

二維對稱性不穩度的數值研究

許武榮 謝銘恩 侯昭平

國立台灣大學大氣科學系

(中華民國九十四年二月三日收稿；中華民國九十四年六月八日定稿)

摘 要

Solberg、Fjørtoft、Kuo 和 Eliassen 等學者自 1930 年代起就開始發展對稱性不穩度的理論，然而直到 1970、80 年代，大家才開始逐漸瞭解對稱性不穩定度在深對流中扮演關鍵角色，而像是鋒生、旋生、颱風甚至層狀降水中，對稱性不穩度受水氣影響，有利對流更進一步發展。雖然對稱性不穩度的理論已相當清楚，但真實大氣環流複雜多變，潛熱和非線性效應使我們無法求得真正的數學解，因此必須使用數值模擬的方式來幫助我們瞭解此問題。

本文使用台大-普度二維非靜力模式(NTU-Purdue 2D nonhydrostatic model)研究對稱性不穩定系統(symmetrically unstable system)。此模式採用顯式的向前向後時間積分格式(explicit forward-backward time integration scheme)，計算高頻波動及內重力波。由於此計算方式極為穩定，故此模式適合較長時間積分，這對於模擬像傾斜對流這種成長率相當小的個案而言是非常重要的。本次數值計算的結果與傾斜對流的解析解相當吻合，而在模式成功地加入濕動力過程後，考慮潛熱的實驗顯示水氣在調整成長率及對流運動均扮演重要角色。

關鍵詞：對稱性不穩度，非靜力數值模式，有效靜力穩定度

一、前 言

Solberg (1933)、Fjørtoft (1950)、Kuo (1954) 及 Eliassen (1962) 很久以前就發展出對稱性不穩度的理論，然而直到 70、80 年代人們才意識到它在激發深對流系統上的重要性(Sanders and Miller 1979; Raymond 1978)。濕的對稱性不穩度在許多方面引起更多興趣，例如它和鋒生

(Emanuel et al. 1987; Joly and Thorpe 1990; Holt and Thorpe 1991; Thorpe and Clough 1991)、爆發性旋生(Kuo and Low-Nam 1990)、關於颱風的層狀降水(Zhang and Cho 1992)等的交互作用。

Ogura et al. (1982) 分析 1979 年的 SESAME 資料，認為對稱性不穩度是激發德州強烈暴風雨的機制之一，他們對此一午後的劇烈風暴，

提出了以下的過程：首先混合層開始發展，然後因其引發之水平溫度差異，造成內陸海風效應(inland sea breeze effect)，此時邊界層內的斜壓性及風切增強，同時靜力穩定度因日照加熱而減少，終而導致對稱性不穩定發生。值得注意的是在德州北部山區，接近中性穩定層的大氣厚度高達 4 公里，頂部壓力值小於 600hPa，當鋒面系統接近時，局部地區的邊界層效應自然變得相當重要。他們並以 1979 年 5 月 9 日德州 Amarillo 的探空資料估算不穩定度成長率(請參考其圖 17)，擾動發展的 e-folding time 約為 2-3 小時。

而在東亞地區的天氣系統方面，Sun (1984) 指出：梅雨鋒面上的雲帶，和前面提到發生在美國 1974 年的颱風系統雲帶有某種相似性。雖然梅雨鋒面的溫度梯度較弱，但若考慮其豐沛水氣所釋放的潛熱影響，大氣環境的靜力穩定度實際上相當小，再加上梅雨系統伴隨的低層噴流(low level jet)所提供有利的強風切環境(Matsumoto and Ninomiya 1971)，從理查遜數(Richardson number)的角度來看，對稱性不穩定的條件是很容易滿足的。因為理查遜數是靜力穩定度和風切值的函數，弱靜力穩定度與強風切會使其值變小，當它小於 1 時，對流得以發展(Ooyama 1966, Stone 1966, Hoskins 1978)。在觀測上梅雨鋒面系統向東南移動、發展時間尺度、雲帶間隔(Ninomiya and Akiyama 1974)的特徵與許多發生在美國的強颱風系統的確有某種程度的相似性。

Bennetts and Hoskin (1979)曾以條件性對稱不穩定來解釋鋒面雨帶的形成。Xu (1986)在考慮摩擦效應下，也以理論推導出條件性對稱不穩定與中尺度雨帶的關係。由以上的文獻回顧可知，對稱性不穩定的機制在許多中小尺度的

大氣系統中扮演了重要的角色。

以數值模擬的方式來研究對稱不穩定激發的對流與雲帶是非常困難的，因其成長速率很慢(slow growth rate)，即使考慮了水氣效應，Bennetts and Hoskins (1979)計算擾動強度增加一倍的時間尺度仍要數小時。而 Ogura et al. (1982)及 Gu et al. (1998)的估計，即使在理查遜數小於 0.5 的情形下，成長率也只有 $10^{-5} \sim 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 左右，即以數值模式至少需積分 10 小時甚至一天以上才能得到發展成熟的對流結構。Sun (1984)曾使用線性二維非彈性(anelastic)模式，以人為加熱函數取代因水氣相位改變所造成的非絕熱效應來模擬此類問題，其結果顯示出水氣對於對稱不穩定發展的重要性，也因此瞭解潛熱效應與對流水平尺度變化的過程。

雖然對稱性不穩定的理論相當清楚(Hoskins 1978)，但真實大氣環流是相當複雜的，潛熱和非線性效應使得此問題的數學解非常困難，且對稱性不穩定的成長率相對於其他類型不穩定度來說是很弱的，所以使用的數值模式必須具高穩定性及精確度，才能夠有效地作為探討此問題的研究工具。

本文使用台大-普度二維非靜力模式研究對稱性不穩定的系統。此模式採用顯式的向前向後積分格式計算高頻波動及內重力波。當滿足 CFL (Courant-Friedrichs-Lewy)條件時其時間數值積分是中性的，相較於其他大部分模式使用的跳蛙法(leap-frog scheme)，此積分格式只須記憶兩個時間的資料，不僅記憶體需求較小，也沒有不穩定的計算模，所以不需要在時間上作濾波(Hsu and Sun 2001)。由於其極為穩定的計算方式，此模式適合作較長時間積分，這對於模擬像傾斜對流這種成長率相當小的個案而言

是非常重要的。在第二、三節中會簡單介紹模式以及初始條件，第四節是模擬結果及討論，第五節為結論。

二、台大-普度非靜力數值模式

本研究中使用由許武榮博士與喬文義博士所共同發展的台大-普度非靜力模式(Hsu and Sun 2001)，模式中垂直及水平方向均採用顯式格式(explicit scheme)，水平及垂直風場與熱力變數分別交錯配置，y 方向風場與 x 方向風場位置相同，而垂直坐標則是採用跟隨地形的 σ 坐

$$\text{標: } \sigma = \frac{p_0(z) - p_0(z_{top})}{p_0(z_{surface}) - p_0(z_{top})}$$

其中 p_0 是參考大氣的壓力，僅為高度之函數。雖然是由壓力計算出來的，但因為此壓力為參考態壓力，不隨時間而變，所以嚴格來說此垂直坐標是一種 D 坐標。

模式中的預報量分別是風速 (u, v, w)、密度 (ρ)、相當位溫 (θ_e)、總體水含量 (q_w) 及亂流動能 (E)，其預報方程如下：

動量方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial p'}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_x \frac{\partial p'}{\partial \sigma} \right] \\ = -u \frac{\partial u}{\partial x} - \dot{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} + fv + D_u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = -u \frac{\partial v}{\partial x} - \dot{\sigma} \frac{\partial v}{\partial \sigma} - fv + D_v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial p'}{\partial \sigma} = -u \frac{\partial w}{\partial x} - \dot{\sigma} \frac{\partial w}{\partial \sigma} \\ - \frac{\rho - \rho_0}{\rho} g + D_w \end{aligned}$$

連續方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_x \frac{\partial u}{\partial \sigma} + \frac{\partial \sigma}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \sigma} \right] \\ = -u \frac{\partial \rho}{\partial x} - \dot{\sigma} \frac{\partial \rho}{\partial \sigma} \end{aligned}$$

熱力與總水量方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_e}{\partial t} = -u \frac{\partial \theta_e}{\partial x} - \dot{\sigma} \frac{\partial \theta_e}{\partial \sigma} + D_{\theta_e} \\ \frac{\partial q_w}{\partial t} = -u \frac{\partial q_w}{\partial x} - \dot{\sigma} \frac{\partial q_w}{\partial \sigma} + D_{q_w} \end{aligned}$$

亂流動能方程：

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\overline{u_i E} \right) - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{g}{\theta_0} \overline{w' \theta'_v} \\ - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\overline{u'_i (e' + p' / \rho_0)} - \varepsilon \right] \end{aligned}$$

以上的方程式中，相當位溫 θ_e 定義為

$$\theta + \frac{L_v}{c_p} \left(\frac{\theta}{T} \right) q_v, \quad \text{總體水含量 } q_w \text{ 定義為水氣}$$

混合比 q_v 及液態水混合比 q_l 之和， σ 方向速

度 $\dot{\sigma}$ 定義為 $w \frac{\partial \sigma}{\partial z} + u \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x} \right)_x$ ，亂流擾動動能

$E = \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2 + w'^2)$ ， D 為次網格擴散作用項， ε 為亂流動能的消耗項，科氏參數 $f = 2\Omega \sin \phi$ 。擾動氣壓定義為 $p' = p - p_0(z)$ ， p_0 為一參考壓力值，而壓力值 p 則需以牛頓法求解狀態方程式 $p = f(\rho, \theta_e, q_w)$ 得到(Hsu and Tai 1999)。

本模式之時間積分法採用分步法(time splitting technique, Gadd 1978), 將原始方程組中各項目依其時間尺度長短分為: 平流階段(advection stage)、高頻波動階段(high-frequency-wave stage)、擴散階段(diffusion stage), 在變化最緩慢的擴散階段使用最大的時間步長, 關於變化較快的聲波及重力波項目則以較小的時間步長計算。擴散及平流項以前差法(forward differencing scheme)計算; 而重力波及聲波項目, 則在連續方程以前差法, 動量方程以後差法(backward differencing scheme)計算, Hsu and Sun (2001)證明了此模式之計算方法的穩定性。

三、對稱性不穩度理論與初始場設定

根據 Hoskins (1978), 一般的大氣環境為靜力穩定(statically stable)且慣性穩定(inertially stable), 這分別代表在垂直及水平方向發生擾動時, 大氣會產生回復力來抑制其發展。其條件分別為 $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$ 及 $f(f + \zeta) > 0$, 其中 ζ 為相對渦度。然而在此靜力與慣性穩定的環境中, 若水平溫度梯度過大, 沿某傾斜方向的對流仍可能不穩定, 此不穩度因而被稱為傾斜不穩度(slantwise instability)或對稱性不穩度(symmetric instability)。

在 Hoskins (1978)的線性理論中, 假設二度空間環境條件滿足靜力穩定度 $N^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial z}$ 、斜壓度 $S^2 = \frac{g}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial x} = f \frac{\partial v}{\partial z}$ 、慣性穩定度 $F^2 = f(f + \frac{\partial v}{\partial x})$ 在空間上是均勻的, 則其微小

擾動的流函數(streamfunction) ψ 滿足下列關係式:

$$u' = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w' = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \text{其中 } u', w' \text{ 分別為 } x \text{ 與 } z \text{ 方向的擾動風速;}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 2S^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - N^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - F^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}。$$

假設其數學解為波動型態, 如 $\psi = \exp[i(kx + mz - \sigma t)]$, 則可得到

$$\sigma^2 = \frac{N^2 k^2 + F^2 m^2 - 2S^2 km}{k^2 + m^2}。$$

$$\text{令 } \sin \alpha = \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}}, \quad \cos \alpha = \frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}},$$

其解亦可改寫成:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= N^2 \sin^2 \alpha - 2S^2 \sin \alpha \cos \alpha + F^2 \cos^2 \alpha \\ &= \frac{1}{2} [N^2 + F^2 - A \cos 2(\alpha - \alpha_1)] \end{aligned}$$

$$\text{其中 } A = \sqrt{(N^2 - F^2)^2 + 4S^4}, \quad \sin 2\alpha_1 = \frac{2S^2}{A},$$

$$\cos 2\alpha_1 = \frac{N^2 - F^2}{A}。$$

由 $\sigma^2 < 0$ 可推得不穩定度存在的條件為 $N^2 F^2 - S^4 < 0$, 此時若波數 k 和 m 滿足 $\alpha = \alpha_1$, 則得到最不穩定之波動(most unstable mode), 因為這個角度得到之 $-\sigma^2$ 為最大值, 即最大成長率; 若 $\alpha = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$, 則此波動是最穩定的。

本研究的數值模擬如前節敘述使用二維模式。為了使積分域中央的對稱性不穩度是均勻的，而接近邊界區域是穩定的，如圖 1 所示將積分區域在水平及垂直方向分別分為五部分及三部分，垂直方向在上下邊界區域（非陰影區）的靜力穩定度為常數，水平方向在中央及兩邊界區域（非陰影區）的斜壓度為常數，即位溫的對數是空間的線性函數： $\log \theta = nz + sx + c$ ，其中 n, s, c 是常數；而過渡區（陰影區）的靜力穩定度與斜壓度分別為 x 與 z 的函數，使得靜力穩定（斜壓）度在水平（垂直）方向的變化是平滑的。在積分域中央的區域滿足 $\frac{N_1^2 F^2}{S_1^4} < 1$ ，而在側邊界及上邊界的區域均對稱穩定，如此可確保邊界條件不會影響到不穩定區的擾動發展，而接近邊界的區域也不會產生對稱性不穩度。初始 y 方向風場則由位溫場經熱力風平衡得到。

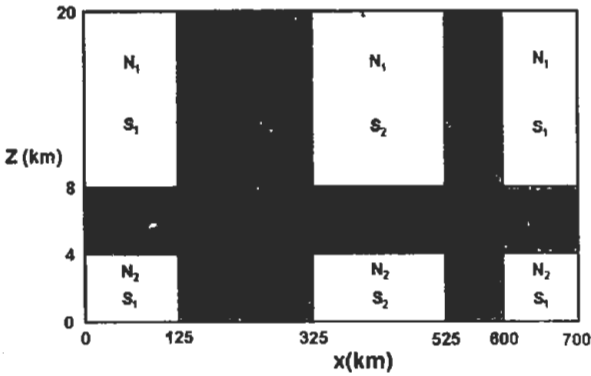


圖 1 初始靜力穩定度及斜壓度分佈示意圖。非陰影區中靜力穩定度與斜壓度為常數，其中 $N_1^2 > N_2^2 > 0$ ， $S_1^2 < S_2^2 < 0$ ；陰影區為過渡區。

本研究所有乾個案不穩定區均使用 $N_2^2 = 2.5 \times 10^{-6} s^{-2}$ ， $S_2^2 = -10^{-6} s^{-2}$ ， $f = 0.5 \times 10^{-4} s^{-1}$ ，此時最不穩定角度

$\alpha_1 = 19.344^\circ$ ，由於模擬使用之水平和垂直網格間距分別為 500 和 200 公尺，而 $\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{2}{5} = \sin \alpha_1$ ，因此沿最不穩定角度的方向在網格點數值得到的圖形中正好是 45° 。初始擾動位於不穩定區中央，在一半徑內向外隨半徑增加線性遞減到 0，半徑外均為 0，形如：

$$(u, w) = \begin{cases} C \frac{r_0 - r}{r_0} (\cos \alpha, \sin \alpha) & r < r_0 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

其中 r 是標準化的網格點與擾動中心距離。積分域水平和垂直分別為 1401 和 101 個網格點，即寬 700 公里、高 20 公里。分步法中使用的平流時間步長為 2 秒，高頻波動時間步長為 0.5 秒。

四、模擬結果與討論

各模擬個案的設定值如表一，主要分為乾個案及溼個案，以下分別詳述其模擬結果。

(一) 乾大氣模擬

圖 2 為乾個案之初始位溫及背景風場。基於圖 1 的設計方式與表一的數據，由圖 2(a) 可清楚看到 4 公里以下的靜力穩定度遠小於 4 到 8 公里的靜力穩定度；而由圖 2(a) 的水平位溫梯度及 (b) 的垂直風切也可以看出不同位置初始斜壓度的差異。圖 3 為個案 A 的垂直運動發展情形，擾動的空間結構如同線性理論所預期的，主要為沿著最不穩定方向 ($\alpha_1 = 19.344^\circ$ ，即圖中 45° 傾斜方向) 發展；到第 4 小時 (圖 3c) 最大擾動已達 1 m s^{-1} ，已偏離線性假設至非線性的階段。圖 4 是個案 A 第 2 小時的垂直風場、水平風場及位溫擾動，除了 u' 的結構與 w' 的一致外，此垂直速度與位溫擾動的配置，與 Gu et al.

表一 各模擬個案之參數設定值

個案	A	B	C	D	E	F	G
平流數值方法 差分階數	4	2	4	4	4	4	4
初始擾動風速 (m/s)	0.02	0.02	0.02	0.002	0.2	0.02	0.02
初始擾動風向	19.344°	19.344°	109.344°	19.344°	19.344°	13.29°	13.29°
水氣	無					低層飽和	
潛熱	無					有	無
N_1^2, S_1^2, S_2^2	$N_1^2 = 2 \times 10^{-4} s^{-2}, S_1^2 = 0 s^{-2}, S_2^2 = -10^{-6} s^{-2}$						
N_2^2	$N_2^2 = 2.5 \times 10^{-6} s^{-2}$					$N_2^2 = 5 \times 10^{-6} s^{-2}$	

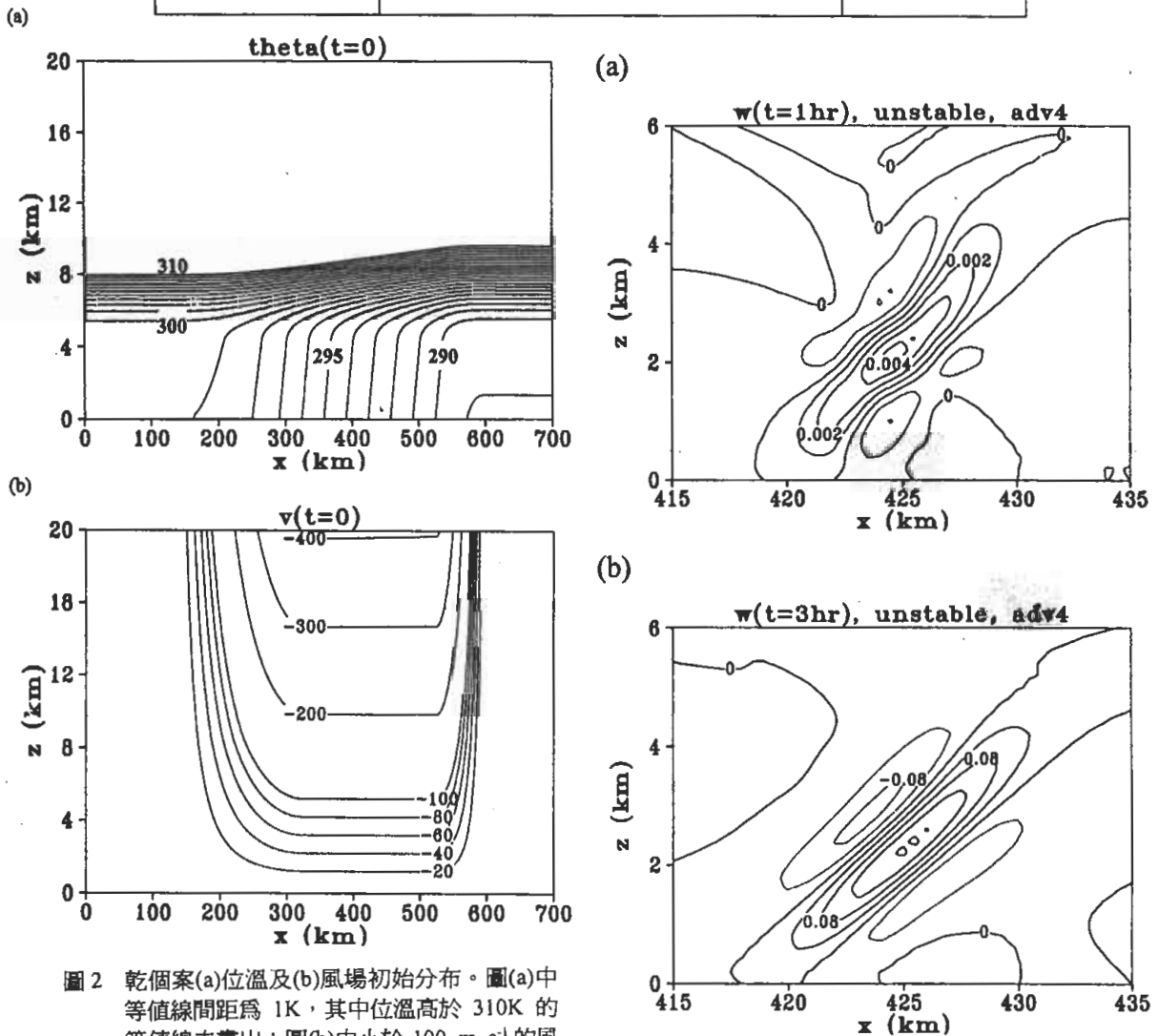


圖 2 乾個案(a)位溫及(b)風場初始分布。圖(a)中等值線間距為 1K，其中位溫高於 310K 的等值線未畫出；圖(b)中小於 100 m s⁻¹ 的風速等值線間距為 20 m s⁻¹，大於 100 m s⁻¹ 的風速等值線間距為 100 m s⁻¹。

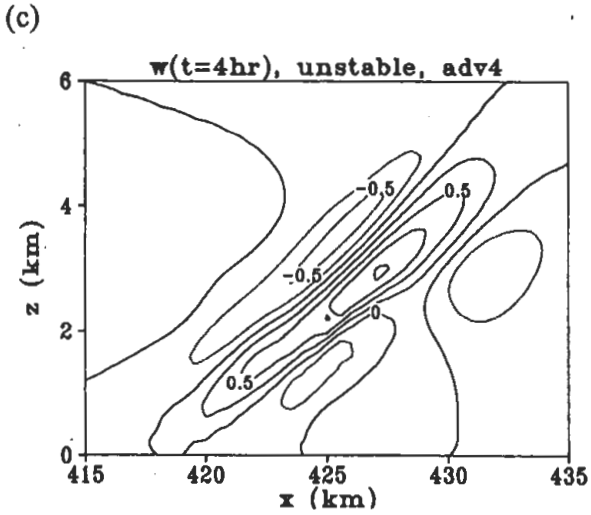


圖 3 個案 A 積分第(a)1、(b)3、(c)4 小時在不穩定區中心的垂直速度發展，等值線間距分別為(a)0.001 m s⁻¹、(b)0.04 m s⁻¹、(c)0.25 m s⁻¹。

(1998)推導得到的第一類三維非線性對稱不穩定模之配置類似。

在本研究中模擬結果對於平流差分格式的選擇並不敏感，比較個案 A (四階差分) 與 B (二階差分) 的結果 (見圖 5)，可看出直至第 3 小時，兩者垂直速度之振幅與結構相當接近，顯示此模式即使在使用較低階差分方法時，仍具有一定的精確度。

在個案 C 中，由於我們設定初始擾動是穩定的波動 (角度是 $\alpha = \alpha_1 + \frac{\pi}{2}$)，第 1 小時的最大垂直速度已從初始的 0.02 m s⁻¹ 減少到 0(0.001) m s⁻¹ (圖 6a)。此初始擾動殘餘的部分，在第 2 小時即沿最不穩定角度發展，因而位置不在初始給定擾動的位置 (圖 6b)。圖 7 為個案 A 與 C 對流方向與最不穩定角度 ($\tan(19.344^\circ) = 0.4$) 的比較，可看出在擾動成長處的對流方向非常接近最不穩定角度 (圖中 45° 方向)。

如第三節中說明的，流函數

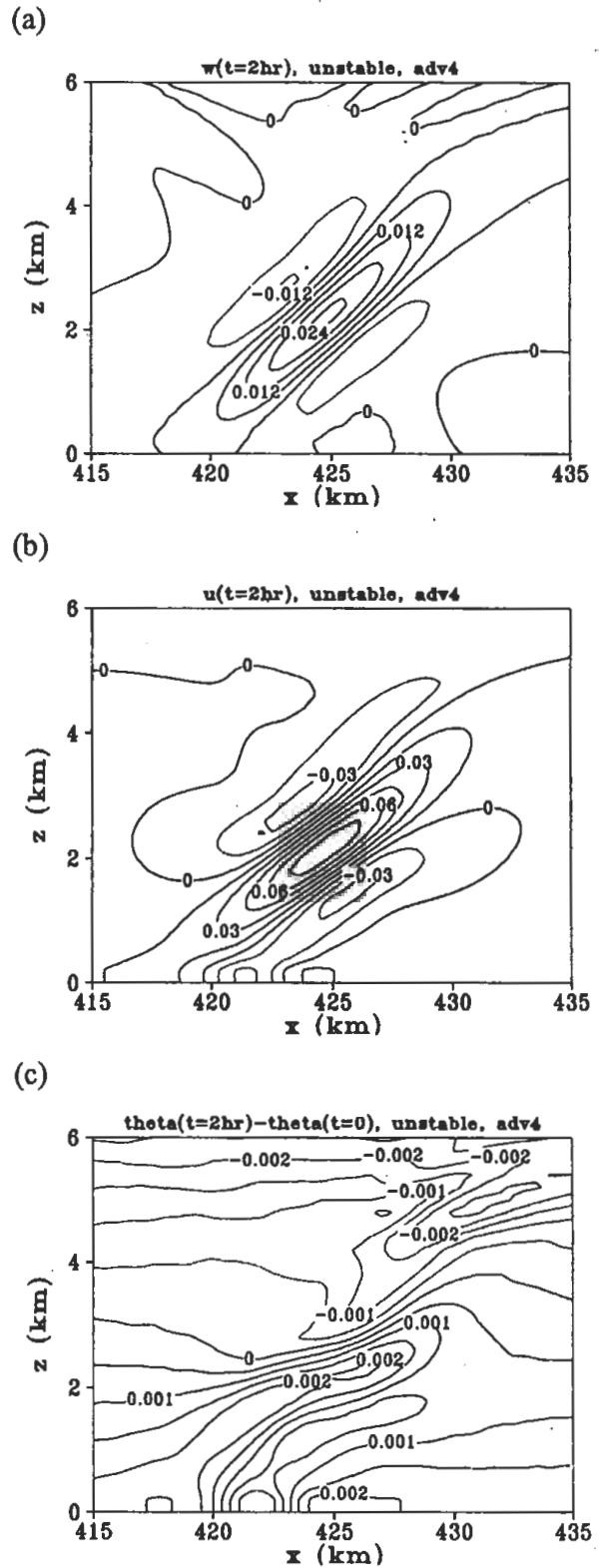


圖 4 個案 A 積分第 2 小時在不穩定區中心的(a) w、(b) u'、(c) θ' 發展，等值線間距分別為(a)0.006 m s⁻¹、(b)0.015 m s⁻¹、(c)0.0005 K。

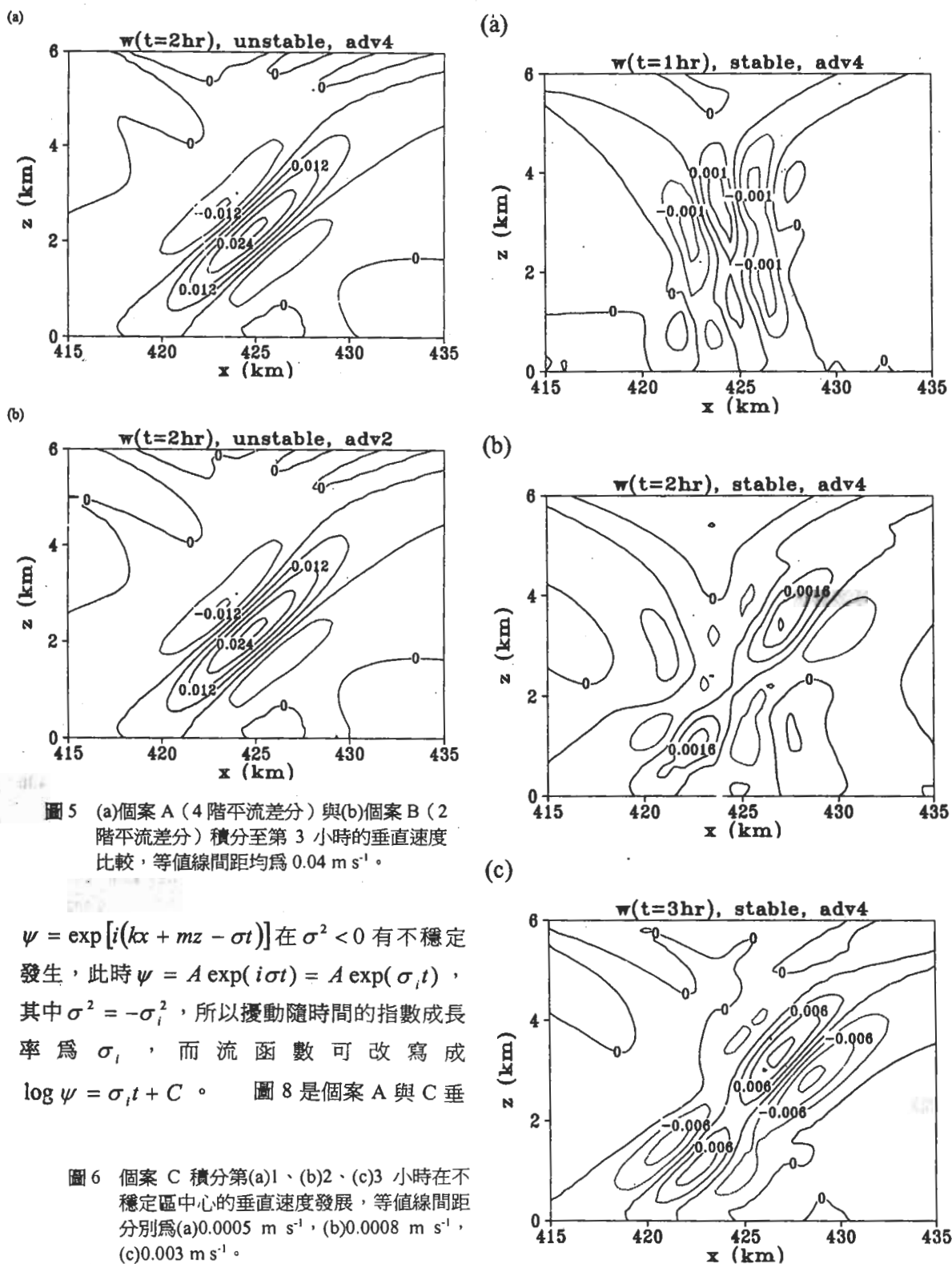


圖5 (a)個案A (4階平流差分)與(b)個案B (2階平流差分)積分至第3小時的垂直速度比較，等值線間距均為 $0.04 m s^{-1}$ 。

$\psi = \exp[i(kx + mz - \sigma t)]$ 在 $\sigma^2 < 0$ 有不穩定發生，此時 $\psi = A \exp(i\sigma t) = A \exp(\sigma_1 t)$ ，其中 $\sigma^2 = -\sigma_1^2$ ，所以擾動隨時間的指數成長率為 σ_1 ，而流函數可改寫成 $\log \psi = \sigma_1 t + C$ 。圖8是個案A與C垂

圖6 個案C 積分第(a)1、(b)2、(c)3小時在不穩定區中心的垂直速度發展，等值線間距分別為(a) $0.0005 m s^{-1}$ ，(b) $0.0008 m s^{-1}$ ，(c) $0.003 m s^{-1}$ 。

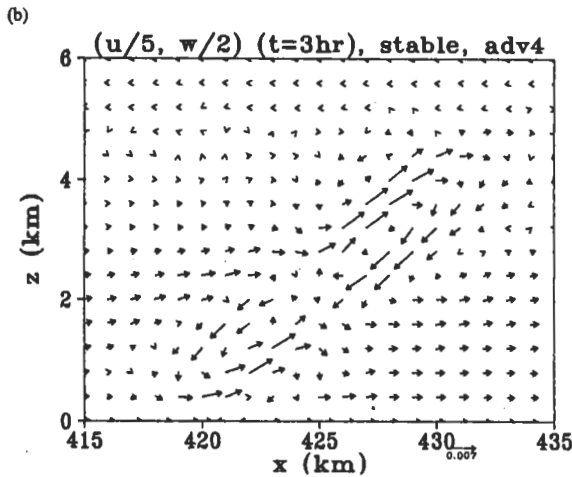
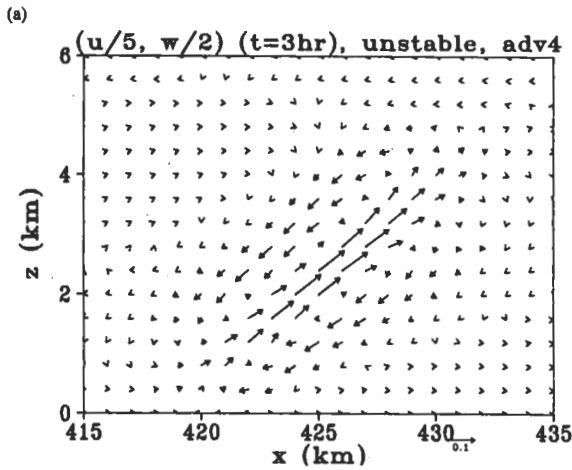


圖 7 (a)個案 A 與(b)個案 C 第 3 小時不穩定區中央風場分布，圖中的箭號方向 45° 表示最不穩定方向。風標長度代表的風速見圖右下標示。

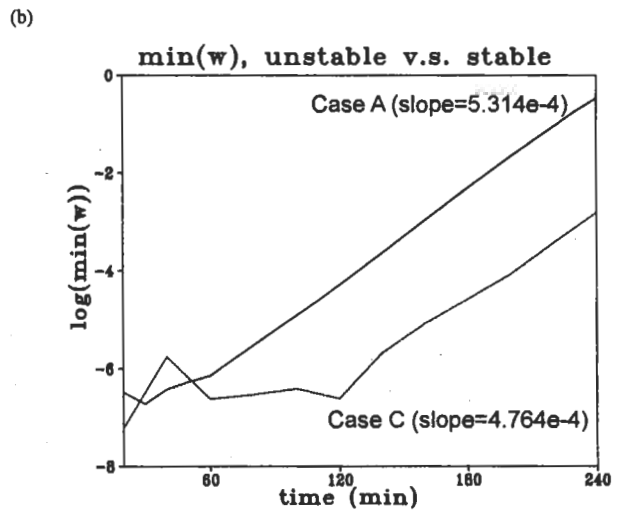
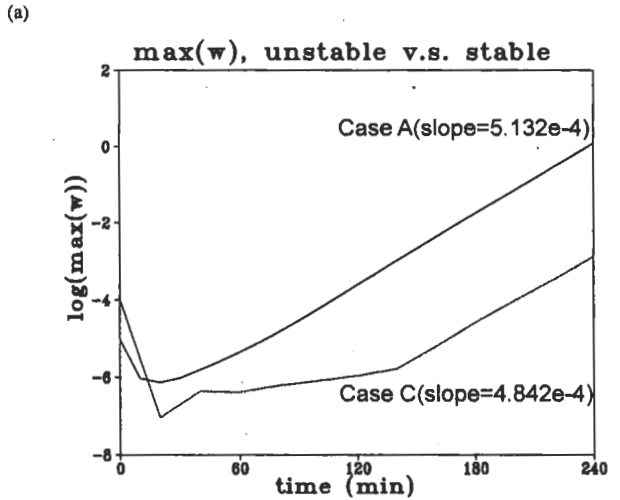


圖 8 個案 A 與 C 的(a)最大上升運動和(b)最大下降運動的時間序列，其斜率代表其對數成長率，實線、虛線分別為個案 A 與 C 的結果。

直速度的成長率比較，圖中斜率代表其對數之成長率，由基本場設定經線性理論計算得到的成長率為 $5.9 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ，個案 A 的最大上升及下降運動之成長率分別為 $5.132 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 和 $5.314 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ，個案 C 的最大上升及下降運動之成長率分別為 $4.842 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 和 $4.764 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ，數值模擬得到的成長率和理論值仍有一段差距，造成此誤差的可能原因有：

(1) 初始擾動給定值過大

為比較初始擾動大小的效應，我們比較個案 A、D、E 的成長率（圖 9），可以發現若初始擾動較小，得到的成長率通常較擾動大的結果接近理論值；另一方面，個案 A、D、E 之最大下降速度成長率均較其個別最大上升速度成長率為大。由於初始給定的擾動只有上升速度，

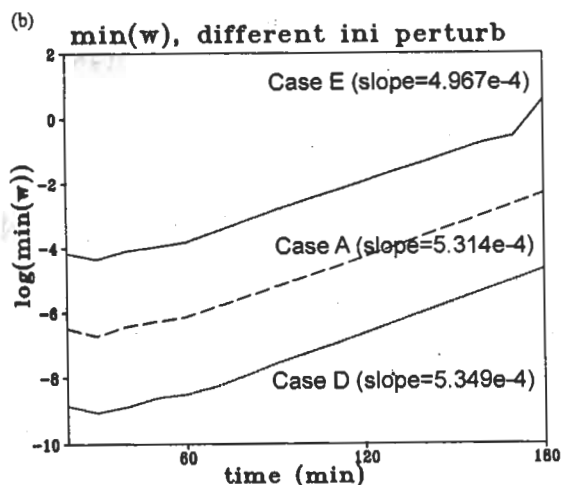
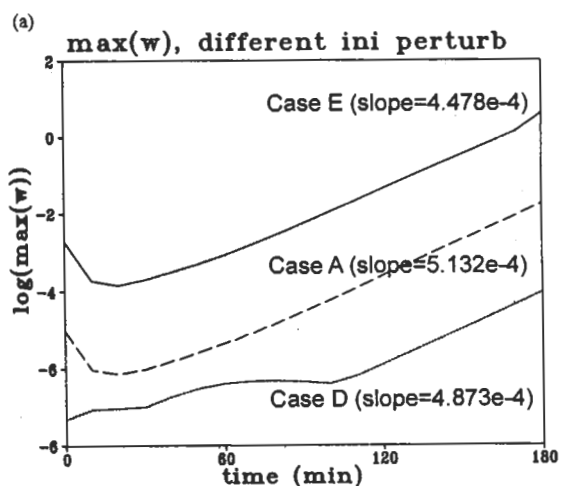


圖 9 個案 A、D 與 E 的(a)最大上升運動和(b)最大下降運動的時間序列，圖中斜率代表其對數成長率，實線、虛線、點線分別為個案 E、A、D。

因此下降速度發展之初始值必定遠小於上升速度，這驗證了擾動值較小得到的結果會較接近線性理論。

(2) 其他擾動的成長

在初始階段產生的聲波和重力波，雖然大部分能量都已向外傳遞出去，不過剩餘的能量在不穩定區內亦會成長；另外由於本研究為使

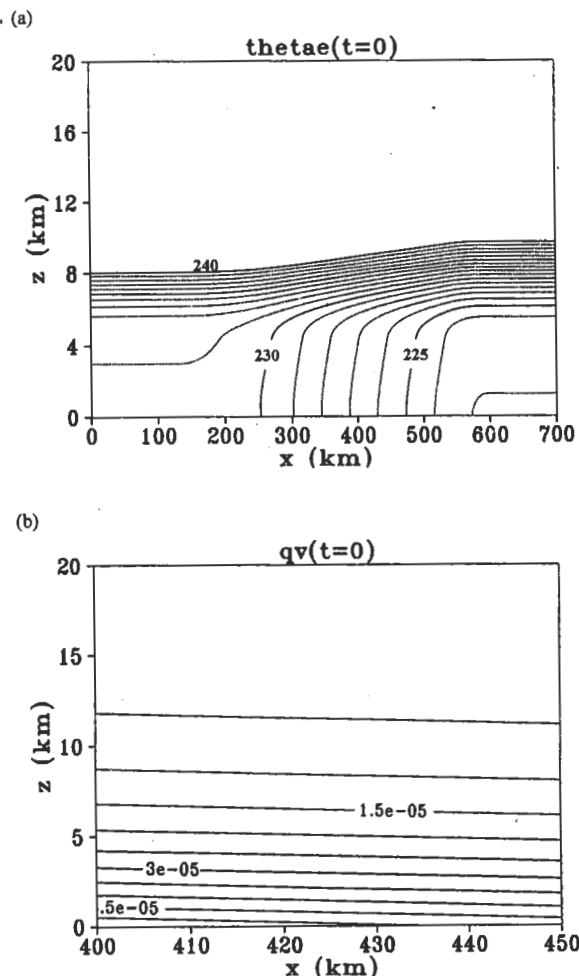


圖 10 溼個案的(a)相當位溫及(b)水氣混合比初始分布。圖(a)中等值線間距為 1K，其中位溫高於 240K 的等值線未畫出；圖(b)中等值線間距為 5×10^{-6} 。

不穩度發展較快，設定了較小的靜力穩定度及較大的斜壓度，所以滿足 $\sigma^2 < 0$ 的角度 α 範圍較大，雖然模擬結果顯示主要發展的模是沿著最不穩定角度，但其他模存在時會影響合成後的成長率。由圖 8 可知，若初始給定最穩定角度擾動，雖然最終不穩定發展是在最不穩定角度上（圖 6、8），但其成長率與理論值相差較大，應與此因素有關。

(二) 溼大氣模擬

個案 F 與 G 考慮一低層 (4 公里內) 均飽和, 其上之相對溼度隨高度線性遞減的初始環境。為使結果不會和線性理論差距過大 (水氣過多), 因此設定一溫度較低的環境, 而低層靜力穩定度 (由虛位溫得到) 設定為 $N_e^2 = 5 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ 。圖 10 是個案 F 與 G 的相當位溫及水氣初始分布, 可計算出低層水氣使不穩定區內的有效靜力穩定度 (由相當位溫得到) 下降為 $N_e^2 = 4 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2}$ 。由 N_e^2 經線性理論計算得到得到的最不穩定角度及成長率為 10.9° 及 $4.36 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$; 而由 N_e^2 得到的最不穩定角度及成長率為 13.29° 及 $4.83 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 。

由圖 11 可看到在水氣存在時, 由於大氣低層水氣較充沛, 有效之靜力穩定度是不均勻的, 因此不同位置的對流發展方向並非完全相同, 而液態水的分布亦非隨高度沿一固定角度傾斜。由於此水氣場設定之有效靜力穩定度隨高度遞增, 其對應的最不穩定角度隨高度減少, 所以模擬結果之對流發展方向及液態水呈現曲線型態。值得注意的是, 個案 G 因無水氣凝結, 所以對流強度發展較慢, 且角度也不同 (由圖中估計個案 F、G 對流傾斜角度分別為 13.50° 和 11.86°)。可見水氣分布對於對稱不穩定對流的發展具有相當重要的影響。圖 12 進一步比較溼個案對流方向, 個案 F 與 G 的最大擾動附近風向與水平面角度分別為 13.29° 和 10.90° , 與對流強度的空間結構結果一致。

圖 13 是個案 F 與 G 的垂直速度成長率比較, 個案 F 的最大上升及下降運動之成長率分別為 $4.173 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 和 $4.221 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, 個案 G 的最大上升及下降運動之成長率分別為 $3.899 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ 和 $4.018 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$, 這與乾個案的結果

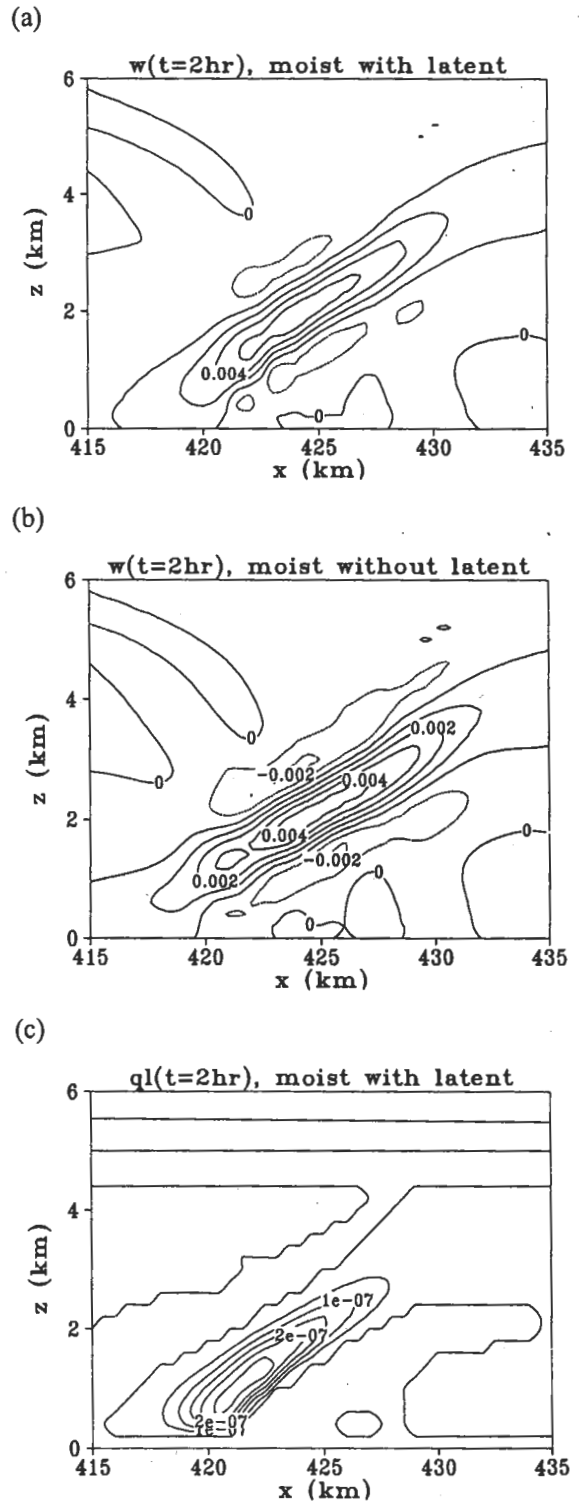


圖 11 第 2 小時的(a)個案 F 垂直速度, (b)個案 G 垂直速度及(c)液態水混合比分布, 等值線間距分別為 0.002 ms^{-1} 、 0.001 ms^{-1} 、 5×10^{-8} 。

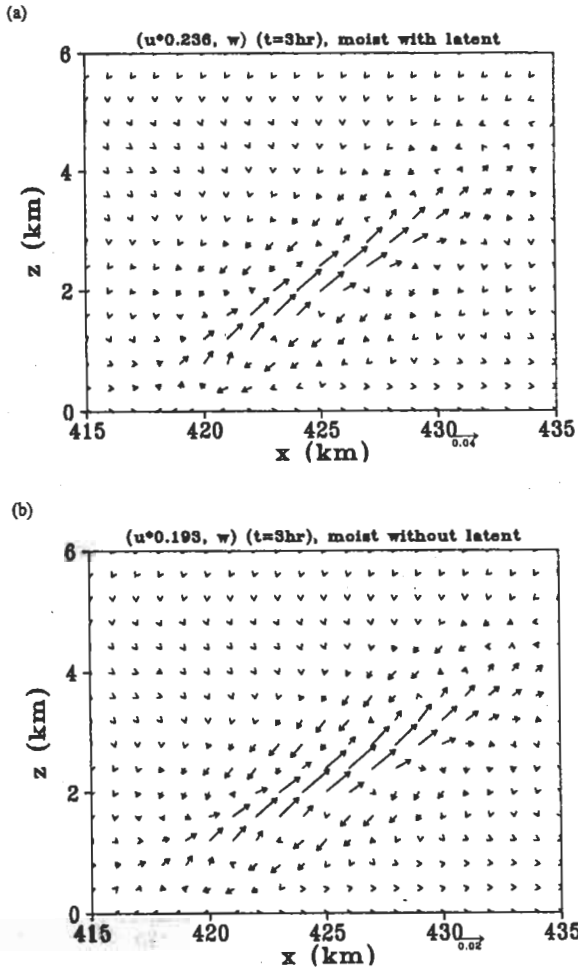


圖 12 (a)個案 F 與(b)個案 G 第 3 小時不穩定區中央風場分布，圖中的箭號方向 45° 分別表示對流傾斜角度(a) 13.29° 、(b) 10.9° 。

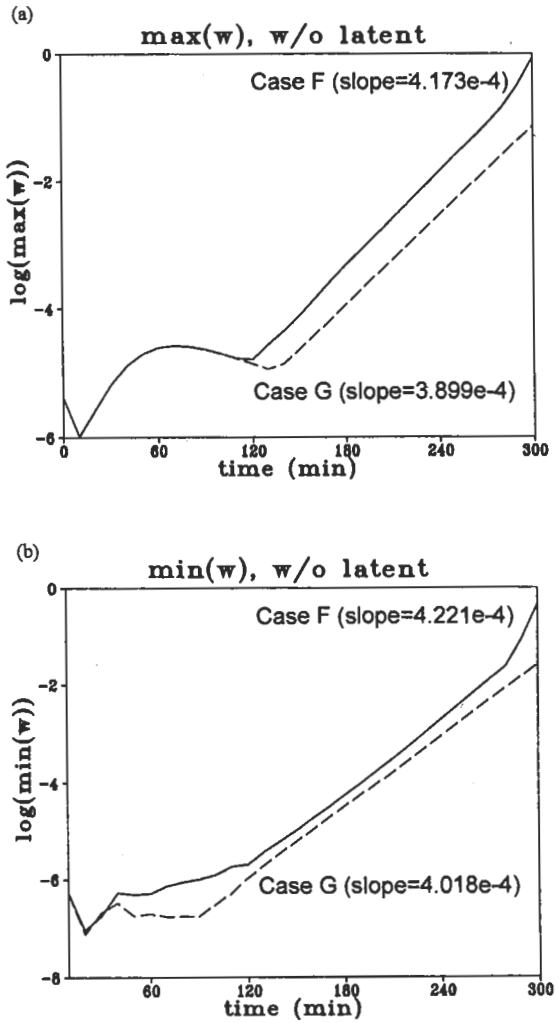


圖 13 個案 F 與 G 的(a)最大上升運動和(b)最大下降運動的時間序列，圖中斜率代表其對數成長率，實線、虛線分別為個案 F、G。

相似，在下降運動處的成長率較接近線性理論值。然而，溼個案與理論值的差距比乾個案的差距要大，這顯示對稱不穩度線性理論在水氣存在時需要作修正，加入溼對流的過程。

五、結 論

對稱不穩度為一低成長率的現象，藉由台大-普度二維非靜力模式的高穩定性和精確度，

模擬對稱性不穩定大氣中的對流發展，可避免過多人為勻滑而能夠減低對數值解的影響。乾個案得到的數值解與線性理論預期的結果相當一致；而溼個案模擬的結果顯示水氣在成長率及很多對流的特性上扮演重要的角色。許多研究指出對稱性不穩度是激發一些中尺度現象的機制，因此除了水氣外，對稱性不穩度的三維

結構也是一個有趣的課題，未來我們將使用三維模式作此方面研究，並驗證這種對流的非線性效應，及對稱性不穩度在一些天氣現象中的意義，如梅雨、乾線、地表加熱不均勻的邊界層等，以期能夠詮釋對稱性不穩度在這些現象上的重要性。

誌 謝

本研究所使用的數值模式是與普度大學 (Purdue University) 喬文義教授合作發展的。經費則由國科會資助。我們亦感謝國家高速網路與計算中心提供的計算資源與兩位審查者寶貴的意見。

參考文獻

- Bennetts, D. A., and B. J. Hoskins, 1979: Conditional symmetric instability—a possible explanation for frontal rain bands. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **105**, 945-962.
- Emanuel, M. Fantini, and A. J. Thorpe, 1987: Baroclinic instability in an environment of small stability to slantwise moist convection. Part I: Two-dimensional models. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 1559-1573.
- Eliassen, A., 1962: On the vertical circulation in frontal zones. *Geophys. Publ.* (Bjerknes Memorial Volume), 147-160.
- Fjørtoft, R., 1950: Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and for the baroclinic circular vortex. *Geophys. Publ.*, 17(6).
- Gadd, A. J., 1978: A split explicit integration scheme for numerical weather prediction. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **104**, 569-582.
- Gu, W., Q. Xu, and R. Wu, 1998: Three-dimensional instability of nonlinear viscous symmetric circulations. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 3148-3158.
- Holt, M. W., and A. J. Thorpe., 1991: Localized forcing of slantwise motion at fronts. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **117**, 943-963.
- Hoskins, B. J., 1978: Baroclinic Instability and Frontogenesis in Rotating Fluids in Geophysics, P. H. Roberts, Ed., *Academic Press*. 171-204.
- Hsu, W. R., and W. Y. Sun, 2001: A time-split, forward-backward numerical model for solving a nonhydrostatic and compressible system of equations. *Tellus A*, **53**, 279-299.
- and J.-H. Tai, 1999: Method of solving moist thermodynamic equations in NTU-Purdue non-hydrostatic model and tests on 2D moist mountain waves. *TAO*, **10**, 305-320.
- Joly, A., and A. J. Thorpe, 1990: Frontal instability generated by tropospheric potential vorticity anomalies. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **116**, 525-560.
- Kuo, H. L., 1954: Symmetric disturbances in a thin layer of fluid subject to a horizontal temperature gradient and rotation. *J. Meteor.*, **11**, 399-411.
- Kuo, Y. H., and S. Low-Nam, 1990: Prediction of nine explosive cyclones over the western Atlantic Ocean with a regional model. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 3-25.
- Matsumoto, S. and K. Ninomiya, 1971: On the meso-scale and medium-scale structure of cold front and the relevant vertical circulation. *J. Meteor. Soc. Japan*, **49**, 648-668. (special issue)
- Ninomiya, K., and T. Akiyama, 1974: Band structure of mesoscale echo clusters associated with low-level jet stream. *J. Meteor. Soc. Japan*, **52**, 300-313.
- Ogura, Y., and H. M. Juang, K. S. Zhang, S. T. Soong., 1982: Possible triggering mechanisms for severe storms in SESAME-AVE IV (9-10 May 1979). *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **63**, 503-515.
- Ooyama, K., 1966: On the stability of baroclinic circular vortex: a sufficient criterion for instability. *J. Atmos. Sci.*, **23**, 43-53.

- Raymond, D. J., 1978: A two-scale model of moist, nonprecipitating convection, 816-831.
- Sanders, F., and D. A. Miller, 1979: Mesoscale conditions for the severe convection of April 3, 1974. *Preprints, 11th Conf. On Severe Local Storms*, Kansas City, Amer. Meteor. Soc., 122-132.
- Solberg, H., 1933: Le mouvement d'inertie de l'atmosphère stable et son rôle dans la théorie des cyclones. Memoir presented to the Meteor. Assoc. UGGI, Lisbon, *Dupont Press*, 66-82.
- Stone, P. H., 1966: On non-geostrophic baroclinic stability. *J. Atmos. Sci.*, **23**, 390-400.
- Sun, W. Y., 1984: Rainbands and symmetric instability. *J. Atmos. Sci.*, **41**, 3412-3426.
- Thorpe, A. J., and S. A. Clough, 1991: Mesoscale dynamics of cold fronts: Structures described by dropsoundings in FRONTS 87. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **117**, 903-942.
- Xu, Q., 1986: Conditional symmetric instability and mesoscale rainbands. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **117**, 903-942.
- Zhang, D. L., and H. R. Cho, 1992: The development of negative moist potential vorticity in the stratiform region of a simulated squall line. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 1322-1341.

A Numerical Study of 2D Symmetrically Unstable Convections

Wu-Ron Hsu* Ming-En Hsieh Jou-Ping Hou

Department of Atmospheric Sciences, National Taiwan University

(Manuscript received 03 February 2005 ; in final form 08 June 2005)

ABSTRACT

Solberg, Fjørtoft, Kuo, and Eliassen developed the theory of symmetric instability in the 50's. It is, however, not until the 70's and 80's people realized its important role in triggering deep convective systems. Interest in moist symmetric instability has further grown from many perspectives, such as its interaction with frontogenesis, explosive cyclogenesis, and stratiform precipitation associated with squall lines, etc. Although the theory regarding symmetric instability is very clear, the real atmospheric circulation is very complicated. Latent heat, and nonlinear effects make the mathematical solution of the problem difficult, if not impossible. Numerical models are therefore important tools to help us understand the problem.

In this study, the NTU-Purdue nonhydrostatic numerical model is used to study symmetrically unstable systems. In the control dry simulation, our numerical results match the analytical linear solution of a symmetric convection very closely. In the saturated case, the results show that the latent heat effect can drastically alter the length scale, flow pattern, and many aspects of a slantwise convective system.

Key words : Symmetric instability, Nonhydrostatic numerical model, Effective static stability.

*Corresponding author : hi@webmail.as.ntu.edu.tw