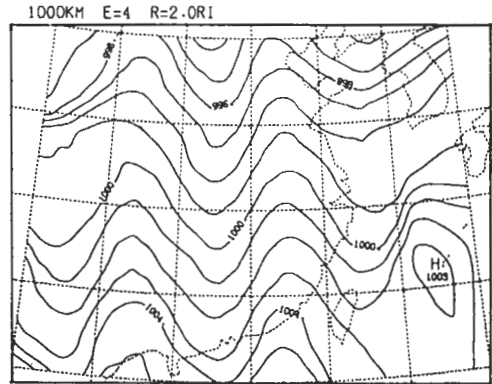


圖 7 同圖 4，但影響半徑為 $2.0 RI$ 。

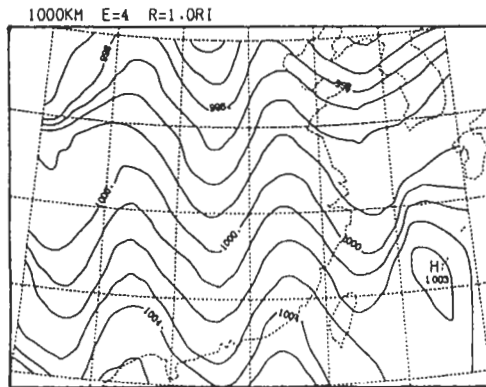


圖 5 同圖 4，但影響半徑為 $1.0 RI$ 。

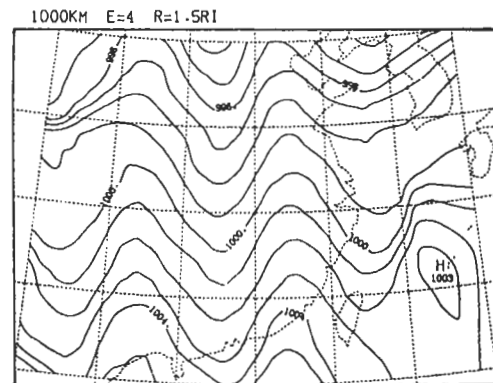


圖 6 同圖 4，但影響半徑為 $1.5 RI$ 。

表二 波長為 1000 公里，選用不同影響半徑做分析時所需的 CPU 時間。

影響半徑 (公里)	CPU 時間 (秒)
$0.5 RI \sim 219$	33.986
$1.0 RI \sim 438$	47.339
$1.5 RI \sim 657$	56.998
$2.0 RI \sim 876$	85.224

這些分析結果可以看出，雖然 $R = 0.5 RI$ 時所需之 CPU 時間最少，但其分析結果和實際分佈相去太遠。將 $R = 1.5 RI$ 及 $R = 2.0 RI$ 之分析結果和 $R = RI$ 之分析結果比較顯示選取大於 RI 的影響半徑並沒有提高分析的品質，而 $R = 2.0 RI$ 却需要 2 倍於 $R = RI$ 的 CPU 時間。圖 8 到圖 11 為在相同情況下，波長為 2000 公里時 $R = 0.5 RI$ 、 $R = RI$ 、 $R = 1.5 RI$ 及 $R = 2.0 RI$ 之分析圖。表三為這四種影響半徑所需的 CPU 時間。由於影響半徑的擴大，邊界問題已不像波長為 1000 公里時那麼嚴重，不過結論大致和波長 1000 公里的分析相同。尤其是選用 $R = 2.0 RI$ 的分析結果，其所耗費的 CPU 時間為 $R = RI$ 時的 2 倍多，但分析結果却幾乎完全相同。

(二) 由表一及 (9) 式知道 ϵ 的大小代表的是被忽略

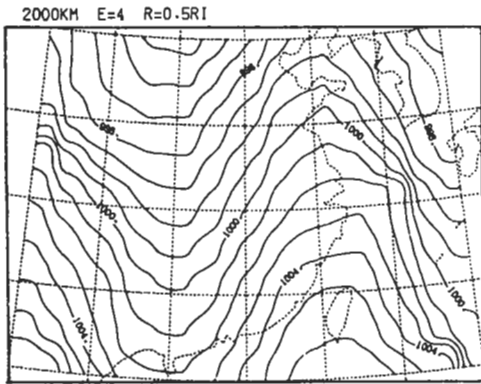


圖8 波長為 2000 公里， $\eta = 0.3$ ， $D' = 0.95$ ， $E = 4$ ，影響半徑為 $0.5RI$ 之分析圖（ $RI = 876$ 公里）。

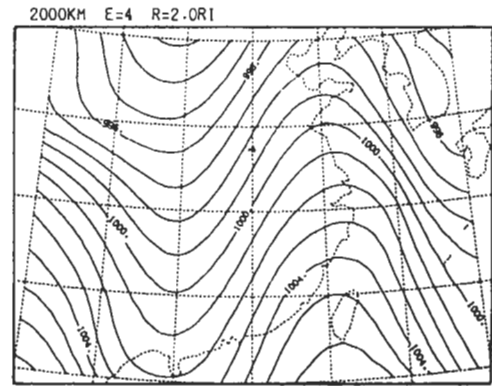


圖11 同圖 8，但影響半徑為 $2.0RI$ 。

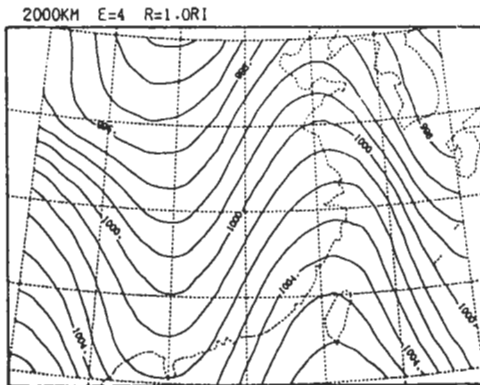


圖 9 同圖 8，但影響半徑為 $1.0RI$ 。

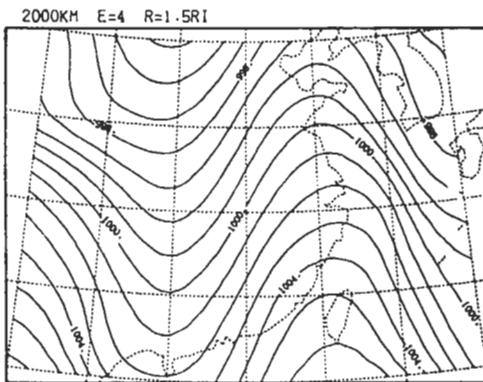


圖10 同圖 8，但影響半徑為 $1.5RI$ 。

表三 波長為 2000 公里，選用不同影響半徑做分析時所需的 CPU 時間。

影響半徑 (公里)	CPU 時間 (秒)
$0.5RI \sim 438$	47.613
$1.0RI \sim 876$	85.968
$1.5RI \sim 1314$	165.671
$2.0RI \sim 1752$	215.433

掉在影響半徑之外的測站對網絡點上內插值的影響份量。 E 值愈大，影響半徑也愈大，因此 ϵ 也就愈小，誤差也相對地愈小。為尋求最適當的 E 值，在此先以 2000 公里波長的波形，選取 $\eta = 0.3$ 及 $D' = 0.95$ ，並以理論影響半徑 $RI = (4kE)^{1/2}$ 當作影響半徑做分析。圖 12 至圖 15 分別為 $E = 1$ 、 2 、 3 及 5 的分析結果， $E = 4$ 之分析圖為圖 9。和圖 3 b 的實際分析圖比較，很容易可以看出 $E = 1$ 及 $E = 2$ 的分析結果甚不理想，而 $E = 3$ 、 $E = 4$ 及 $E = 5$ 的結果較理想而且幾乎完全相同。再由表四中各種 E 值計算所需的 CPU 時間來比較， $E = 5$ 時所耗費的時間遠多於 $E = 3$ 或 $E = 4$ 所需的時間。雖然 $E = 3$ 的分析和 $E = 4$ 或 $E = 5$ 時甚為

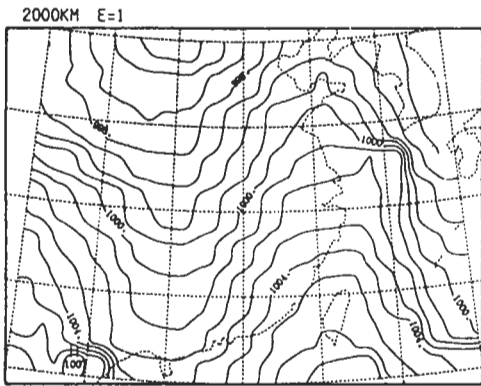


圖12 波長為 2000 公里， $\eta = 0.3$ ， $D' = 0.95$ ，影響半徑為 $(4kE)^{1/2}$ ， $E = 1$ 之分析圖。

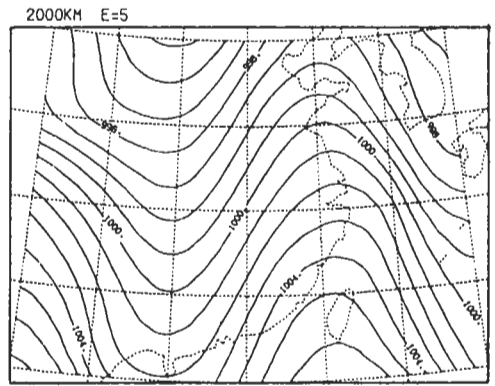


圖15 同圖12，但 $E = 5$ 。

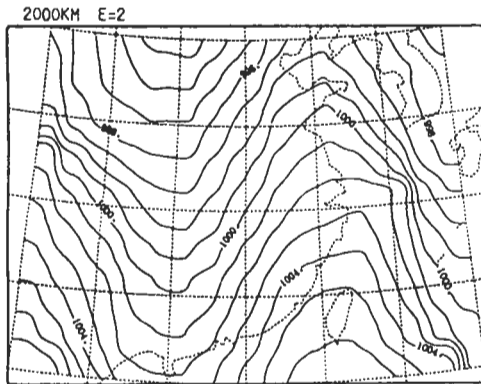


圖13 同圖12，但 $E = 2$ 。

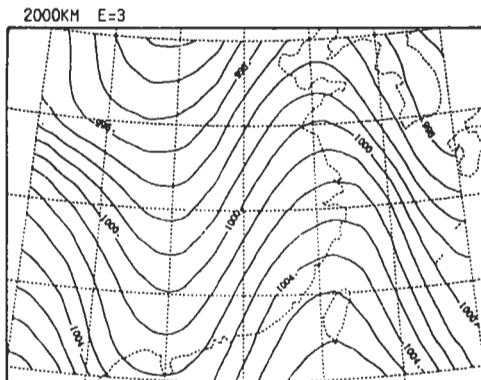


圖14 同圖12，但 $E = 3$ 。

表四 波長為 2000 公里，影響半徑為 $(4kE)^{1/2}$ ，選用不同 E 值做分析時所需的 CPU 時間。

E	影響半徑 (公里)	CPU 時間 (秒)
1	438	46.797
2	618	51.722
3	758	80.009
4	876	85.968
5	981	116.037

接近，而且較為省時。但對於較短的波長 $E = 3$ 的分析結果並不盡理想，如圖16為 1000 公里波長 $E = 3$ 時的分析結果。 $E = 5$ 的分析（圖省略）和 $E = 4$ 的分析結果（圖5）幾乎完全一樣，然而 $E = 3$ 的分析結果則沒有像 2000 公里波長的分析那麼理想。為進一步試驗 E 值對波長變化的敏感度，實驗中亦曾將波長增加到 3000 公里，結果仍然發現 E 值至少需取 4 以上才能得到理想的分析。因此從計算效率考慮， $E = 4$ 應是最理想的選擇。

由(一)及(二)兩小節的分析結果顯示，若以影響半徑來限制找尋測站的範圍，理想的影響半徑可以(10)式以及選用 $E = 4$ 來估計，即

$$RI^{\circ} = 4k^{1/2}$$

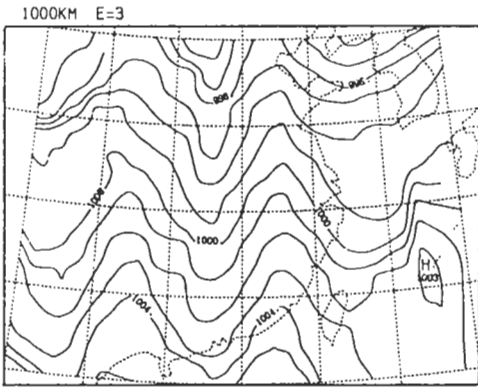


圖16 同圖14，但波長為1000公里。

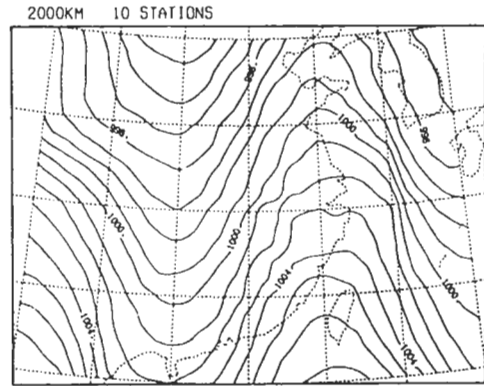


圖17 波長為2000公里， $\eta = 0.3$ ， $D' = 0.95$ ，測站數為10個時之分析圖。

以 Barnes (1973) 的方法來做分析時，計算初始值時是採用(2)式的權重函數，而經由修正初始值來計算分析值時是採用(3)式的權重函數。(10)式或(15)式的理論影響半徑是根據(2)式的權重函數導得的。因此，理論上在做修正初始值時應將(15)式中的影響半徑縮小為

$$RI' = 4(\eta k)^{1/2} \quad (16)$$

不過，因為 RI' 實際上也包含於 RI° 之內，為方便程式的設計與計算上的方便，可權宜仍選用 RI° 範圍之內的測站來做修正分析。實驗的結果也證明影響半徑縮小或不縮小，分析結果幾乎是完全一樣的。

(在選取測站時，為求程式設計上的方便，往往會採用選擇固定測站數目的方法。這種方法對 Barnes 的客觀分析法是否恰當，在此也將做分析比較。同樣取 $\eta = 0.3$ 及 $D' = 0.95$ ，首先來看 2000 公里波長的分析。圖17至圖19分別為選取 10個、20個及30個測站數的分析結果，圖17選用 10個測站的分析結果甚不理想，到處可見短波雜訊，尤其是在測站密度最高的華中地區。如此的分析結果是可以預期的，因為在華中地區 10個測站所涵蓋的範圍只不過是數百公里而已。所分析出來的波長當然遠小於 2000 公里。測站數增加到 20個時，雖然大部份地區的短波都已消除，但在華中

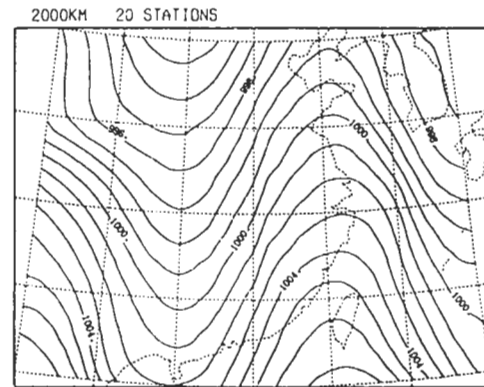


圖18 同圖17，但測站數為20個。

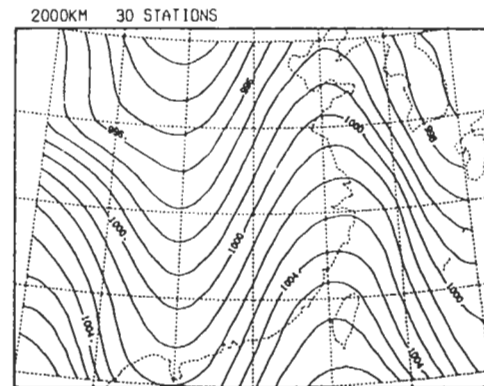


圖19 同圖17，但測站數為30個。

地區仍有微弱的短波存在。從圖 19 的分析結果則可以看出當測站數為 30 個時，短波現象已完全消除。由以上的結果顯示，測站數目的選擇不但和所要分析的波長有關而且還需要考慮測站分佈的密度。也就是說並沒有一個固定的準則可循。不過理想的測站數是否和前面所提的理論影響半徑有任何關連？為了解此點，在此以 2000 公里波長的理論影響半徑 876 公里（表三）為範圍，對每個網格點計算在此半徑之內所有測站的總數。結果却發現在華中測站最密的地區，影響半徑之內涵蓋最多的測站數為 30 個。以同樣的方法來分析 1000 公里及 1500 公里波長，也發現類似的關連，亦即必須選取和理論影響半徑內最多測站數相近的測站才能得到理想的分析結果。事實上，這樣的結論等於驗證前面所提選取理論影響半徑是合理的。

五、結論

Barnes 的客觀分析方法在理論上雖然沒有影響半徑的限制。不過在處理像地面分析圖那麼繁多的氣象資料時，如果不給予設定一影響半徑，則整個過程將耗費相當多的計算機時間。影響半徑的選取適當與否，不但影響分析的結果，也決定計算的效率。

本文由理論的推導找尋出一理論影響半徑，並以東亞地區探空觀測網及模擬氣象場分佈做分析。結果驗證理論影響半徑（ $RI = (4kE)^{1/2}$ ）中之 E 值取為 4（ $RI = 4k^{1/2}$ ）時，分析結果最為理想且計算最經濟迅速。同時發現若以選取固定測站數做為限制時，所選取的測站數必須和理論影響半徑內可能涵蓋的最多測站數相近才能得到理想的分析結果。Barnes 的方法具有選擇波長的優點，理論影響半徑當然也隨波長不同而有所改變。因此為使分析結果達到最理想，對於天氣系統波長的估計是相當重要的，尤其是具有高低中心的氣象場分佈。

誌謝

本研究承國科會專題研究計畫（NSC 76 - 0202 - M 008 - 07）部份經費支援，國立中央大學電算中心及大氣物理系提供 CYBER - 720 及個人電腦使用，謹此誌謝。審稿者提供寶貴的意見亦在此一併誌謝。

參考文獻

- Barnes, S.L., 1964: A technique for maximizing details in numerical weather map analysis. *J. Appl. Meteor.*, 3, 396-409.
- , 1973: Mesoscale objective map analysis using weighted time series observations. NOAA Tech. Memo. ERL NSSL-62, 60pp.
- Cressman, G.P., 1959: An operational objective analysis system. *Mon. Wea. Rev.*, 87, 367-374.
- Lin, S.C., and T.-K. Chiou, 1985: Objective scale separation technique and its application on the mesoscale convective system diagnosis. *Paper Meteor. Res.*, 8, 69-94.

SELECTION OF INFLUENCE RADIUS FOR THE BARNES OBJECTIVE
ANALYSIS SCHEME

by
Song Chin Lin and Wen Mei Chen

Department of Atmospheric Physics
National Central University

(Manuscript received December 4, 1986; in final form January 16, 1987)

ABSTRACT

Theoretically, it is not necessary to specify a radius of influence for the Barnes objective analysis scheme. However, in order to improve the computational efficiency, a radius of influence is usually prescribed when seeking stations for the grid point. Adequacy in selecting an influence radius will affect not only the quality of analysis, but also the computational efficiency. In this study, a theoretical radius of influence is derived and proved to be optimal by analyzing a simulated wave in the Eastern Asia area. The optimal influence radius is $4k^{1/2}$ where k is the weighting function parameter.