

# 半拉格朗日法雲模式在中小尺度模擬的應用

張博雄<sup>2,3</sup> 曾忠一<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>中央研究院物理研究所

<sup>2</sup>國立台灣大學大氣科學系

<sup>3</sup>中央氣象局

(中華民國八十八年七月二十二日收稿；中華民國八十九年四月十四日定稿)

## 摘 要

半拉格朗日法允許較大時步的優點十多年來一直受到很大的注目，例如歐洲中期天氣預報中心的全球波譜模式最近已採用半拉格朗日法進行預報。基於未來中小尺度模式的整合，半拉格朗日法正逐步朝向中小尺度非靜力模式進展。中小尺度模擬需考慮複雜的氣象場，而這些時空變化很大的物理量常常引起數值計算上的雜波，這些雜波往往使得正值的物理量變為負值，而且透過非線性作用也會破壞數值解，不正確的處理方法會導致數值格式失去守恆性質，特別是在中小尺度的模式中。

在從事中小尺度的模擬時，如果要提高解析度，模式的時步往往受限於穩定度。本文透過對流實驗來探討半隱式半拉格朗日法應用在中小尺度模擬時出現的問題。在高解析度的平流實驗中我們發現，半拉格朗日法與單調格式在適當的 Courant 數，在節省積分時間的情況下，可以有更好的守恆性質。另一方面，熱對流實驗的研究結果顯示，在熱對流胞邊緣的強梯度處採用單調格式的半拉格朗日法，可以增加形狀的保存性和模式的穩定性。

關鍵字：半拉格朗日法，單調格式，雲模式

## 一、前 言

當我們要改進數值模擬或預報模式的性能時，會發現數值方法和數值技巧變得非常重要。例如半拉格朗日法(Staniforth and Cote, 1991;

曾忠一, 1993)若使用半隱式格式可以使預報時間步長(time step)明顯增長，進而在有限的計算機資源下減少計算時間。近年來由於計算機運算速度的增加，因此模式解析度可以再提高，並且使用假設較少的基本方程，例如中小尺度

模擬中所採用的非靜力模式。這些模式中通常包含快速移動的重力波和聲波，計算方法和技巧就更加重要了。這些快速移動的波動常常限制了時間步長，而最大步長的選取則往往是由於穩定性而非準確度的考慮。雖然半隱式格式可使時間步長加大，但仍小於足夠準確度所要求的值，採用半拉格朗日法則可在不損失準確度的情況下加大時間步長。根據 Robert(1982)，結合半隱式和半拉格朗日法的數值格式可使時間步長加大六倍左右。半隱式半拉格朗日法在大尺度模式中已獲得不錯的結果，基於未來中小尺度模式的整合，這個平流格式正逐步朝向中小尺度非靜力模擬進展。Tanguay 等人(1990)首先將半隱式半拉格朗日法應用在非靜力區域模式中，雖然一些物理過程較作業中的靜力模式要簡化一些，但他們得到半拉格朗日法可以應用於非靜力模式的結論。他們的模式中並沒有考慮地形效應，水物資的變化也非常簡單，垂直解析度也低。另外，在積雲對流的模擬中，複雜的水物質場變化需有一個合理的單調內插格式。半拉格朗日法的流體動力模擬必須採用正確的內插計算過程，這些內插過程通常稱為形狀保存內插格式，或者被設計成單調內插格式。

張與曾(1998)分別對三種不同單調格式進行半拉格朗日法的平流實驗，就無輻散均勻流場、變形流場及熱胞對流進行測試。由實驗結果可知，採用單調內插格式不但不會影響半拉格朗日法原有的優點，而且可以抑制非物理性雜波的產生。在這些單調格式中使用的 Courant 數較小，實驗結果總質量並不守恆，因此對一些需長期預報的模式並不適合，或許必須改用修正的單調格式。Holnicki(1995)的方法在圓錐體個案中總質量增加約 4%，其餘格式的總質量

變化都在 1% 以內。在誤差方面，三種格式的誤差來源不論在均勻流場或變形流場中，頻散誤差佔主要部分。由於半拉格朗日法的耗散誤差已經比傳統的尤拉格式要小，因此耗散誤差對於以半拉格朗日法為主的模式而言較不重要。若以誤差做比較，QMSL(Bermejo and Staniforth 1992 的方法)的誤差比另外兩種要大，而不論傳統半拉格朗日法或單調格式對物理量場的形狀都有很好的保存性。在變形流場測試中，在短時間尺度的積分方面，三種格式都與解析解相近，但是 QMSL 的方法比 Holnicki 法更容易將流體元分布的細微部分表現出來，即保有較小尺度的物理性擾動。由長時間積分的結果來看，QMSL 法可以穩定地模擬出梯度的變化，而傳統半拉格朗日法會產生不穩定的現象，也就是對於較複雜的不連續區域無法穩定地積分。在進行三維數值實驗時，Holnicki 的方法在積分初期會有微小的負值產生，若處理不當誤差就會透過計算過程而變大。

由上述實驗可知，傳統半拉格朗日法在進行小尺度模擬時在強梯度處的積分容易產生誤差，這些誤差可能由於數值方法的 undershoot 造成梯度增加，以致在熱胞邊界處產生明顯的 Kelvin-Helmholtz 波，因而影響熱胞的挾捲 (entrainment) 過程。一些學者指出，傳統半拉格朗日法的三次樣條(cubic spline)內插函數，對於一些因內插而產生的擾動具有耗散作用，可以消除部分 overshoot 或 undershoot，因此加不加入單調格式對模式模擬的結果影響不大。但是由小尺度模擬結果可知，對於具有高度湍流(turbulence)的雲尺度來說，單調格式對積雲的挾捲過程會有很大影響，特別是當半拉格朗日法採用較大時步時，不同時步及解析度下的模擬結果與加入單調格式的模擬會有較大的差異

。我們將對傳統半拉格朗日法及單調格式進行熱胞對流測試，另外對實際大氣的雲模式進行個案模擬比較，討論二維(面對稱)雲模式的結果。

## 二、不可壓縮熱胞對流實驗

從數值技術的觀點來看，Boussinesq 方程可以描述典型的流體運動特徵，同時不可壓縮熱胞的對流實驗可以用來驗證非線性流體運動

的細部結構以及較高 Courant 數的結果。張與曾(1998)的實驗表明，單調半拉格朗日法在變形流場個案中可以模擬出流場的細部結構，但他們並未探討高 Courant 數的情況。如果在張與曾(1998)缺口圓柱實驗中增加 Courant 數，可以得到圖 1 的結果，這是積分區域內的總質量、總能量、極大值、極小值與 Courant 數的關係。由圖 1 可以看出，當 Courant 數增加時，總質量的守恆性三者都極為接近於 1，尤其在 Courant 數 4 至 8 的區間更是如此。而在這區間內總能量的

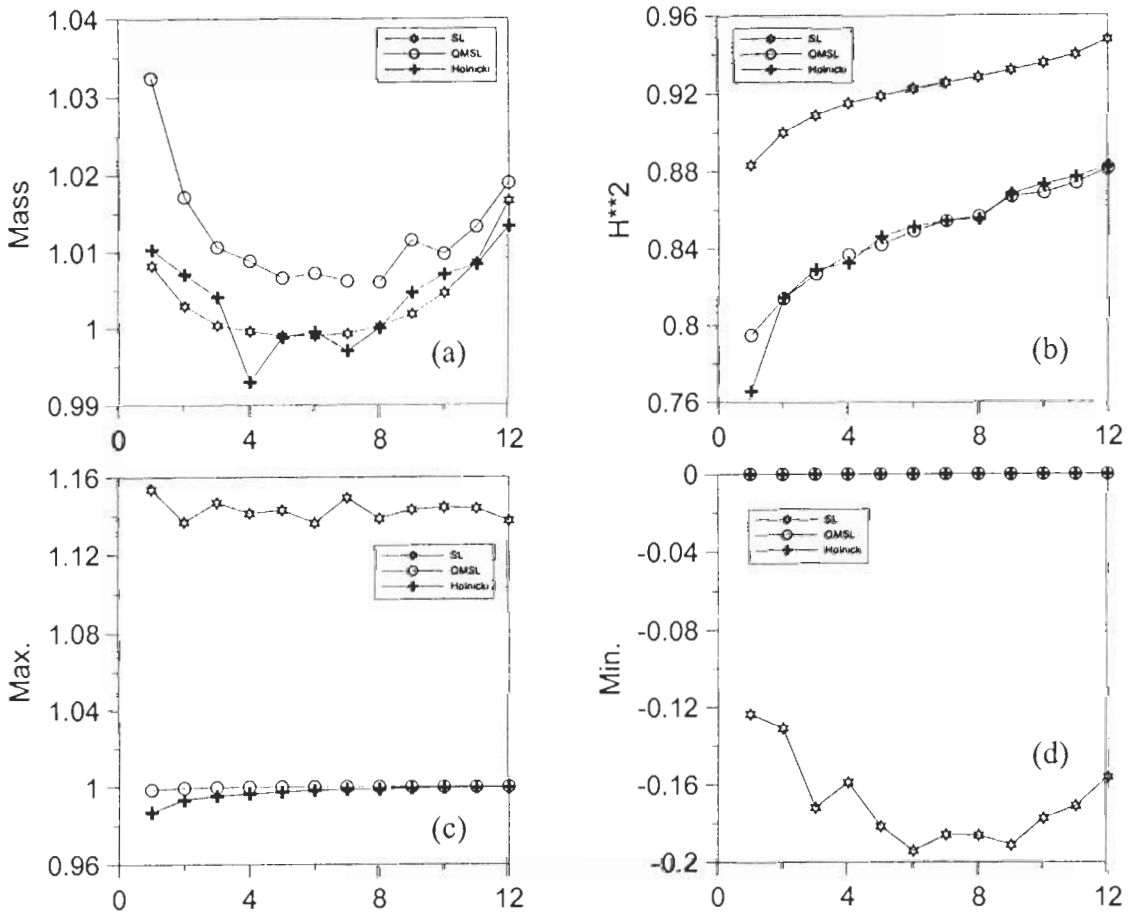


圖 1 傳統半拉格朗日法(SL)、QMSL 法和 Holnicki 格式缺口圓柱實驗的結果。(a)、(b)、(c)、(d)分別為總質量、總能量、極大值、極小值(縱座標)與 Courant 數(橫座標)的關係。

增加趨向和緩且接近於 1，由此顯示時步和格距的選取都會影響到模擬結果。另外，傳統半拉格朗日法不論 Courant 數多少，其物理量的極值都是最大的。這顯示在中小尺度的模擬中，提高解析度或增加時步時，單調半拉格朗日法仍然可以得到不錯的結果。在不同解析度和時步下，模式對於熱胞對流邊界情況的模擬將會影

響到熱胞的挾捲效果，因此本文透過熱胞對流模擬與其他學者得到的結果進行比較。

Robert(1993)利用半隱式半拉格朗日法進行乾燥大氣的熱胞對流實驗，他認為這個方法可以得到高效率的模擬結果。由於解析解無法求得，因此模擬的結果是與發表過的類似實驗論文進行比較。Robert(1993)指出，半隱式半拉

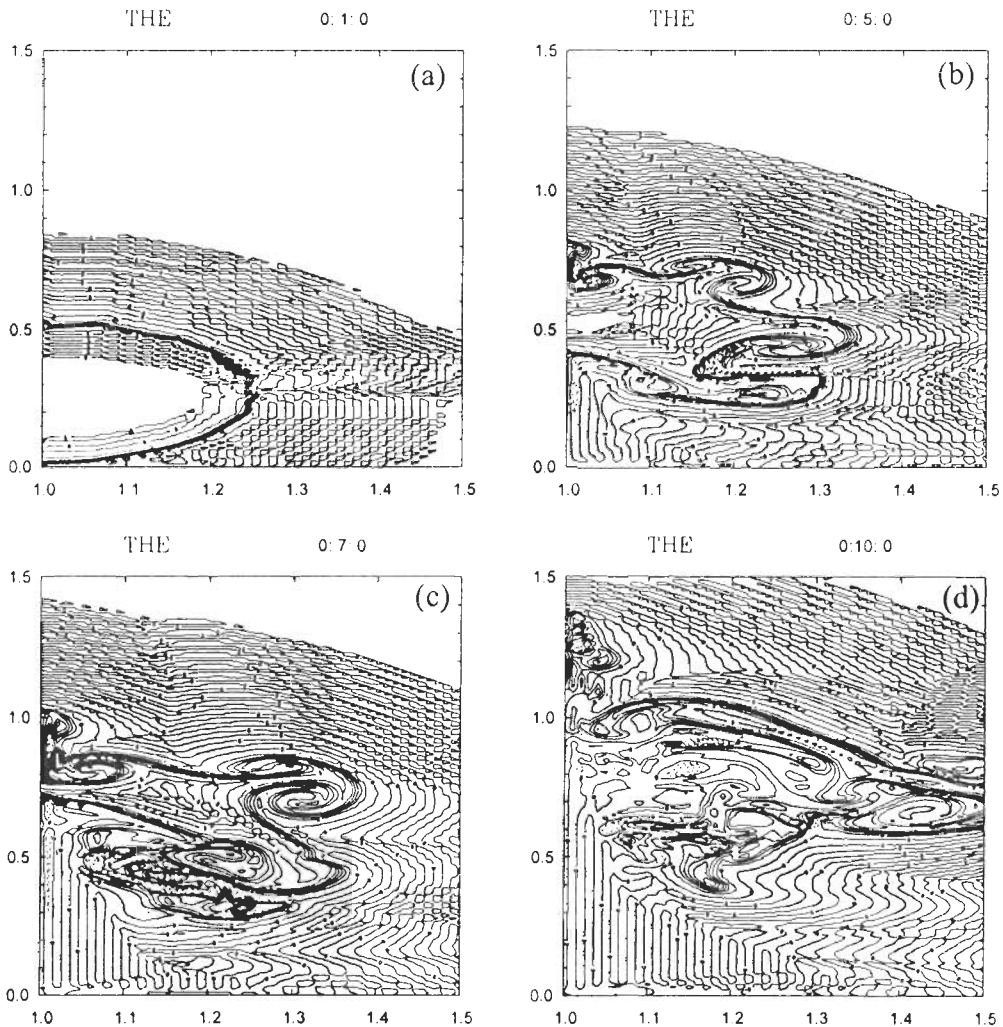


圖 2 傳統半拉格朗日法(SL)熱胞對流模擬的結果，(a)、(b)、(c)、(d)分別為積分 1 分鐘、5 分鐘、7 分鐘、10 分鐘的擾動位溫，等值線間距  $0.1^{\circ}\text{K}$

格朗日法的效率較高，但是熱胞邊緣處仍有些 overshoot 或 undershoot 無法消除，不過這些邊緣處的雜波已經比其他模式要少。Smolarkiewicz and Pudykiewicz(1992)的結果則顯示相似的流場結構，但加入單調格式可以消去邊界上的雜波。爲了了解半拉格朗日法在小尺度模擬時在不同時步不同解析度下的表現，我們根據 Robert(1993)考慮一個絕熱不可壓縮的環境流場

，使用的預報方程如下：

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla\pi - g\frac{\theta'}{\theta_0}\nabla z$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$$

$$\mathbf{V} = (u, v)$$

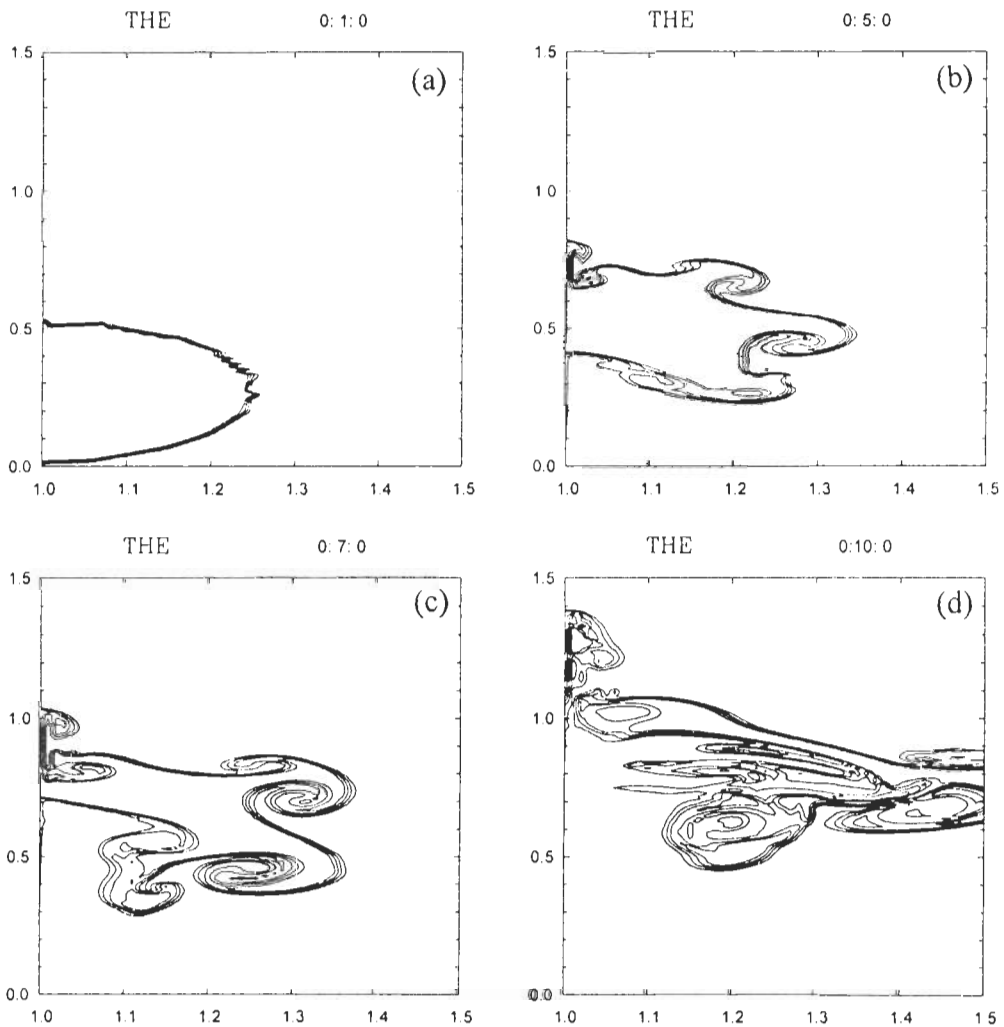


圖 3 QMSL 法熱胞對流模擬的結果，(a)、(b)、(c)、(d)分別爲積分 1 分鐘、5 分鐘、7 分鐘、10 分鐘的擾動位溫，等值線間距 0.1°K。

在這個實驗裏我們採用一個二維等位溫大氣的環境場，環境位溫為 328 °K，積分範圍是 2 公里 $\times$  2 公里。熱胞直徑是 500 公尺，底部距下邊界 10 公尺，它的位溫比環境高 0.5 °K，熱胞透過浮力自由上升，在模式的邊界上使用固定邊界條件。首先採用的初始場呈圓盤狀，這與 Robert(1993)圖 1 所採用的條件相同，也就是直徑為 500 公尺分布均勻的位溫擾動場。我們分

別考慮傳統半拉格朗日法、QMSL 格式以及 Holnicki(1995)格式。因為對流對稱於積分區域中央線，故只顯示對流狀況的右半部圖形。格點數為 200 $\times$ 200，時步 5 秒，格距為 10 公尺，積分時間 20 分鐘，數值實驗結果如圖 2 到 4 所示。三種方法所花費的時間分別為傳統半拉格朗日法 833 秒，QMSL 格式 837 秒，Holnicki 格式 849 秒。就計算的效率而言，Holnicki 所需

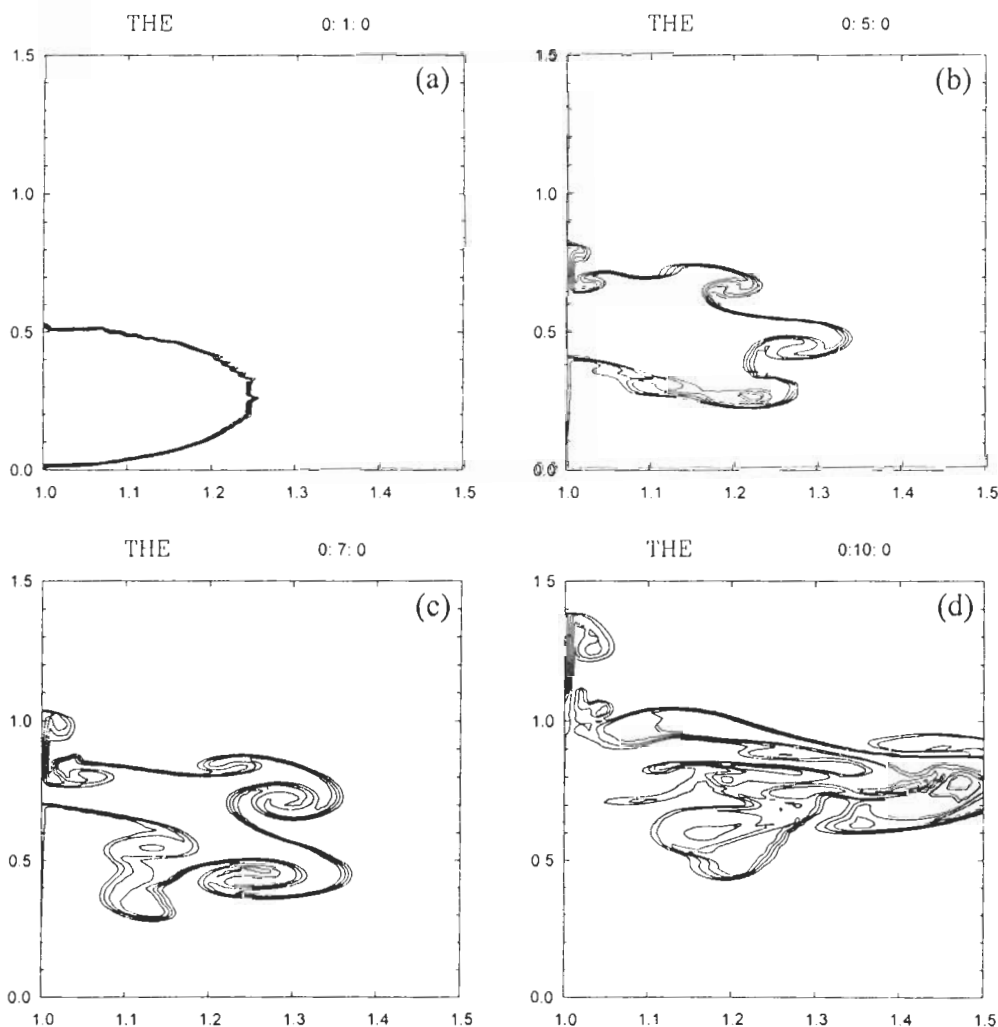


圖 4 Holnicki 格式熱胞對流模擬的結果，(a)、(b)、(c)、(d)分別為積分 1 分鐘、5 分鐘、7 分鐘、10 分鐘的擾動位溫，等值線間距 0.1 °K

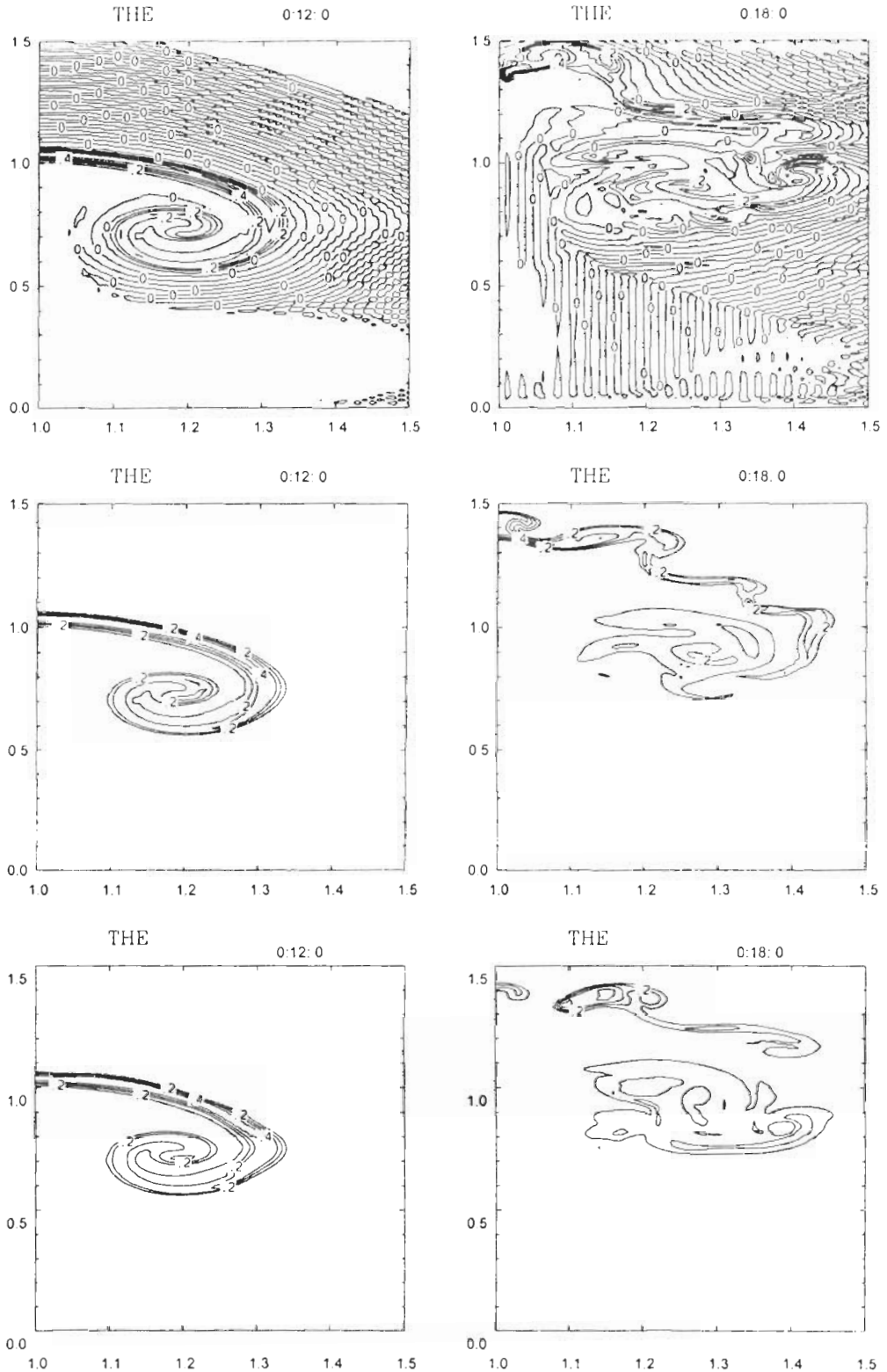


圖 5 傳統半拉格朗日法(SL)(上)、QMSL 法(中)與 Holnicki 格式(下)的積分結果，左圖積分 12 分鐘、右圖 18 分鐘的擾動位溫，時步為 5 秒，等值線間距  $0.2^{\circ}\text{K}$ 。

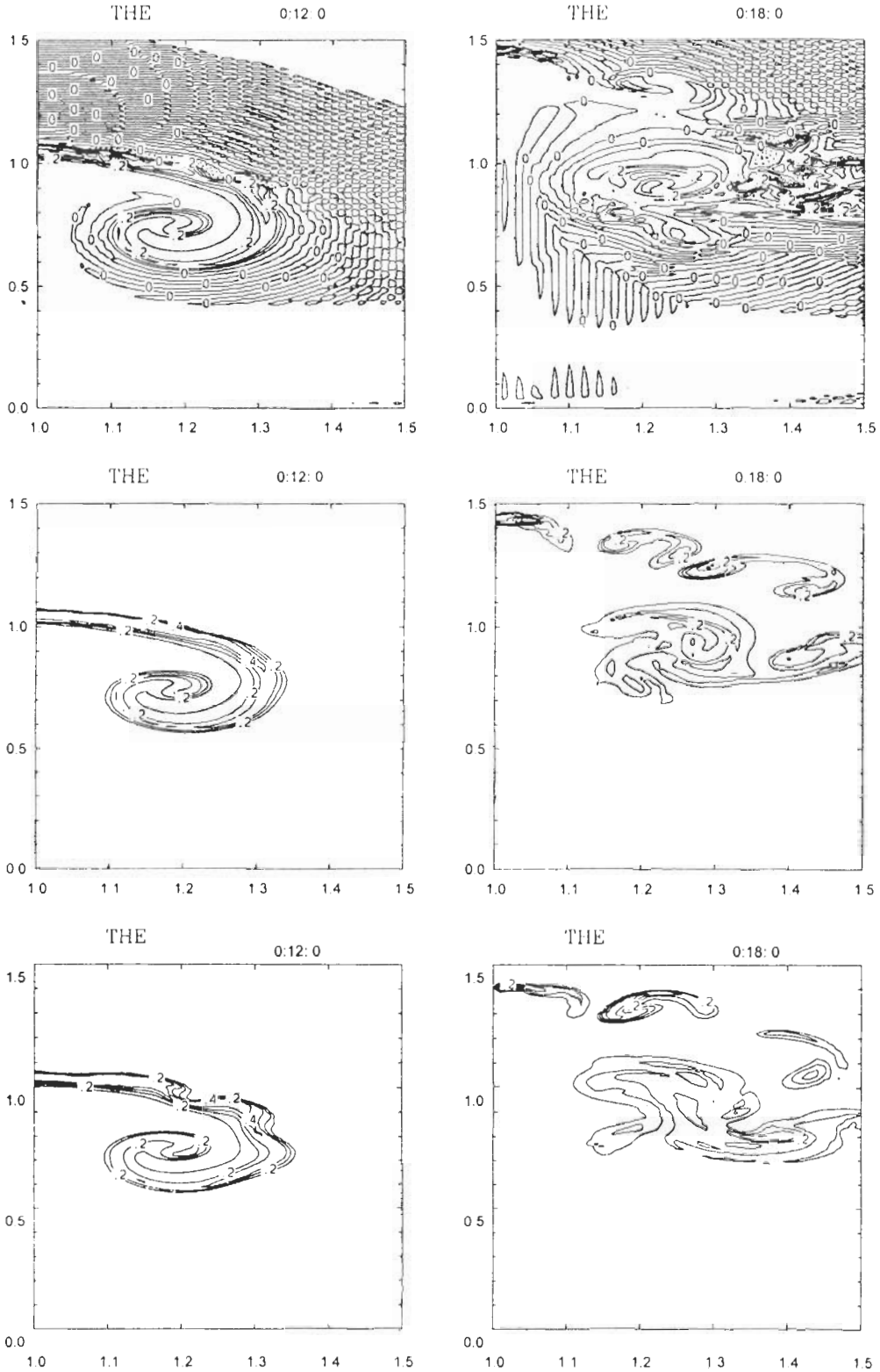


圖 6 時步為 10 秒，傳統半拉格朗日法(上)、QMSL 法(中)與 Holnicki 格式(下)積分結果，左圖積分 12 分鐘、右圖 18 分鐘的擾動位溫，等值線間距 0.2°K



的時間較多，而 QMSL 所需時間與傳統半拉格朗日法相近。第 7 分鐘擾動位溫分布的結果若與 Robert (1993) 和 Smolarkiewicz and Pudykiewicz (1992) 的結果比較，則本文與後者較為相近，擾動位溫分布狀況大致相同。QMSL 與 Holnicki 格式都可模擬出四個主要的挾捲區域，而傳統半拉格朗日法則無法模擬出下方的兩個挾捲過程。傳統半拉格朗日法極大值和極小值分別是 4.24050286 和 -2.76434541。這表示在熱胞對流測試中，半拉格朗日法所具有的耗散作用並不足以消去因內插而造成的 overshoot 和 undershoot，而且原本盤狀分布的位溫也呈現出波動的狀況。第 12 分鐘結果若與 Smolarkiewicz and Pudykiewicz (1992) 圖 3c 比較，則 QMSL 法得到的結果較相近，而 Holnicki 法的結果在中央區域的位溫擾動範圍縮小，傳統半拉格朗日法由於邊界處有較明顯 Kelvin-Helmholtz 波產生，也造成位溫擾動範圍明顯縮小。

接著我們用邊緣位溫梯度較平緩的熱胞進行測試，也就是和 Robert(1993)圖 4 的條件相同，時步為 5 秒，熱胞中心為直徑 100 公尺的等值位溫擾動，半徑 50 公尺至半徑 500 公尺之間的位溫則呈高斯遞減到熱胞邊緣上等於零。測試得到的圖 5 可與 Robert (1993)圖 4 比較。傳統半拉格朗日法的位溫極大值和極小值分別是 0.588936537 和 -0.0511069335，因此傳統半拉格朗日法有較大的位溫擾動。Holnicki 格式如同張與曾(1998)的二維及三維實驗結果一樣，物理量場的形狀較不保存，位溫的分布與其他格式明顯不同，這與 Holnicki 格式採用五次內插函數及斜率限制有關。QMSL 法在本質上仍然是用三次樣條函數進行內插，因此在許多實驗中 QMSL 法與傳統半拉格朗日法的物理量場分佈幾乎相同。圖 6 顯示三種格式在時步為 10 秒時第 12 分鐘的結果，QMSL 法顯示在邊界開始產生雜波，但位溫的分布與時步 5 秒時大致相同，而傳統半拉格朗日法與 Holnicki 格式則產生

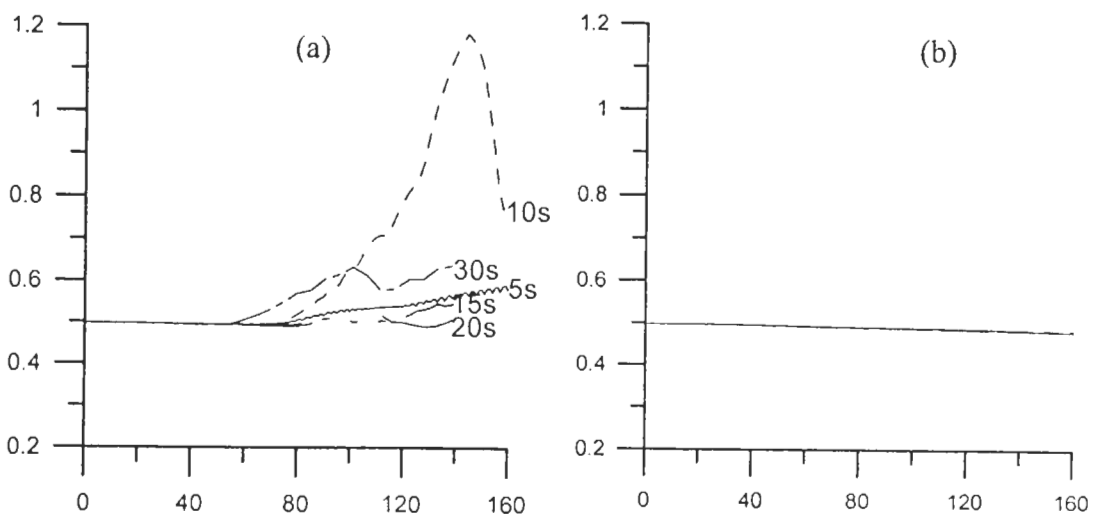


圖 7 (a)為傳統半拉格朗日法(SL)分別以不同時步計算熱胞對流實驗的結果，縱座標為擾動位溫的極大值，橫座標為時間。(b)為 QMSL 格式的結果。

明顯的不穩定現象。Holnicki 格式在第 12 分鐘時開始出現破裂現象，由此可知熱胞邊緣有明顯的挾捲過程，這與 Robert(1993)的結果有較大差異。由圖 7 可看出，傳統半拉格朗日法中位溫擾動的極大值隨時步有較大的變化，當時步為 20 秒時極大值的變化最小，這個結果與圖 1c 相同，這顯示出時步和格距選取的重要性。

### 三、二維雲模式及個案模擬的比較

本研究以二維半拉格朗日法非靜力雲模式為基礎進行模擬，採用的基本方程是可壓縮的，且允許聲波及重力波存在。雖然聲波在熱對流運動中是不重要的，但必須採用較小的積分時步來限制它的快速傳播，也因為如此許多模式已將基本方程中的聲波濾除。近來一些學者嘗試使用可壓縮模式來模擬積雲對流，但時步卻受限於聲波及重力波的緣故而不能太大。Klemp and Wilhelmson(1978)的二維雲模式中提出，可壓縮方程比滯彈性方程有更多的優點，特別是在三維的模式中。本文的模式採用的八個預報基本方程如下：

動力方程

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + c_p \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial x} &= D_u \\ \frac{dv}{dt} + c_p \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial y} &= D_v \\ \frac{dw}{dt} + c_p \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi}{\partial z} \\ &= g \left( \frac{\theta'}{\bar{\theta}} + 0.61q'_v - q_r - q_c \right) + D_w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dt} + \frac{c^2}{c_p \bar{\rho} \theta_v^2} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\rho} \theta'_v u) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\rho} \theta'_v v) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} \theta'_v w) \right] \\ = \frac{R_d \Pi}{c_v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{c^2}{c_p \theta_v^2} \frac{d\theta_v}{dt} + D_\pi \end{aligned}$$

其中  $u$ 、 $v$ 、 $w$ 、 $\pi$  分別代表水平、垂直速度場及無因次氣壓場，其他符號和一般所用的相同。 $\pi$  的定義如下：

$$\Pi = \bar{\pi} + \pi = \left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{R_d}{c_p}}$$

熱力方程

$$\begin{aligned} \frac{dq_v}{dt} &= M_{q_v} + D_{q_v} \\ \frac{dq_r}{dt} &= M_{q_r} + D_{q_r} \\ \frac{dq_c}{dt} &= M_{q_c} + D_{q_c} \end{aligned}$$

其中  $q_v$ 、 $q_r$  和  $q_c$  分別代表水汽、雲滴和雨滴的混合比， $M$  代表各種水物質的生成項， $D$  表示次網格渦流項。積雲對流應該是一種充滿湍流的大氣運動，利用參數化法來描述渦流運動是不合理的，尤其是在積雲邊界上的挾捲效應。為了較正確地預報次網格的運動，我們採用預報渦流動能的方式來得出  $D$  的值，使用 Sun and Hsu(1987)二階閉合的渦流動能收支方程 (turbulent kinetic energy budget)：

$$\begin{aligned} D_\phi &= \frac{\partial}{\partial z} \left( K \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ \frac{d\bar{E}}{dt} &= \frac{g}{\theta_0} \overline{w'\theta'_v} - \overline{u'w'} \frac{\partial u}{\partial z} - \overline{v'w'} \frac{\partial v}{\partial z} \\ &\quad - \left( \frac{\partial \overline{w'(E + p'/\rho_0)}}{\partial z} \right) - \varepsilon \end{aligned}$$

$$K = \begin{cases} K_m, & \text{當 } \phi = u, v, w \text{ 時} \\ K_h, & \text{當 } \phi = \theta, q_w \text{ 時} \end{cases}$$

其中  $\bar{E} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ ， $D_\phi$  由  $K$  和  $\bar{E}$  求出的詳細計算過程可參考 Sun and Hsu(1987)。

半拉格朗日法以往大都使用於大尺度大氣運動的模擬，本研究則比較二維半隱式半拉格朗日法非靜力雲模式與個案之間的差異。雲微物理採用 Lin *et al.*(1983)參數化法。在雲參數化格式中假設，雲滴的數目與半徑比例呈 Marshall-Palmer 分布，降水質點的拖曳力等於質點重量，飽和水汽壓採用 Tetens 公式計算。雲內不允許有過飽和現象，若產生過飽和則採用 Tao *et al.*(1989)的飽和調整技術加以修正。

本研究使用一個典型熱帶大氣環境來模擬淺積雲對流的狀況。做為基本狀態，溫度在地面設為 25 °K，從地面向上到雲底（雲底假定在 0.8 km）按乾絕熱遞減率減小，雲底以上的溫度遞減率為 6.6 °K/km。相對溼度在地面為 70%，從地面到雲底呈線性增加，到雲底時為 90%。雲底以上的相對溼度以 7.5%/km 的遞減率減少，在更高的高度上相對溼度為 30%。這種溫溼分布表示，在大約 12.5 公里以下大氣是條件不穩定的。平流格式採用半隱式半拉格朗日法，流體軌跡採用二時間層格式計算，時間步長取 20 秒。單調格式採用 QMSL 法，僅針對水物質變數作用。對於區域雲模式的邊界條件問題，我們採用吸收邊界的方法，這種方法可有效地吸收因對流而產生的重力波，不需在

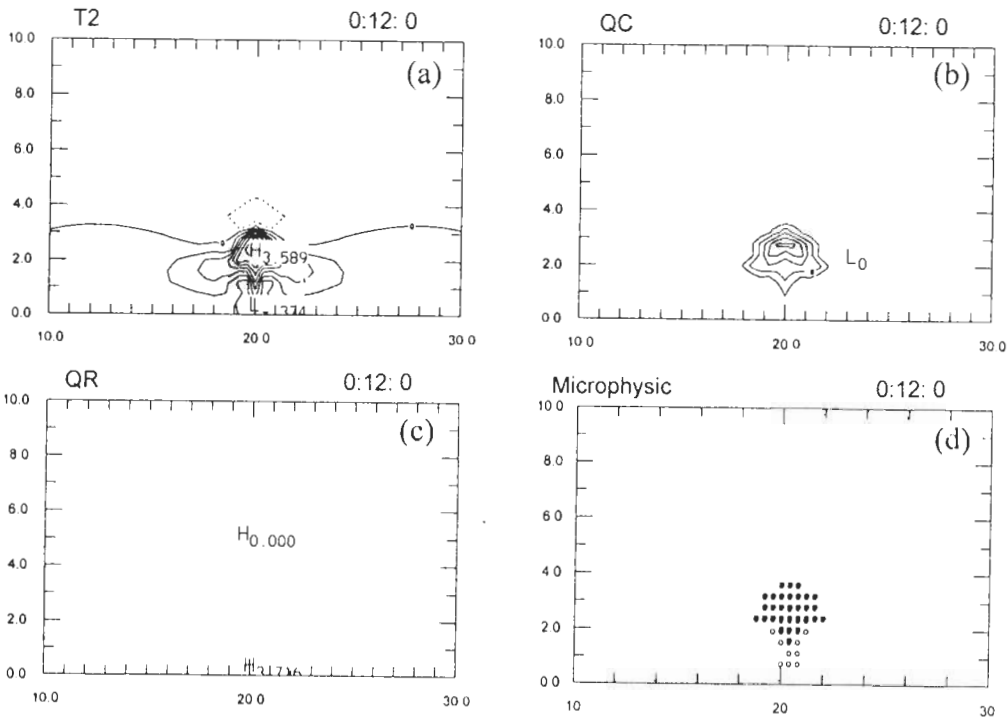


圖 8 模式積分 12 分鐘時的擾動溫度(a)、雲滴(b)、雨滴(c)及雲滴與雨滴合成圖(d)。圖中“@”表示雲滴濃度大於 0.5 g kg<sup>-1</sup>，“o”表示雨滴濃度大於 1 g kg<sup>-1</sup>。

邊界上進行複雜的計算就可以有效地抑制重力波和聲波從邊界的反射。這個方法是在預報方程右方加入下式：

$$D_{\varphi} = \varphi + (1 - k)\varphi'$$

其中  $k$  為吸收係數，根據不同的個案採用不同值，一般多採用線性遞減到邊界上等於 1 的情況。環境風場假設為零，初始熱胞按照下式計算：

$$\theta' = \theta_0 \left\{ 1 - \left[ \frac{z_0 - z}{z_0 - (\Delta z / 2)} \right]^2 \right\} \left( 1 - \frac{r^2}{r_0^2} \right)$$

$\theta_0$  取為  $0.5^\circ\text{K}$ ， $r_0$  為三倍格距， $z_0$  為  $2\text{ km}$ 。熱胞中心相對溼度 100%，且假設初始雲滴濃度為  $1.0\text{ g kg}^{-1}$ ，時步為 20 秒。根據 Soong & Ogura(1973)的研究結果，軸對稱模式在 20 分鐘時垂直速度達到最大值  $12.9\text{ m s}^{-1}$ ，擾動位溫在 18 分鐘時達最大值  $3.1^\circ\text{K}$ 。雨水濃度在 23 分鐘時達最大值  $5.2\text{ g kg}^{-1}$ ，27 分鐘時下沉速度達最大值  $3.8\text{ m s}^{-1}$ 。圖 8 為積分 12 分鐘時的擾動溫度、雲滴、雨滴及雲滴與雨滴的合成圖。雲滴自動碰併形成雨滴的最小濃度值為  $1\text{ g kg}^{-1}$ ，雨滴第 10 分鐘在對流雲下方形成。第 12 分鐘時由於雨滴的拖曳力在對流雲下方形成下降氣流，而對流雲中心的上升速度為  $8.6\text{ m s}^{-1}$ ，對流中心兩

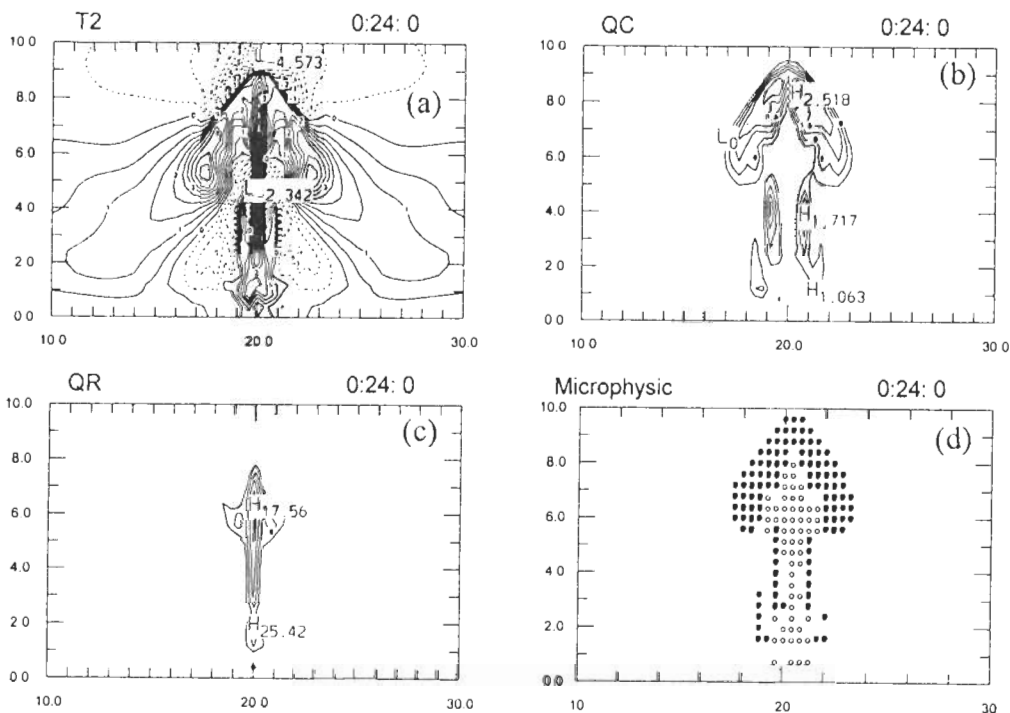


圖 9 模式積分 24 分鐘時的擾動溫度(a)、雲滴(b)、雨滴(c)及雲滴與雨滴合成圖(d)。圖中“@”表示雲滴濃度大於  $0.5\text{ g kg}^{-1}$ ，“o”表示雨滴濃度大於  $1\text{ g kg}^{-1}$ 。

側有微弱的下沉氣流。擾動溫度最大值為  $3.6\text{ K}$ ，位於最大上升運動中心的上方，對流雲頂有微弱的負溫度擾動。圖 9 為 24 分鐘時的擾動溫度、雲滴、雨滴及雲滴與雨滴的合成圖，此時雨滴已經降落到地面，擾動溫度為  $5.13\text{ K}$ ，上升速度達  $19.0\text{ m s}^{-1}$ ，最大下降速度為  $10.4\text{ m s}^{-1}$ 。

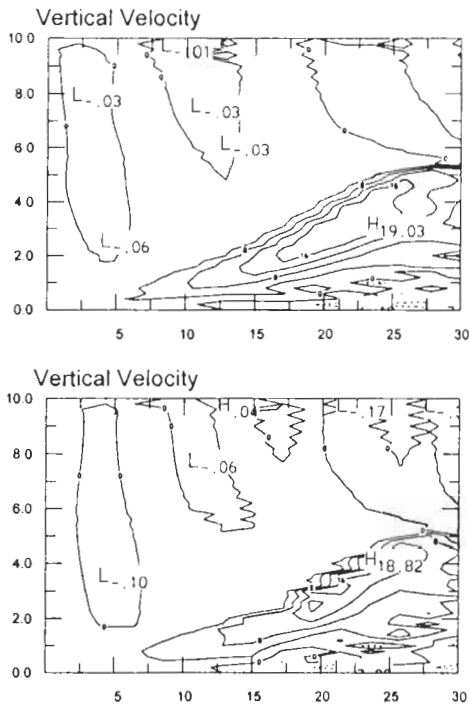


圖 10 探討不同時步對非靜力雲模式的影響，使用前述模式條件，但時步分別為 20 秒、30 秒和 40 秒。最大垂直運動軸隨時間的變化顯示，半拉格朗日法雲模式對時步大小的敏感度較小，不過模式在時步 20 秒至 40 秒區間內最大垂直運動變化小，在這個時步區間外的模擬結果呈現不穩定現象。

圖 10 在前述模式條件下，但時步分別為 20 秒、30 秒和 40 秒時的最大垂直運動軸隨時間的變化圖。

#### 四、結果討論

從熱胞對流的測試可知，傳統半拉格朗日法若不加入單調格式，則對小尺度模擬會造成不可預期的誤差，特別是在高度湍流的大氣中。在不可壓縮等位溫大氣的熱胞對流實驗中，熱胞上升時熱胞邊緣產生的挾捲作用，使得外圍空氣得以被挾捲進入熱胞中，而熱胞中心的性質(溫度)在與進入的空氣充分混合前應該是不變的。這種挾捲過程在一般的雲模式中通常採

用參數化的方式來描述，透過高解析度的模式我們可以較清楚地了解不同單調格式對挾捲過程的影響。

由於傳統半拉格朗日法通常採用三次樣條函數進行內插，在熱胞實驗中不論熱胞邊緣的溫度分布是平緩或急劇變化，模擬結果顯示在熱胞中心都會出現較大溫度值。這些溫度極大值的現象將會由於解析度的提高以及時步的增加而更加顯著，變動太大的溫度場對雲模式中的雲微物理過程可能會有影響，例如高溫將使

雲滴延後產生。如圖 7 中積分時間步長與溫度極大值的關係所示，模式在時步 10 秒時所產生的位溫變化最大，後來變化又隨時步降低。當時步 20 秒時位溫變化較平緩，但時步增加後又使位溫變化加大。圖 1 的結果顯示，適當範圍內的 Courant 數可以使半拉格朗日法平流過程中產生的誤差達到最小，時步太小或太大都會造成預報場較大的變化，因此必須注意時步和解析度的選取。

另外，在計算時間方面，Holnicki 格式花費的時間較長，傳統半拉格朗日法費時較少，而 QMSL 格式費時與傳統半拉格朗日法較接近。在中小尺度半拉格朗日法模式中採用單調格式確實可以抑制以往模擬中出現的雜波，並且較正確地模擬出雲模式中的水物質變化，但不會增加計算負擔。

## 致 謝

本文是在國科會計劃 NSC87-2111-M-001-001 支持下完成的，在這裏表達謝意。

## 參考文獻

- 張博雄與曾忠一, 1998: 半拉格朗日法單調平流格式的數值實驗, *大氣科學*, **26**, 325-342.
- 曾忠一, 1993: 大氣模式的數值方法. 渤海堂, 台北市, 695 頁.
- Bermejo, R., and A. Staniforth, 1992: The conversion of semi-Lagrangian advection schemes to quasi-monotone schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2622-2632.
- Holnicki, P., 1995: A shape-preserving interpolation: Applications to semi-Lagrangian advection. *Mon. Wea. Rev.*, **123**, 862-870.
- Klemp, J. B., and R. B. Wilhelmson, 1978: The simulation of three-dimensional convective storm dynamics. *J. Atmos. Sci.*, **35**, 1070-1096.
- Lin Y. L., R. D. Farley, and H. D. Orville, 1983: Bulk parameterization of the snow field in a cloud model. *J. Climate Appl. Meteor.*, **22**, 1065-1092.
- Robert, A., 1982: Semi-Lagrangian and semi-implicit numerical scheme for the primitive meteorological equations. *J. Meteor. Soc. Japan*, **60**, 319-325.
- Robert, A., 1993: Bubble convection experiments with a semi-implicit formulation of the Euler equations. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1865-1873.
- Smolarkiewicz, P. K., and J. A. Pudykiewicz, 1992: A class of semi-Lagrangian approximations for fluids. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 2082-2096.
- Soong, S. T., and Y. Ogura, 1973: A comparison between axisymmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 879-893.
- Staniforth, A., and J. Cote, 1991: Semi-Lagrangian integration scheme for atmospheric models--A review. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2206-2223.
- Sun, W. Y., and W. R. Hsu, 1988: Numerical study of a cold air outbreak over the ocean. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 1205-1227.
- Tanguay, M., A. Robert, and R. Laprise, 1990: A semi-implicit semi-Lagrangian fully compressible regional forecast model. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 1970-1980.

## **Application of Semi-Lagrangian Cloud Model to Meso and Small Scale Modelling**

**Po-Hsiung Chang<sup>2,3</sup>**

**Chung-Yi Tseng<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>**Institute of Physics, Academia Sinica**

<sup>2</sup>**Department of Atmospheric Sciences, National Taiwan University**

<sup>3</sup>**Central Weather Bureau**

**(Manuscript received 14 September 1999; in final form 14 April 2000)**

### **ABSTRACT**

The advantage of semi-Lagrangian advection scheme that permits larger time step is attractive for a long time. For example, ECMWF has used the semi-Lagrangian scheme in their global spectral model. Recently the semi-Lagrangian method is gradually extended to meso and small scale nonhydrostatic models. The variations in meso and small scale meteorological fields are very complicated and often induce spurious noises in the integration process. The noises make the solutions negative that must be positive physically. They also contaminate the solution through nonlinear interactions and make the advected quantities non-conservative, especially in meso and small scale cloud models.

The time step is constrained by stability condition when increased resolution is used in cloud models. We probe the application of semi-Lagrangian advection scheme in meso and small scale modeling by two convection problems. In a high resolution experiment, the monotone semi-Lagrangian method can conserve physical quantities with appropriate Courant number and save the computing time. In the thermal bubble experiment with strong gradient in thermal bubble boundary, the monotone semi-Lagrangian method achieves better shape-preserving and stability.

**Key words:** Semi-Lagrangian method, Monotone scheme, Cloud model