# 大氣運動中的調節問題

林沛練

## 摘　要

從觀測事實或從尺度分析的結果來看，大尺度大氣運動的一個最基本的特徵是運動的准地轉性（ Quasi-Geostrophy），這乃旋轉地球上大氣運動，區別於其他一切非旋轉坐標中流體運動的主要特點之一。這個現象已成功地應用到研究天氣動力學和實際天氣預報的一系列重大問題中去，在大尺度天氣分析方面，地轉風平衡就是一個基本原則，在動力氣象方面，如長波的發展和運行，能量的頻散，斜壓不穩定的發展以及大氣環流等方面的理論問題，由於引入了地轉近似而得到了大尺度大氣運動的許多基本規律，在數值預報的最初研究階段，地轉關係也是保證它成功的一個基本假設，因為它可以濾去所謂氣象“雜波”——重力波對於運動的干擾。

既然在大尺度氣象學中地轉關係如此重要，而地轉偏差又經常存在於大氣中，因此地轉平衡關係破壞後的調節問題，自然就成為一個重要的研究課題了。

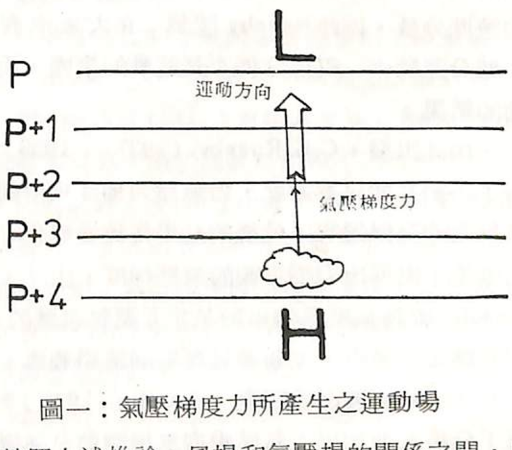
本文將介紹Yeh, T.C,以及其他專家學者多年來對調節問題的提出及其發展所做的研究，然後再簡單的闡釋大氣運動調節的物理過程。

### 一、調節問題的提出及其研究的發展

一切天氣現象都是大氣運動的結果，所以大氣運動狀態如何改變，乃氣象工作者最感興趣的問題，按照經典的說法：大氣運動最根本的原因，是由於大氣質量分佈不均勻造成的氣壓梯度，引起了大氣的運動，這時，在靜止的坐標系統，空氣質點將沿著氣壓在梯度力的方向運動（圖一），然而在自轉的地球上，空氣在運動中，它就要受到柯氏力的作用而向右偏轉（在北半球的情況），如果氣壓場不變，向右偏轉將直到空氣的運動方向轉到與等壓線平行，而柯氏力正好與氣壓梯度力相等，但方向相反時為止（圖二）這時，空氣質點運動不再加速，風向平行等壓線，風速$V$則可由下式算出：

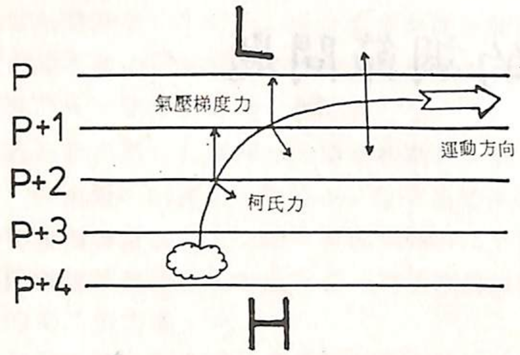
$$V = -\frac{1}{\rho f}\ \frac{\partial P}{\partial n}$$

這裏$\frac{\partial P}{\partial n}$為氣壓梯度，$\rho$為空氣密度，$f$為地球自轉參數，它等於 $2\omega\ \mathrm{Sin}\phi$，$\omega$為地球自轉角速度，$\phi$為緯度，上式是氣象學中最重要的規律之一，即所謂地轉平衡關係式。




圖一：氣壓梯度力所產生之運動場

按照上述推論，風場和氣壓場的關係之間，風場是被動的，氣壓場是主動的，當氣壓場由於某種原因發生變化之後，則風場要隨之改變以適應氣壓場，而調整為新的地轉平衡關係。然而上述之地轉




圖二：地轉風之平衡

風方程只指出風場和氣壓場的平衡關係，而沒有指出其因果關係，按照道理，若僅從這個方程式考慮，氣壓的改變既然可以引起風場的變化，同樣，風場的改變也應該可以引起氣壓場的變化。兩者的關係應該是相互影響的。當然，對於某一具體問題來說，一個可以是主導的，另一個可以是從屬的，然而沒有理由在任何問題中都是以氣壓場爲主導，風場爲從屬。到了一九三六年，C. G. Rossby（1936）提出了相反的看法，他認爲如果我們在某一垂直面上考慮一種質量分布，則總是可以找到一種垂直這個面的水平速度分布，使得由此而產生的偏向力，在任何地方皆與由質量分布所產生的壓力梯度力相平衡。相反的，也總是可以找到這樣一種在垂直面上的質量分布，使得由此產生的水平壓力梯度力和任何一種與該面成法線方向的速度分布所產生的地轉偏向力相平衡。在另一方面，作用於運動方向的側向應力，必定要產生垂直於運動方向有某些特性的速度分量，因此Rossby 認爲：在大氣或海洋的一部分運動中，質量分佈不是運動的原因，而是運動的結果。

由此出發，C.G.Rossby（1937－1938）再分析了一個初始只有速度，而無壓力梯度相平衡的帶狀氣流的演變過程，最後的結果是流速變化不大，而產生了與柯氏力相平衡的氣壓梯度，由此 C.G. Rossby 認爲氣壓場和風場是相互調整適應的，在相互調節適應中，主要是氣壓場向風場適應。對於 C.G. Rossby 提出的問題，A.Cahm(1945）對它進行了分析，他指出：氣壓場向風場調節是通過重力波的頻散（dispersion）來完成的，也就是說，通過重力波，有限空間內的氣壓場和風場之間不平衡的能量，被散布到了整個空間，於是單位空間中的不平衡能量變爲零，這時不平衡的現象消失。此後 A. M. Oσyxob（1949）對於風場和氣壓場的調節進行了更完整的分析。B. Bolin(1953)進一步討論了斜壓大氣中的調節問題，他們都指出：氣壓場主要向風場調節適應，亦即氣壓的分布是動力的結果。

然而，上述結論顯然還是不夠完整，因爲在大氣中存在著多種熱力因子，如輻射，海陸分布等等，它們對某種大氣溫度分布以及相應的大氣質量的分布，起著決定性的作用。當這些決定性的因子發生變化之後，相應的大氣質量分布自然也將發生改變，這時速度場自然要發生變化以適應新的質量分布。換句話說，大氣或海洋的運動中，也有一部分主要是風場向氣壓場調節適應的，此時氣壓的分布是熱力的結果。然而，那一些運動變化原因主要是熱力的呢？那一些運動變化原因主要是動力的，而質量分布是從屬的呢？

對於這些問題T. C. Yeh(1957）曾經由對地轉調節物理過程的分析，提出了一個初步的答案：在較大尺度運動的地轉調節過程中，主要是風場向氣壓場調節，在較小尺度運動的地轉調節過程中，主要是氣壓場向風場調節。那也就是說，大範圍（大尺度）運動變化原因主要是熱力的，較小範圍（小尺度）的運動變化原因主要是動力的。然而大氣中存在著許多尺度的大氣運動（林、徐氏（1981）），這裏所謂大尺度或小尺度的標準如何決定呢？對此曾氏和陳氏（1963）都進行過研究，他們得到了一致的結論，即當運動的水平尺度 L 小於某臨界尺度 $L_0$ 時，則氣壓場向風場調節，當 L 大於 $L_0$ 時則風場向氣壓場調節，而 $L_0 \equiv C/f$ 這裏 $C$ 爲重力波速，$f$ 爲科氏參數，事實上，$L_0$ 就是C.G. Rossby(1937－1938）曾經引用的所謂"變形半徑"（Radius of deformation），在正壓大氣中 $C$ 接近聲速，在斜壓大氣中，則 $C$ 遠小於聲速，所以正壓大氣中的 $L_0$ 遠比斜壓大氣中的 $L_0$ 爲大，C. G.Rossby (1936－1938）所採用的運動尺度都遠小於 $L_0$ 所以他得到在調節過程中主要是氣壓場向風場調節適應的結果。

G. Fischer(1963),P. Raethjen(1950）更進一步討論了調節過程中，初始擾動垂直結構的影響，他們由此得到了一致的結論：即在高空運動，變化的主要原因是動力的，在低空則主要是熱力的。

以上的研究，在理論上都是根據線性模式（即沒有考慮非線性平流項之模式）進行的，而N. A. Knσeлb (1960）和曾氏（1963）還討論了非線性的



調節問題，他們把大氣的變化過程分成了兩個階段，當大氣運動由於某種原因失去了地轉平衡以後，它首先的變化就是調節過程（Adjustment Process），調節過程基本完成之後，就進入所謂准地轉（Quasi-Geostrophy）演變（develop-ment）的慢過程，兩者基本上是分階段進行的。其次有些學者更進一步指出，處於高度非地轉平衡狀態下的運動，非線性的平流項比其他的線性項小一個數量級以上，可以略去。因此在高度非地轉的運動中，主要只有調節過程，調節過程基本完成之後，平流項才顯得重要起來，天氣演變的慢過程才會起主要作用。

無論在動力氣象學上或天氣學上，地轉關係都起了很大的作用，但是這個關係主要適用於中高緯度的大尺度運動，緯度愈低，或運動之尺度愈小，這個關係愈不適用。可是近年來，不論是中小尺度運動或低緯度天氣，都愈來愈受到人們的注意，如果在這些情況下的運動也存在著類似於中高緯度大尺度運動地轉關係的調節演變，那麼地轉調節演變過程之了解可能對這些情況下的天氣和動力分析也有不小的幫助。在這方面，Yeh(1964）等人曾對中小尺度運動中風場和氣壓場之調節進行過研究。

無論在中小尺度運動或較低緯度的運動中，Rossby 數 $R=\frac{V}{fL}$（參見林、徐（1981））都很大（$V$ 和 $L$ 分別爲運動的特徵速度和水平速度），因此相對的與柯氏力比較來說，慣性力是大的，在運動方程中慣性力不能被略去。其次從林、徐（1981）"各種尺度的大氣運動"一文中，我們可以看出，無論那一種尺度的運動，一般來說時間導數項都是比方程式中各主要項小一個數量級以上，同時觀測也指出，中小尺度天氣系統（如雷暴和颮線等）的生成是非常迅速的，而生成之後，則有一段比較長的穩定的和緩慢的演變時期。如一個雷雨雲可以在二十分鐘左右生成，而在成長後可以延續幾個小時，再加更大的天氣系統也是如此。葉、李氏（1964）對運動方程各項量級的分析以及觀測指出：無論尺度如何，運動的演變一般都是在力的准平衡情況下進行的。對於大尺度的運動，這種准平衡狀態就是地轉關係，在中尺度運動中，柯氏力，氣壓梯度力和慣性力三者處於准平衡狀態，在小尺度運動中，慣性力和氣壓梯度力處於准平衡狀態，當這種准平衡狀態遭受到破壞後必定有一種機制使運動恢復准平衡狀態，否則我們就不能經常觀測到這些准平衡狀態的運動，因此在中小尺度運動中也有一種風場和氣壓場的調節過程，葉、李(1964）曾經證明這種調節過程和地轉調節一樣，也是通過重力波的頻散而實現的。

氣壓場除了與風場之間有調節之外，它和重力場之間是否也存在著類似的問題呢？從"各種尺度的大氣運動"一文中我們知道氣壓場和重力場之間存在的所謂靜力平衡關係（hydrostatic balance）：

$$\frac{\partial P}{\partial Z}=-g\rho$$

比起大尺度大氣運動的地轉平衡關係更具有高度的精確性，然而在小範圍的運動裏，當對流性活動較强時，它也會遭到破壞，但此後却也必定有一種機制使它恢復，這種恢復的過程稱爲靜力調節（hydrostatic adjustment）G. Hollmann（1959）等人對此都有過研究，他們得出靜力調節是通過"聲波"頻散來實現的。

由以上的敍述可以看出，氣壓場、風場和重力場之間的各種調節機制雖有不同，但都是通過某種波動，使其間的不平衡能量被散佈到整個空間的結果。

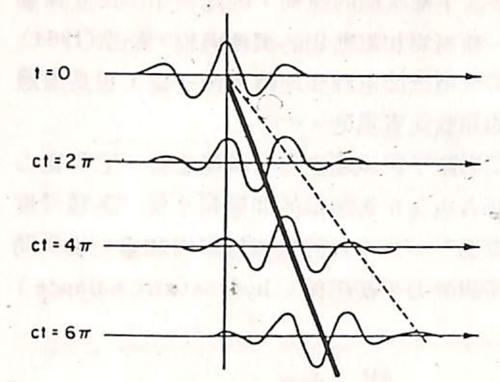
## 二、大氣調節形成的機制——波動能量的頻散

在第一節中我們曾經指出，調節過程的物理本質是由於某種原因，使集中於有限區域的能量經由波動傳播到整個空間，於是單位空間中的能量爲零，波動消失，場中各種力間趨於平衡，場的調節於是完成。因此波動能量在空間的傳播是調節過程中的一個基本問題。

什麼樣的波動才能夠傳播能量呢？答案是"頻散波（dispersive wave）"，所謂頻散波就是指相速（Phase Velocity）會隨著波長（wave length）而變的波動。由於頻散波的相速因波長不同而相異，因此波群（wave group）裏不同波長的各個分量波相互之間會因相速的差異而輪替發生增强或抵銷作用，當波群整體向前傳播時，個別分量波會在波群內部穿越移行，而波群將隨時間變寬，意指能量也被播散開了。（圖三）

在均勻（homogeneous）無旋轉（Irrotational）的流體中，平面直角坐標的一維波動方程可以寫成：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-C^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$




圖三：波群之傳播

初始條件： $t=0$ 　 $u=\phi(x)$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi(x)$$

此一維波動方程的解，其形式是：

$$u(x,t)=f_1(x+ct)+f_2(x-ct)$$

由解的形式可以看出，這是兩個移向相反的波，但是在移動過程中，並不變形，也不消失，由此我們可以了解，對一維空間的擾動，波動一旦出現之後，並不消失。然而，在大氣中許多現象都可以近似於一維問題，但一維之波動又不是頻散波，一維問題中調節過程將如何來完成呢？

假使我們進一步考慮大氣層結（Stratification），地球自轉（ Earth rotation ）以及 $\beta$ 效應（即地球自轉科氏參數隨緯度變化之效應）等因子的影響，再來解一維之大氣波動方程，就可以發現：由於上述因子之出現而使一維大氣波動之相速和波長產生了關聯，而變成各種頻散波。細言之，大氣層結使聲波（ Sound wave ）變成頻散波，地轉自轉使重力波（ Gravity wave ）發生頻散現象，而 $\beta$ 效應則使大尺度慢波（或稱天氣波）也成了頻散波。如此一維之大氣調節問題就可以實現了。

## 三、調節過程和演變過程的一般性質

由前面的敍述可以看出，當風場與氣壓場之間出現不平衡或不適應時，它們將進行相互調整，可以想像，調整過程必定是迅速的，因爲不平衡必將引起强烈的變化，這個過程即稱爲調節過程（Adjustment process），當不平衡的風場和氣壓場調整到接近平衡或適應狀態時，它們的變化一定要緩慢下來，因爲到了完全平衡或適應時，它們將不能再有變化，而進入穩定的狀態，這種准平衡狀態下的緩慢演變，一般稱之爲演變過程（ development Process ）。

依照這種推論，調節過程和演變過程在時間上應該是可以畫分的，而且在物理性質上它們也是應該有所區別的。然而在時間上它們如何來畫分，物理性質又如何去區別呢？這就是本節我們要討論的問題。

① 大氣中各種尺度運動的特徵量及無因次方程

因爲地表不是光滑的，它給予大氣運動很大的摩擦力，這使得近地層大氣的運動複雜化。在這裏，簡單的氣壓場和風場之間的准平衡關係，如地轉公式是不能成立的，愈到高空摩擦力愈小，到了一公里以上高空，和作用於大氣運動的其他力相比，摩擦力就可以忽略不計了（參考 Holton 1979“大氣動力學”第五章），這就進入了所謂的自由大氣（ Free Atmosphere），地轉風關係以及其他氣壓場和風場之間的准平衡關係，都是在自由大氣中發生的。

在自由大氣中，假如忽略摩擦力以及地球曲率之影響，則三個運動方程可以寫成：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=fv-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=-fu-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \qquad (3\text{-}1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=-g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

一般從運動方程的原始形式中，很難看出運動的本質特性，因爲在上述的運動方程中，我們雖然作了簡化（例如忽略了摩擦力以及地球曲率影響等），但是它依然包含著無數可能運動的類別，換句話說，這組運動方程式包含著各種不同尺度的大氣運動（林、徐（ 1981 ）），只有利用尺度分析（Scale Analysis）的技巧來化簡方程式，突出類型，我們才能看出各種尺度運動的主要特性。

在流體力學中，一種運動的主要特性可由幾種特徵量來描寫，它們是運動的時間、空間範圍和速度的量級等。利用各種特徵量來做尺度分析的方法，我們在“各種尺度的大氣運動”（林、徐 1981）一文中，已經詳細介紹過。這裏我們再補充說明一下，利用無因次方程（ Dimensionless equation ）來做尺度分析的好處。

在大氣裏，運動的水平空間和垂直空間範圍相差非常大，運動的水平速度和垂直速度分量也有非常大的差別。所以對於大氣運動，這兩個方向上的差異應該特別注意。現在令 $L$ 和 $H$ 分別爲運動的水平和垂直空間之特徵尺度，$V$ 和 $W$ 分別爲運動的水平和垂直特徵速度，$\tau$ 爲運動的特徵時間尺度，$\triangle_h P$ 和 $\triangle_z P$ 分別爲 $P$ 的水平和垂直空間特徵變化量，$\pi$ 爲空氣密度的特徵量，這裏應該注意，我們雖然給出了這些特徵量，但是它們不完全獨立，其中的一些特徵量將由運動方程的結構和其他特徵量來決定。



引進新的無因次變量，如（ $u'$，$v'$ ）=（ $u$，$v$ ）／$V$，$w'=w/W$，（ $x'$，$y'$ ）=（ $x$，$y$ ）／$L$，$z'=z/H$，$t'=t/\tau$，$\rho'=\rho/\pi$，$\triangle P'=\triangle P/\triangle_h P$ 或 $\triangle_z P$ 則有：

$$\frac{1}{f\tau}\frac{\partial u'}{\partial t'}+\frac{V}{fL}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)+\frac{W}{fH}w'\frac{\partial u'}{\partial z'}$$

$$=v'-\frac{\triangle_h P}{\pi fVL}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial P'}{\partial x'}$$

$$\frac{LW}{V^2\tau}\frac{\partial w'}{\partial t'}+\frac{W}{V}\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x'}+v'\frac{\partial w'}{\partial y'}\right) \qquad (3\text{-}2)$$

$$+\frac{W^2L}{V^2H}w'\frac{\partial w'}{\partial z'}=-\frac{gL}{V^2}-\frac{\triangle_z P}{\pi V^2}\frac{L}{H}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial P'}{\partial z'}$$

因爲第二運動方程與第一運動方程完全相似，因此不再列出。

（ 3-2 ）式已經變爲無因次（ Dimensionless ）的方程式了，它的各項都是沒有因次的，因爲所有新的變量都是以運動的特徵量爲單位來測量的，所以它們以及它們的導數的數量級都是 1 ，因此在尺度分析時同一個方程中各項的大小，決定於它們的由各種特徵量組成的係數，給定了運動的特徵量，就可以算出各個係數值，從而可以決定方程的主要項和次要項而達到簡化方程式，突出尺度特性之目的。

② 尺度分析的結果

由於完整的大氣運動方程，包含各種尺度的大氣運動在內，只有依據尺度分析的方法來簡化方程，才能看出各種尺度大氣運動的特性。

參考林、徐（ 1981 ）“各種尺度的大氣運動”一文中尺度分析的結果，我們可以看出：無論對於大尺度，中尺度或小尺度的運動而言，零級近似（ Zero-Order Approximation ）的運動方程組都有兩個重要的相同特點：⑴靜力平衡（ hydrostatic balanre ）都是可以使用的，⑵時間導數項都可以忽略，由此可以推論：大氣中，對於天氣有比較重要作用的運動都是具有准靜力性（ Quasi-hydrostaty 和准常定性（ Quasi-steady ）這就指出：在大氣中無論那一種尺度（嚴格的說，僅指小尺度及以上的大氣運動）的運動，都是在准靜力的平衡狀態下進行緩慢的演變。

③ 天氣變化過程的階段性——調節過程和演變過程

前面指出：大氣運動一般都是在力的准平衡狀態下進行演變的，這種演變是比較緩慢的，如果由於某種原因，力的准平衡狀態遭到了破壞，那必定有一種機制使得遭到破壞的力的准平衡狀態迅速恢復，否則一般所觀測到的運動就不大可能是在力的准平衡狀態下進行的了。這樣看來，一般大氣運動演變過程可以畫分爲兩個階段，一個是力的准平衡狀態恢復階段，另一個是力的准平衡狀態下的演變階段，前者就是調節過程，後者即爲演變過程，若由時間上來區別，前者是快過程，後者是慢過程。

在理論上，這兩種階段是否可以區分呢？N. A. Kиσeлb（1958）曾試圖對大型運動作過研究，對於大型運動，$H$（等壓面高度），$\psi$（流函數）和 $\varphi$（位勢）的演變可以寫成三個部分：第一項依賴於初始輻散，第二項依賴於初始地轉偏差，第三項依賴於渦度平流，溫度平流和散度平流。可以看出，前兩項隨時間很快消弱，最後只有第三項爲主要的，它滿足准地轉關係。N. A. Kиσeлb的工作，很清楚地把大氣大尺度運動過程分爲兩種，一種依賴於初始的地轉偏差（輻散作用包含在其中），另一種則依賴於各種平流的非線性項，第一種就是快過程，第二種則是慢過程，但是這兩種過程是否在時間上可以比較嚴格地分開，在他的研究中並沒有清楚的交待，曾氏（ 1963 ）對此做了補充之說明。

對於大尺度運動，我們採用了靜力平衡，其次也略去在第一、二運動方程中較小的 $w$ 項，無因次化後，（ 3-2 ）式中，第一、第二運動方程變爲：

$$\varepsilon\frac{\partial u'}{\partial t'}+a\frac{\partial\phi'}{\partial x'}-v'=-R\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)$$

$$(3\text{-}3)$$

$$\varepsilon\frac{\partial v'}{\partial t'}+a\frac{\partial\phi'}{\partial y'}+u'=-R\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)$$

這裏 $\phi'$ 爲無因次的位勢高度（ Potential height ），$\varepsilon=(f\tau)^{-1}$，$R=V(fL)^{-1}$ 即 Rossby Number，$a=\triangle_h\Phi(fLV)^{-1}$，$\triangle_h\Phi$ 爲運動的位勢高度在水平方向上變化的特徵量，這裏我們用了位勢高度，亦即採用了（ $x$，$y$，$P$ ）座標，因爲我們假

定靜力平衡是成立的。

因爲無因次的變量和它的導數的量級爲$O(1)$，（$O$代表數量級），所以（3-3）式右邊各項的量級爲$O(R)$，對大尺度運動而言$R=10^{-1}$，運動的地轉程度決定於（$a\frac{\partial \phi'}{\partial y'}-v'$）和（$a\frac{\partial \phi'}{\partial y'}+u'$）的量級，量級愈小，地轉程度愈高，現在令它們的量級爲$10^{n}$，一般運動的准地轉程度$n=-1$，這時$\varepsilon$的量級等於$O(R)$或$O(10^{-1})$，由此可得$\tau$的量級爲：

$$O(\tau)\geq 10f^{-1}$$

所以處於准地轉平衡狀態下的演變過程的時間特徵量，大於等於$10f^{-1}$或$10^{5}$秒。對於高度非地轉的情況$n\geq 0$，這時$R$仍爲$10^{-1}$，由此可得$\varepsilon$量級爲：

$$O(\varepsilon)=O(10^{n})$$

或

$$O(\tau)=10^{-n}f^{-1}$$

當$n\geq 0$時，$O(\tau)\leq f^{-1}=10^{4}$秒，地轉平衡破壞愈大（即$n$愈大），運動調節得愈快（即$O(\tau)$愈小）。

由此可見，當某一地區的地轉平衡遭受破壞之後，初期變化非常迅速，經過一很短的時間，風場和氣壓場即可達准地轉平衡狀態。此後的演變，即進入緩慢階段，其演變的時間尺度大於等於$10f^{-1}$，這樣我們可以看到，運動過程的兩個階段在時間上就基本的分開了。

大尺度運動是如此，其他尺度的運動如何呢？現在來看小尺度運動，這時第一、二運動方程的無因次形式可以寫爲：

$$\varepsilon'\frac{\partial u'}{\partial t'}+(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'})+a'\frac{\partial \phi'}{\partial x'}=0$$

$$\varepsilon'\frac{\partial v'}{\partial t'}+(u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'})+a'\frac{\partial \phi'}{\partial y'}=0 \qquad (3\text{-}4)$$

這裏$\varepsilon'=L(V\tau)^{-1}$，$a'=\triangle_{h}\Phi V^{-2}$，這裏有兩個力，一個是慣性力（即$u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}$和$u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}$），另一個是氣壓梯度力（即$a'\frac{\partial \phi'}{\partial x'}$和$a'\frac{\partial \phi'}{\partial y'}$），這兩種力的平衡程度決定於

$$[(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+u'\frac{\partial u'}{\partial y'})+a'\frac{\partial \phi'}{\partial x'}]\text{和}[(u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'})+a'\frac{\partial \phi}{\partial y'}]$$

的量級，量級愈小，平衡程度愈大，現在令它們的量級爲$10^{n}$，此時$O(\varepsilon')=O(10^{n})$，由此給出

$$O(\tau)=10^{-n}L/V$$

由此可見，慣性力和氣壓梯度力的平衡狀態破壞得愈大（即$n$愈大），運動變化得愈快〔即$O(\tau)$愈小〕，在力的准平衡情況下，$n\leq -1$，這時運動的時間特徵量$\tau\geq 10L/V$，在力的准平衡高度破壞的情況下，$n\geq 0$，這時$\tau\geq 10L/V$在力的准平衡高度破壞的情況下，$n\geq 0$，這時$\tau\leq L/V$，令$L=10^{4}$米，$V=10$米／秒，則$L/V=10^{3}$秒，所以在小尺度運動中，慣性力和氣壓力的准平衡狀態遭到破壞後，先是運動高速地以小於$10^{3}$秒爲時間特徵量而調節，使這兩種力迅速地達到准平衡狀態。然後，運動再緩慢地進行，這時時間的特徵量將大於等於$10^{4}$秒，所以對於小尺度運動，調節和演變的兩個階段在時間上也是可以基本的分開。

對於中尺度運動，我們也可以做同樣的分析，不過這時平衡的主力有三，即慣性力，科氏力以及氣壓梯度力。因此只要將小尺度運動方程式中的（$u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}$）和（$u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}$）分別變爲（$u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}-v'/R$）和（$u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}+u'/R$）即可，以下的討論和小尺度運動一樣。

現在，我們再來討論准靜力平衡遭受破壞後的情況，（3-2）式第三運動方程的無因次形式可以寫爲：

$$\frac{W}{\tau g}\frac{\partial w'}{\partial t}+\frac{VW}{Lg}(u'\frac{\partial w'}{\partial x'}+v'\frac{\partial w'}{\partial y'})+\frac{W^{2}}{Hg}w'\frac{\partial w'}{\partial z'}$$

$$=-1-\frac{\triangle_{z}P}{g\pi H}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial P'}{\partial z'} \qquad (3\text{-}5)$$

對於任何尺度的大氣運動（小尺度以上之尺度）$VW/Lg$和$W^{2}/Hg$都是$\lll 1$，例如對於小尺度運動，$W=10^{0}$米／秒，$V=10$米／秒，$L=10^{4}$米，$H=10^{3}-10^{4}$米，$W^{2}/Hg\leq W\cdot V/Lg=10^{-4}$，這也說明了靜力平衡關係在大氣運動中是高度準確的，但因某種原因，靜力平衡遭受破壞後，恢復速度如何呢？

令 $O(-1-\frac{\triangle_{z}P}{g\pi H}\frac{1}{\rho'}\frac{\partial P'}{\partial z'})=O(10^{-n}) \qquad (3\text{-}5')$

在一般大氣運動中$n\geq 4$，也就是靜力平衡關係的誤差一般不會大於萬分之一，由（3-5）式和（3-5′）式可得



$$O(\frac{W}{g\tau})=O(10^{-n})$$

或

$$O(\tau)=10^{n}W/g$$

現在取$n=3$如$W=10^{0}$米／秒（小尺度運動）則

$$O(\tau)=O(10^{2})\text{秒}$$

所以當靜力平衡遭到破壞時，將在幾分鐘內即可恢復，在極端情況，靜力平衡完全遭到破壞，這時令$n=0$，則$O(\tau)=O(10^{-1})$亦即靜力平衡立即趨向恢復。對於這麼短時間尺度的調整作用，大氣中除了聲波（Sound wave）之外，似乎還找不出那種快速波可以來擔當，由此可以了解：大氣之運動比吾人想像中的情況還要複雜，聲波在地球物理流體力學以及氣象學上常被視爲雜波而將之濾除，然而對深對流（Deep Convection）等靜力平衡可能不成立之運動而言，聲波可能扮演著相當重要之角色。表㈠爲調節過程以及演變過程之階段性。

表㈠　調節過程與演變過程之階段性

| | 尺度定義 | | 時間數量級 $O(\tau)$ | |
|---|---|---|---|---|
| 平衡狀態 | 尺　度 | 水平空間範圍 | 調節過程 | 演變過程 |
| 地轉平衡 | 大尺度 | $10^{6}$ m | $O(\tau)\leq f^{-1}\leq 10^{4}$秒 | $O(\tau)\geq 10f^{-1}\sim 10^{5}$秒 |
| 柯氏力，氣壓梯度力和慣性力三者之平衡 | 中尺度 | $10^{5}$ m | $O(\tau)\leq LU^{-1}\sim 10^{4}$秒 | $O(\tau)\geq 10LU^{-1}\sim 10^{5}$秒 |
| 慣性力和氣壓力之平衡 | 小尺度 | $10^{4}$ m | $O(\tau)\leq LU^{-1}\leq 10^{3}$秒 | $O(\tau)\geq 10LU^{-1}\sim 10^{4}$秒 |
| 流體靜力平衡 | 大、中、小三種尺度 | | $O(\tau)\sim 10^{-1}$秒 | $O(\tau)\sim 10^{2}$秒 |

④　演變過程中運動的准渦旋性質

前面指出，各種尺度的大氣運動都有兩個過程：調節過程和演變過程，而且這兩個過程在時間上可以頗爲清楚的區分，接著我們再來比較一下演變過程以及調節過程中大氣運動的物理性質。

A. 大尺度運動

對於大尺度運動而言，其演變過程乃在准地轉平衡的狀態下進行，而且靜力平衡也有極高之準確性。當大氣運動純粹爲地轉的情形時，若將靜力平衡（$P=\rho gh$）的關係代入，則可將地轉風平衡表示爲：

$$fu=-g\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$fv=g\frac{\partial h}{\partial x}$$

式中$h$代表等壓面高度。

由於任何向量都可以表示成無旋項（irrotational part）和無輻散項（non-divergent part）兩部份之和（Holton 1979附錄C），因此吾人可以用流函數（Stream function）$\psi$和速度位勢（Velocity potential）$\phi$來表示風速，則有

$$u=-\frac{\partial \psi}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v=\frac{\partial \psi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

若用向量表示則爲：

$$\vec{V}=\vec{V_r}\text{（無輻散項）}+\vec{V_e}\text{（無旋項）}$$

$$=\nabla\times(\vec{K}\psi)+\nabla\phi$$

因此無輻散項完全由流函數$\psi$所決定，而無旋項則完全由速度位勢$\phi$來決定。設$f$爲常數則由上面的式子可得：

$$\nabla^{2}\psi=\frac{g}{f}\nabla^{2}h$$

$$\nabla^{2}\phi=0$$

或

$$\psi=\frac{g}{f}h \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\text{(a)}$$

$$\phi=0$$

所以地轉運動純粹是渦旋運動，而代表輻散項的速度位勢爲零。流函數$\psi$和等壓面高度$h$之關係如(a)式所示。這是$f=$常數的情況，然而大尺度運動，$f$不宜設爲常數，這時常定的（Steady）地轉運動也有著少量的位勢部份。

B　中小尺度運動

中尺度運動，風場，氣壓場和科氏力三者相平

衡的時候：

$$R\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}\right)-v'=-a\frac{\partial\phi'}{\partial x'}$$

$$R\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)+u'=-a\frac{\partial\phi'}{\partial y'}$$

由此可得渦度方程（Vorticity equation）

$$R\left(u'\frac{\partial\zeta'}{\partial x'}+v'\frac{\partial\zeta'}{\partial y'}\right)+(R\zeta'+1)D'=0\cdots(3\text{-}6)$$

對中尺度運動$R=1$（$V\sim10$米／秒，$L=10^5$米，$f=10^{-4}$／秒）在無因次方程中，任何變量及其導數項的量級皆爲1，但兩項以上組成之變量如$\zeta'$（$=\frac{\partial v'}{\partial x'}-\frac{\partial u'}{\partial y'}$）和$D'$（$=\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}$）的量級可以小於1，因其組成部分可以抵消。因此$O(\zeta')$和$O(D')$都可以爲$10^{-n}$（$n\geq0$）由此（3-6）式中，第二括號項中的$R\zeta'$與1相比可以略去，而不會改變這個括號的量級，這樣（3-6）式就可以改寫爲：

$$u'\frac{\partial\zeta'}{\partial x'}+v'\frac{\partial\zeta'}{\partial y'}+D'\approx0 \qquad (3\text{-}7)$$

在這三項裏，前兩項的量級是一樣的，爲了使方程式平衡，第三項的量級不可能大於前兩項中的任何一項，但可以小於它們，這時（3-7）式主要由前兩項相平衡，第三項可以略去，由此可以看出：在中尺度的常定性（Steady）運動中

$D'$（輻散效應）$\leq\zeta'$（渦旋效應）

在小尺度運動裏$R>>1$，除接近於無旋運動（$\zeta'<<1$）以外，與$R\zeta'$相比（3-6）式中第二括號項的1可以略去，這時（3-6）式成爲：

$$u'\frac{\partial\zeta'}{\partial x'}+v'\frac{\partial\zeta'}{\partial y'}+\zeta'D'\approx0 \qquad (3\text{-}8)$$

因爲上一式中，每一項都含有$\zeta'$，故在比較各項量級時$\zeta'$可以約去，因此上式無法給出$O(\tau')$和$O(D')$的比較關係，從而在小尺度的常定運動中$O(\zeta')\gtreqless O(D')$

以上說明，一般的中尺度常定運動不純粹是渦旋運動，但是運動的位勢部分（輻散效應）小於渦旋部分。小尺度的常定運動情況更爲複雜，它可以是准渦旋的，也可以是准位勢的，也可以是二者混合的。

### ⑤ 調節過程的物理性質

A. 大尺度運動

對於大尺度的地轉調節過程來說，運動方程可以線性化，它的無因次形式爲：

$$\varepsilon\frac{\partial u'}{\partial t'}-v'=-a\frac{\partial\phi'}{\partial x'}$$

$$\varepsilon\frac{\partial v'}{\partial t'}+u'=-a\frac{\partial\phi'}{\partial y'}$$

其中 $\varepsilon=(f\tau)^{-1}$，$a=\triangle_h\Phi(fLV)^{-1}$

由此可得渦度方程：

$$\varepsilon\frac{\partial\zeta'}{\partial t'}+D'=0$$

其中 $\zeta'=\frac{\partial v'}{\partial x'}-\frac{\partial u'}{\partial y'}$，$D'=\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}$

在前面我們已經指出，在調節過程中$O(\varepsilon)=O(10^n)$，所以

$$10^n\frac{\partial\zeta'}{\partial t'}+D'\cong0$$

在無因次方程中，個別變量及其導數項的量級皆爲$10^0$但$\zeta'$和$D'$可以小於$10^0$，因此上式給出：

$10^nO(\zeta')=O(D')$

在調節過程，$n\geq0$，由此可以看出$\zeta'<<D'$，地轉平衡破壞得愈利害（即$n$愈大），$\zeta'$愈比$D'$小，所以地轉調節過程基本上是"位勢（Potential）"運動（即以輻合，輻散爲主），$n$愈大，"位勢"運動之程度愈大。

B. 中小尺度運動

對中小尺度的調節過程，運動方程不能線性化，保留了非線性項後，無因次之渦度方程變爲：

$$\varepsilon\frac{\partial\zeta'}{\partial t'}+R\left(u'\frac{\partial\zeta'}{\partial x'}+v'\frac{\partial\zeta'}{\partial y'}\right)+(R\zeta'+1)D'=1 \quad (3\text{-}8)$$

對中尺度運動$R=1$（$V\sim10$米／秒，$L=10^5$秒，$f=10^{-4}$／秒）因爲$O(\tau')\leq O(10^0)$所以討論各項的量級關係時，$R\zeta'$與1相比可以略去，而有

$$\varepsilon\frac{\partial\zeta'}{\partial t'}+u'\frac{\partial\zeta'}{\partial x'}+v'\frac{\partial\zeta'}{\partial y'}+D'\cong0 \qquad (3\text{-}9)$$

在調節過程$O(\varepsilon)=10^n$，故上式第一項的量級爲$O(10^n\zeta')$（$n\geq0$），而第二，三兩項之和的量級小於等於$\zeta'$，所以上式中兩個主要平衡項應爲第一項與第四項，於是

$$O(D')=O\left(\varepsilon\frac{\partial\zeta'}{\partial t'}\right)=O(10^n\zeta')$$

或 $O(D')>>O(\zeta')$

由此可見，中尺度運動的調節過程和大尺度一樣是准"位勢"運動，氣壓場，風場和科氏力場之間的



平衡破壞得愈厲害，則調節過程愈接近"位勢"運動。

對小尺度運動$R>>1$（$V\sim10$米／秒，$L=10^4$米，$f=10^{-4}$／秒）除了$\zeta'<<1$外，與$R\zeta'$相比，（3-8）式最後一項的1可以略去，故

$$\frac{\varepsilon}{R}\frac{\partial\zeta'}{\partial t'}+u'\frac{\partial\zeta'}{\partial x'}+v'\frac{\partial\zeta'}{\partial y'}+D'\zeta'\approx0$$

上式中，每一項都有$\zeta'$，在比較這四項的量級時，$\zeta'$可以從上式中約去，故我們無法從上式找到$O(D')$和$O(\zeta')$之大小關係。因此，小尺度調節過程之運動性質（准渦旋或是准位勢的），不能單從運動方程看出，而要視其初始場而定。

綜合上述，我們將調節過程及演變過程的運動性質列於表(二)。

表(二)　調節過程及演變過程之物理性質

| 項目／階段／尺度 | 物理性質 | |
|---|---|---|
| | 調節過程 | 演變過程 |
| 大尺度 | 准位勢運動（輻合、輻散爲主） | 准渦旋運動（旋轉爲主） |
| 中尺度 | 准位勢運動 | 准渦旋運動 |
| 小尺度 | 依初始場而定 | 依初始場而定 |

### ⑥ 科氏參氏和非線性項對於運動性質的作用

由前面的結果，可以看出，在一般情況下，小尺度運動和大中尺度運動間的最大差異在於：無論是演變過程還是適應過程，小尺度運動的性質不能單從運動方程決定，還需附加條件，而中尺度運動的性質可以由運動方程來決定。其原因在於大尺度運動的性質主要決定於科氏力，中尺度運動中科氏力也是一個主要的力，而小尺度運動，科氏力是可以忽略不計的。這時大氣不再是一個旋轉的流體，在一個非旋轉的流體中，如果初始場是無旋的（irrotational），則此後的運動皆是無旋的，如果初始場是有旋的（rotational）則此後運動也是會有渦旋度存在的。由此可以看出，小尺度運動的性質，在很大程度上決定於初始狀態，初始場決定了小尺度運動調節過程與演變過程的物理性質。

在大中尺度的運動中，科氏力是運動的一個主力，換句話說，大中尺度運動中的大氣乃是一種旋轉的流體，而在旋轉的流體中，即使初始流場中相對渦度到處爲零，但是通過$f$和散度的作用，渦度場就可以製造出來，由式

$$\varepsilon\frac{\partial\zeta'}{\partial t'}+D'=0$$

可以看出大中尺度運動中，$f\neq0$，即使初始場$\zeta=0$，通過$f$及$D$仍可對$\zeta$有相互之作用。

前面我們曾提過，在大尺度的常定運動中，$D=0$，而在一般的中尺度常定運動中$D\leq\zeta$，這說明散度在中尺度的演變過程中比在大尺度的演變過程中有著更重要之作用，這種差異在於非線性項－平流項或慣性力項在運動中作用的差異，大尺度運動的發展主要決定於科氏力和氣壓梯度力之間的對立關係，而中尺度運動的發展主要決定於慣性力，科氏力和氣壓梯度力三者之間的矛盾關係，慣性力－非線性項的出現，加强了相對渦度和散度之間的相互制約關係。兩者制約關係强，就不可能出現一方强烈的發展，而另外一方保持微弱的現象。

### ⑦ 調節過程中能量的傳播和頻散

對於小尺度運動，沒有初始狀態的附加條件，我們就不能決定散度$D$和渦旋度$\zeta$的大小關係，但在大尺度的調節過程中$D>>\zeta$，即運動爲准"位勢"的，而它們在演變過程（或是在准平衡的狀態下）中，$D=0$（大尺度），或$D\leq\zeta$（中尺度），由此可以看出，平衡狀態的破壞，引導出强烈的位勢運動（輻合輻散運動），位勢運動的强度（相對於渦旋度之强度）和平衡狀態的破壞程度是正相關，平衡狀態破壞了的運動恢復到平均態度時，必須回到$D=0$或$D\leq\zeta$的運動狀態，因此可以推論：調節過程的物理本質爲：通過$D$（即運動的位勢部分），氣壓梯度力和科氏力與慣性力發生相互調整，最後在一個新的基礎上達到平衡關係。同時在這個調節過程中，$D$首先非常强大，然後逐漸減弱，最後回到$D=0$或$D\leq\zeta$，一般速度位勢滿足波動方程，也就是說，位勢運動是一種波動運動。因此在調節過程中，波動的振幅先是很强大，逐漸減小到零（大尺度）或某一定的程度（中尺度），波動振幅之所以減小，不是由於摩擦消耗，因爲這些模式都沒有放進摩擦，所以它的減弱是由於下面兩個原因：(1)波動形式的能量轉換成爲其他形式的能量，(2)它的能量的一部分或全部，由某一局部地區被散布到更大的區域或整個空間。第二種形式的減弱又有兩種可能：一爲通過頻散，能量向四周靜止區域傳播，另一形式爲能量隨波動本身前進，但波面越來越擴張，隨著波面加大，單位體積中的波動能量逐漸

減小，波動强度也就減弱了。

前面已經說過，頻散效應乃調節過程中主要之物理機制，凡是頻散波，能量不隨波速（Phase Velocity）前進，而隨群速（Group Velocity）前進，當群速大於波速時，在波動未到達的區域，能量已先到達，使原爲平靜之地區激發出新波，這樣使得能量散布到整個空間，使得單位體積中的能量變爲無限小，於是波動趨於消失，當群速小於波速時，波動已傳到前方，而在波的後面遺留下一部份能量，這樣也同樣可使能量散布於整個空間，使波動消失。

## 四、暫結語

綜合上述，我們可以看出，在自轉的地球大氣中，大尺度運動有一個基本的動力過程，那就是地轉調節過程，當運動中出現了非地轉的成份之後，就會激出重力慣性波，這種波具有頻散的性質，通過頻散，它的振幅迅速減小，當重力慣性波完全阻尼後，運動就重新達到地轉平衡，所以嚴格的說，只有 $t \to \infty$ 時完全調節的狀態才會出現，但實際上，當重力慣性波的强度小到某一程度時，運動就可以認爲實際上達到地轉狀態了，這種狀態可以稱爲准地轉平衡狀態。

由此看來，大氣的大尺度運動有著兩個基本過程，地轉調節過程是其一，另一基本過程爲沿某一方向作比較緩慢的准地轉的演變過程，由於在完全的地轉平衡下，大氣運動就沒有了變化，所以演變過程正是通過地轉平衡不斷破壞而產生的，而地轉平衡一旦被破壞之後，調節過程又把運動拉向准地轉的軌道上來，大氣的大尺度運動，就是在調節與調節破壞的相互矛盾過程中不停的發展。

在中小尺度運動中也有氣壓場和風場的調節過程，也就是說在一般情況下，中小尺度的運動和大尺度運動一樣，也是在力的准平衡狀態下進行演變的。

其次，由於大尺度的調節過程，乃風場向氣壓場調節，而小尺度的調節過程則爲氣壓場向風場調節，因此我們在做天氣分析或是數值預報時，到底該取用高度場或是流函數比較具有物理上之意義，就要特別的注意。

## 參考文獻


1. Bolin, B. (1953): The adjustment of a nonbalanced velocity field towards geostrophic equilibrium in a stratified fluid. Tellus, 5, 373-385
2. Cahm, A. (1945): An investigation of the free oscillations of a simple current System.
3. Fischer, G., Berichter des Wetterdienstes, 13d. 12 (1963), No. 87.
4. Knσejib, N.A., IIAH CCCP T. 132 (1960), 319.
5. Hollmann G. (1959); Beitr. Z. Physik der Atmosphare, Bd. 31, 5–30
6. Holton, J. R. (1979): An Introduction to Dynamic Meteorology.
7. Oσyxob, A.M.,Nэβ. A H CCCP cep. ceoep. u zeoφuэ., 13 (1949), 281–306
8. Raethjen P. (1950), Arch. Met. Geoph: Biok. A., Bd. 2 (1950) 207–222
9. Rossby, C. G. (1938): On the mutual adjustment of pressure and velocity distributions in certain simple current systems, 2. J. Mar. Res., I, 239–263
10. Rossby, C. G. (1936): Pap. in phys. Ocean and met., Vol. 5, No. 1
11. Rossby C. G. (1938): J. Mar. Res. II V. I. No. 3.
12. Yeh, T. C. (1957): J. Met. Soc. Japan., 75. 130–134
13. 林沛練，徐天佑（1981）：各種尺度的大氣運動，氣象預報與分析，第八十八期，P29～P40