氣流過山之線性解

第一部份：非地轉系統之初步研究

申博文

空軍氣象中心

摘　　要

以線性理論來研究地形對大氣運動的影響，若考慮 f-plane、均勻風場，大氣無黏滯性且均勻成層分佈，經由布氏近似（Boussinesq Approximation），當流體通過一三維地形時，吾人可以求得各物理擾動量的封閉解（closed formsolution），利用FFT技巧可以知道（i）a～0.1km時，u',v'爲一偶流（doublet），（ii）a ～10km時，u',v'爲一源流（point source），（iii）a～700km時，u',v'爲一渦漩流（point vortex）。（a 爲地形水平尺度，u',v'爲風場擾動量）。而（iv）a ～100km時，u',v'分佈情形和上述三種情況不同，在山後下游處，分別形成一負、正的曲率中心。其中（iv）項，其羅士貝數（Rossbynumber）接近1，爲目前線性理論所欠缺的部份。

一、前言

地形使得大氣運動更加多采多姿！而有關氣流受地形作用的影響，亦提供科學研究人員一個相當有趣，並富挑戰性的課題。大氣受地形作用而引發的現象有許多種如山岳波（mountain wind）、下坡風（downslope wind）、焚風、逆流效應（upstream influence,Pierrehumbert & Wymon（1985））、背風渦旋（lee vortex, Smolarkiewicz & Routunno（1989）），以及背風旋生（lee cy-clogensis, Smith（1984）Lin（1989））等。舉凡自小尺度地形的位勢流（potential flow,Drazin（1961）到大尺度準地轉系統（quasi-geostrophic system, Buzzi & Tibaldi（1977）,Smith（1979）），均是歷年來學者研究的對象，至於研究方法，則有理論、實驗、觀測及數值模擬等。

地形的水平尺度(a)和垂直高度(h_0)及基本風場(U)，對於氣流過山所產生的現象扮演著重要的角色，而因浮力、科氏力作用的關係，使大氣系統本身即存在一些自然尺度如$\frac{U}{N}$$\frac{U}{f}$，二者分別代表在浮力、科氏力的作用下，流體所經過的距離。若將這些自然尺度與地形水平尺度或垂直高度比較，則可估計氣流通過地形時，受浮力或科氏力影響的程度，因此大氣系統有下列三個控制參數，$\frac{U}{aN}$、$\frac{U}{af}$、$\frac{U}{Nh_0}$（後二者分別稱爲羅斯貝數R_0(Rossby number)，及佛勞數F_r（Froude number））。

有關不同佛勞數對氣流過山的影響，已有許多學者研究過，如Shep-pard（1956）、Smith（1979）。在F_r《1 的情形有Drazin（1961）的位勢理論（potential flow theory），而當F_r》1則適用Smith（1980）的線性理論（並未加入科氏力），至於當$0.1 < F_r < 0.5$的情況則因Smolarkiewicz & Routunno（1989）（此後簡稱SR（1989））的研究，而吸引大批學者從事相關問題的討論，如Smith（1989），Lin（1991）。

關於氣流過山的研究，早期爲了簡化問題，只考慮二維（X－Z平面）的情況，即將地形視爲Y方向無限延伸，其中Queney（1948）、Sawyer（1960）、Eliassen & Palm（1960）和Miles（1969）對後來的研究發展影響最大。Queney利用線性化方程式組，在考慮β－面，均勻風場，大氣爲絕熱而且穩定成層的條件下，當氣流通過一個二維鐘形地形時，其結果顯示不同的半山寬會有三種不同的背風波動（lee waves）。

早期有關地形對大氣的影響，屬Smith（1979）整理的最爲詳盡，其涵蓋了理論、數值模擬、觀測資料的分析等方法，而有關小尺度浮力的影響，邊界層效應，中尺度背風旋生，地形降雨，及行星尺度的山波都有加以探討，但有關三維地形的研究則似乎仍嫌不足。Buzzi & Tibaldi（1977），則是考慮均勻風場經過三維地形的運動情形，假設靜力平衡，f-平面，大氣爲穩定均勻成層及布氏近似(Boussinesq Approximation），並利用R_0爲小參數，將物理擾動量用R0做冪級數展開求解。

而關於三維地形的研究，以Smith（1980）的線性理論最爲知名，其假設和Buzzi & Tibaldi（1977）相似，只是沒有科氏力。利用複變積分求得地面壓力場、風場的解析解，並利用 FFT（Fast Fourier Transform）和漸近解（asymptopic solution），去研究η（密度面垂直位移）的變化情形。科氏力對於中小尺度地形的影響，可參考Smith（1982），此研究延續Smith(1980)，只是多加了科氏力項。利用R_0^{-1}當作小參數，並將各擾動量做冪級數展開求解。Phillips（1984）亦延續 Smith（1980）的研究，其考慮棋部面爲橢圓及不同斜率的鐘形地形。

有關R_0趨近於1 時求理論解的研究並不多見，Thorsteinsson（1988）是利用數值模擬探討這方面的問題。他利用一個三維非線性模式，垂直方面採θ坐標，並且假設在f-平面上，大氣爲絕熱，靜力平衡，穩定成層的情況。當流場接近恆穩狀態（steady state）時，流場型態由三個參數（S，R_0，H_0，$S \equiv (\frac{NU}{g})^2$，$R_0 \equiv \frac{U}{af}$，$H_0 \equiv F_r^{-1}$ 所決定。

而作者（申（1992））的研究，則將原始方程式線化，並利用FFT（Faster Fourier Transform ）求取通過三維地形的數值解。除得到和已有的線性理論一致的結果外，且進一步補足了線性理論在R_0接近1 時所欠缺的部份。另外作者亦指出Queney（1948），Buzzy&Tibaldi（1977）所做的結果可能有誤。因限於篇幅，詳細討論請見申（1992）。

控制方程式

將方程式線性化，並做布氏近似（Boussinesq approximation），基本風場爲西風且爲常數，消掉ρ'，ω' 後方程式組變成：

$$(\triangle^2 \nabla_3^2 + N^2 \nabla^2 + f^2 \frac{\partial}{\partial Z^2}(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x})\eta = 0 \qquad (1)$$

$$(\triangle^2 + f^2)\frac{u'}{\partial z} = (\triangle^2 + N^2)(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x})\eta_x + f(\triangle_2 + N^2)\eta_y \qquad (2)$$

$$(\triangle^2 + f^2)\frac{v'}{\partial z} = (\triangle^2 + N^2)(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x})\eta_y - f(\triangle^2 + N^2)\eta_x \qquad (3)$$

$$\frac{-1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial z} = (\triangle^2 + N^2)\eta \qquad (4)$$

式中U'，V' 分別爲X，Y方向的速度擾動量，P'爲壓力擾動量，ρ爲密度，η爲密度面的垂直位移，下標之X，Y，Z分別代表對X，Y，Z的微分，C爲聲速，f爲科氏參數，g 爲重力加速度。而且除了$\triangle^2\frac{\partial}{\partial z}$，和$\triangle^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}$之外，$\triangle^2$代表非靜力項，各運算子定義如下：

$$\triangle^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2U\frac{\partial^2}{\partial t \partial x} + U^2\frac{\partial^2}{X^2} \qquad (5)$$

$$\nabla_3^2 = \frac{\partial^2}{X^2} + \frac{\partial^2}{Y^2} + \frac{\partial^2}{Z^2} \qquad (6)$$

$$\triangle^2 = \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} \qquad (7)$$

$$N^2 = \frac{-g}{\rho_0}\frac{d\rho}{dz} \quad （浮揚頻率） \qquad (8)$$

由上我們知道，方程組可以簡化成一個應變數η的偏微分方程式Eq(1)，而其他物理量u'、v'、p'，可以表成η的函數Eq(2)，(3)，(4)。

地形（下邊界）爲：

$$H(x, y) = \frac{h_0}{(\frac{x_1^2}{a^2 X^2} + \frac{y_1^2}{a^2} + 1)^{\frac{3}{2}}} \qquad (9)$$

$$x1 = x \cdot \cos(\theta) - y \cdot \sin(\theta) \qquad (10)$$

$$y1 = x \cdot \sin(\theta) - y \cdot \cos(\theta) \qquad (11)$$

1.a ： 地形水平尺度

2.X ： 當地形水平剖面爲橢圓時，短軸與長軸的比值

： 若X < 1，則地形水平剖面爲橢圓，且長軸在y方向

3.θ ： 當地形水平剖面爲橢圓時，長軸與y軸的夾角，順時鐘爲正

4.h0、： 山頂高度

考慮恆穩解（steady solution $_t = 0$）利用二維傅立葉轉換（Fourier Trans-form），將上述方程式由眞實空間（x，y），轉換到波數空間（k，l）求解，然後再利用逆傅立葉轉換（Inverse Fourier Transform ），得到眞實空間的解。

$$\hat{g} = \int\int g\, e^{-2\pi i(kx+ly)}\, dxdy \qquad (12)$$

$$g = \int\int \hat{g}\, e^{2\pi i(kx+ly)}\, dkdl \qquad (13)$$

其中g爲任意物理量（η、u'、v'、p'），而$\hat{g}$ 代表g之傅立葉轉換，若將方程式組做傅立葉轉換，並進一步討論不同尺度的地形所產生的影響，我們可以將水平方向做尺度轉換

$$x = a x', \qquad y = a y' \qquad (14)$$

而對應波數空間的尺度轉換爲

$$k = \frac{k'}{a}, \qquad l = \frac{l'}{a} \qquad (15)$$

則

$$u' = \int\int dk'al'\, e^{2\pi i(k'x'+l'y')}\hat{u}_0 F_{x',y'}\{h\}\hat{\tau}_s \qquad (16)$$

$$v = \int\int dk'al'\, e^{2\pi i(k'x'+l'y')}\hat{u}_0 F_{x',y'}\{h\}\hat{\tau}_s \qquad (17)$$

$$p' = -\rho\int\int dk'dl'\, e^{2\pi i(k'x'+l'y')}\hat{p}_0 F_{x',y'}\{h\}\hat{\tau}_s \qquad (18)$$

$$m^2 = 4\pi^2(k'^2 + l'^2)\frac{N^2 - \frac{4\pi 2k'^2U^2}{a}}{4\pi^2k'^2U^2 - a^2f^2} \qquad (19)$$

$$\hat{u}_0 = (4\pi^2k'^2U - i2\pi dl'f)\left(\frac{N^2 - \frac{4\pi^2k'^2U^2}{a}}{4\pi^2k'^2U^2 - a^2f^2}\right) \qquad (20)$$

$$\hat{u}_0 = (4\pi^2k'l'U + i2\pi ak'f)\left(\frac{N^2 - \frac{4\pi^2k'^2U^2}{a}}{4\pi^2k'^2U^2 - a^2f^2}\right) \qquad (21)$$

$$\hat{p}_0 = \left(N^2 - \frac{4\pi^2k'^2U^2}{a}\right) \qquad (22)$$

$$F_{x',y'}\{h\} = \int\int h(ax', ay')\, e^{-2\pi i(k'x'+l'y')}dx'dy' \qquad (23)$$

而τ_s由以下式子所定義：

$$\hat{\tau}_s = \frac{-1}{M}e^{-Mz},\ M = -m^2 \quad 當 \frac{aN}{2\pi U} < |k| \quad 或 \quad |k| < \frac{af}{2\pi U}, \qquad (24)$$

$$\hat{\tau}_s = \frac{-i}{M}e^{imz}, \quad 當 \frac{af}{2\pi U} < |k| < \frac{aN}{2\pi U} \qquad (25)$$

以下爲方便起見，我們用（x，y）代替（x'，y'），用（k，l）代替（k'，l'）。在Eq（16）-（18）中，我們得計算逆傅立葉轉換（Inverse Fourier transform），但假若被積函數爲banded-limit，即被積函數只有在某一個區域內有值，則CIFT（Continuous Inverse Fourier Transform），可用DIFT（Discrete Inveres Fourier transform）近似〔註4〕，進一步可用IFFT（Inverse Fast Fourier

Transform）去計算，因為鐘形地形的傅立葉轉換為$e^{-2\pi\sqrt{k^2+l^2}}$，當l = 0，k = 1.1 其數量級大小為0（10^{-3}），因此若我們選取｜K｜> 1，則被積函數滿足Banded-limit。

〔註4〕：見Weaver（1983）

考慮：

水平計算範圍	X：-24 ～ 24
	Y：-24 ～ 24
X 方向取樣點數	M = 128
Y 方向取樣點數	N = 128
水平輸出範圍	x：-6 ～ 6
	Y：-6 ～ 6

注意水平單位為地形尺度（a），$\delta x = \frac{48}{M}$，$\delta y = \frac{48}{N}$，而為滿足取樣定理（Sampling theorem）〔註 5〕，取$\delta k = \frac{1}{M} \times \frac{1}{\delta x}$、$\delta l = \frac{1}{y} \times \frac{1}{N\delta}$ 則波數k方向計算區域為〔$-k_c$，k_c〕、波數l 方向計算區域〔$-l_c$，l_c〕，$k_c = \frac{M}{2} \times \delta k = \frac{4}{3}$、$l_c = \frac{N}{2} \times \delta l = \frac{4}{3}$。

——數值結果——

由Eq（24）、Eq（25），我們知道M^2的正負號，可以決定流場理量在垂直方向的運動型態。而M^2的正負號，又是由 k（無因次化波數）和兩個參數（$\frac{U}{af}$,$\frac{U}{aN}$，或謂$\frac{af}{U}$,$\frac{aN}{U}$）之間的大小關係來決定。參數$\frac{U}{aN}$代表浮力週期（$\frac{1}{N}$）和平流週期，所以流體不受浮力影響，這種情況相當於位勢流；反之，當$\frac{1}{2\pi|K|} \ll \frac{U}{aN}$，即$1 \ll \frac{U}{aN}$時，相當於浮力週期遠大於平流週期，所以流體不受浮力影響，這種情況相當於位勢流；反之當$\frac{1}{2\pi|k|} \ll \frac{U}{af}$，即$1 \ll \frac{U}{af}$，此時平流週期相對而言比較小，所以科氏力不重要；反之，當$\frac{1}{2\pi|k|} \ll \frac{U}{af}$，此時平流週期相對而言比較大，科氏力變得比較重要。

由上述討論得知，若我們固定 U，N，f，則參數$\frac{U}{af}$、$\frac{U}{aN}$的大小由a決定，換句話說，a 的大小決定流場的型態。另外我們可以知道 u'，v' 的水平波長大約為 $2\pi\frac{U}{f}$見申（1992），Eq（3.2），（3.3）），所以$\frac{U}{af}$亦可解釋成水平波長與山的水平尺度的比值。當$\frac{U}{af} \ll 1$，則代表水平波遠較地形尺度小，故通過地形時受到科氏力的影響較大（見Smith（1982））。

〔註 5〕：見Weaver（1983），或 Rosenfeld&Kak（1982）

由前述討論我們可以知道，若固定U，N，f時，流場型態則由地形水平尺度（a）所決定。上述物理量的數值結果，茲整理如下，並請參閱表一：圖(1)為地形x － y剖面的等值線，首先看風場的分佈情形，其分佈型態由偶流（dipole,a = 0.1km，圖（2））變成源流（point Source，a = 10km，圖（3））再到渦漩流（vortex,a = 700km，圖（5）），其當a由0.1公里擴大為10公里時，風場型態改變並不大；但a 由10公里擴大至70公里時，由於科氏力作用的結果，使得山之南側（第三、四象限）的北風分量減小，山後北側下游（第一象限），西風與北風分量均加强，因此有一個負的曲率中心。隨著a的加大（a～100km），在山後北側下游處x = 2.5a 左右，風場擾動會有逆流現象（u'<0），再加上北風分量，因此形成一個新的正曲率中心（圖（4））。若a再增加，兩個正負曲率中心將逐漸向山頂靠近，且正曲率中心漸漸消失，只剩下負曲率中心，但其強度漸減弱，並且位於山頂上（即圖（5））。至於高層u'，v'和地面u'，v'主要的差異在於：當a 25km時，高層的正負曲率中心之曲率半徑比地面的曲率半徑要小。

接著我們看壓力場，當半山寬a = 0.1km時，流場為一位勢流，其壓力擾動量分佈的型態為H-L-H，L在山頂，H為山前、山後對稱（圖（6））。隨著A的增加，山前、山後的H變成不對稱，

山後的H比較小。當a = 10km時，山前有一個H，山後有一個H，山後為一個L。若不考慮科氏力，則H和L的強度相同；若考慮科氏效應時，山後的L會比較小（圖（7））。若a再增加，則山後的L會持續的減小，而山前的H，其強度持續增強，且範圍加大。當a = 70km時，山後的L消失了，反而變成另一個高壓中心，但強度較小。此時擾動壓力場分佈型態變成了H-H-H（圖（8）），中間的H即是由L轉變而成的。若a再增加，則山後H和山前的H均向山頂靠近，最後結合成為一個H，而且位於山頂的上方（圖（9））。當f ≠ 0的時候，H的極大值正比於半山寬a，其數量級的大小約和afU相當，因此在做無因次化處理時，可以用afU做為壓力擾動量的尺度。

當考慮水平剖面為橢圓的鐘形地形，令長軸平行y軸，短軸平行x軸，且以地形旋轉來模擬不同的風向通過地形時的情形，結果發現將地形旋轉θ角，則流場在 x-y剖面的分佈情形亦隨地形而旋轉θ角（圖（10.a，b，c，d））。

結　語：

將原始方程式線性化，並且整理化簡可得Eq(1)，(2)，(3)，(4)，若進一步做傅立的葉轉換，則可以在波數空間中得到解析解，然後藉由FFT去計算逆傅立葉轉換則可以得到眞實空間的解。吾人可以證明當任意波模，其垂直波長若小於密度的特徵尺度時，Eq(1)，(2)，(3)為一淺水波方程式（申（1992））。因為討論的是線性系統，由Eq(16)，(17)，(18)我們可以看出，各物理擾動量是地形的線性函數，又因為推導的過程中，對地形並未做特別的假設，因此用上述三式計算物理擾動量時，可考慮任意地形。若與以往的研究做一番比較，吾人可以了解a = 0.1km，10km，700km的結果與其它學者的結果一致，其分別代表位勢流（potential flow），靜力山岳波（hydrostatic mountain wave），以及準地轉系統（quasi-geostraphic system），除數值解之外，亦可以得到解析解（申（1992））。而a = 100km的結果則補足了線性理論在R0接近1時所欠缺的部分。另外作者亦指出Queney（1948），Buzzy& Tibaldi（1977）所做的結果可能有誤（申（1992））。

參考資料

申博文，1992：三維地形對大氣的影響——線性解·國立中央大學大氣物理研究所碩士論文.85pp

Buzzi,A.,and S.Tibaldi,1977:Inertial and frictional effects on rotations strati-fied flow over topography. Quart.J.Roy.Meteor.Soc.,103,135-150.

Drazin,P.G,1961: On the steady flow of a fluid of variable density past an obstacle. Tellus,13,239-251.

Eliassen,A.,and Palm,E.1960:On the transfer fo energy in stationary mountain waver. Geofys.Publ.22,1-23.

Lin,Y.-L,and D-J Perkey.,1989 : Numerical modeling studies of a process oflee cyclogensis.J.Atmos.Sci.,15,3685-3697.

Lin,Y.-L.,1991: Numerical modeling studies of lee mesolows, mesovortices and mesocyclones with application to the formation of Taiwan Mesolows. (un--publihed)

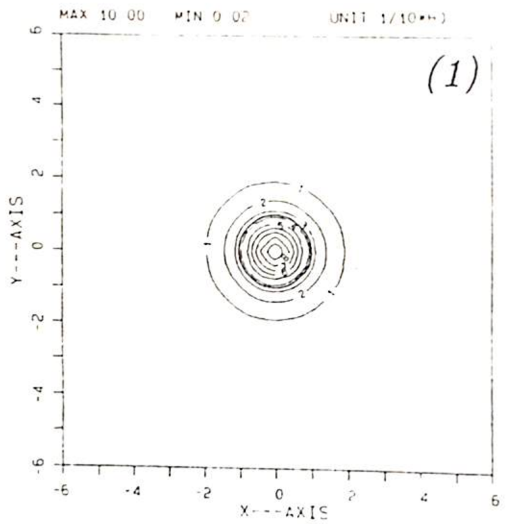
Miles,J.W.,1969: Waves and wave drag in stratified flows.Proc.Int.Congr.Appl. Mech.,12th,1968.Springer-Verlag, Berlin and New York.

Phillips,D.S.,1984:Analytical surface pressure and drag for linear hydrostatic flow over three-dimensional elliptical mountains.J.Atmos.Sci.,41,1073-1084.

Pierrehumbert,R.T.,and B.Wyman,1985: Upstream effect of mesoscale moun-tains.J.Atmos.Sci.,42,977-1003.
Queney,P.,1948:The problem of air flow over mountains:a summary of theo-rectical studies. Bull.Amer.Meteor.Soc.,29,16-26.
Rosenfeld,A.,and A.C.Kak.,1982:Digital Picture Processing.Academic Press.435 pp, chrpter 4,p71-75.
Sheppard,P.a.,1956: Airflow over mountains.Q.J.R.Meteorol.Soc.,82,528.
Sawyer,J.s.,1960: Numerical calculation of the displacements of a stratified airstreamcrossing a ridge of small height. Q.J.R.Meteorol. Soc.,86,31-43.
Smith,R.B.,1979: The influence of mountain on the atmospher. Advances in Geophysics,vol.21,Academic Press,87-230.
Smith,R.B.,1980: Linear theory of stratified of hydrostatic flow past an isolated mountain. Tellus,32,348-364.
Smith,R.B.,1982: Synoptic observations and theory of orographically disturbed wind and pressure. J.Atmos.Sci.,39,60-70.
Smith,R.B.,1984:A theory of lee cyclogensis. J.Atmos.Sci.,41,1159-1168.
Smith,R.B.,1989:Comment on "Low froude number flow past three-dimen--sional obstacles. part I:baroclically generated lee vortices".J.Atmos.Sci., 46,3611-3613.
Smolarkiewicz,P.K.,and R.Rotunno,1989:low froude number flow past three dimensional obstacles. part I: baroclically generated lee vortices. J.Atmos. Sci,46,1145-1164.
Thorsteinsson,S.,1988:Finite amplitude stratified airflow pastisolated mountain on an f-plane. Tellus,40A,220-236.
Weaver,H.J.,1983: Applications of Discrete and Continuous Fourier Analysis. Wiley-Interscience. 375pp.

誌謝：

本文得以順利完成，首先感謝指導教授洪秀雄先生的悉心指導，母校中央大學大氣物理研究所及空軍氣象中心的軟、硬體的支援，亦一併感謝。



圖(1)：地形等值線

U = 10m/s,N = 10-4s-1H0 ≡ h0 代表山頂高度．x，y軸的單位爲地形水平尺度，a，．粗圓實線爲r = √2x + y2= a 的地形等值線，令u'，v'，p'分別代表水平風場擾動量、壓力場擾動量、壓力場擾動量、UMAX，UMIN，VMAX，VMIN分別爲U'，V'的極大值，極小值．

風場擾動量

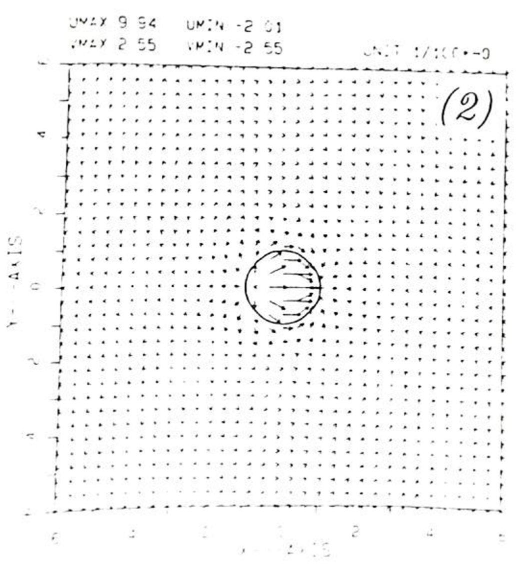
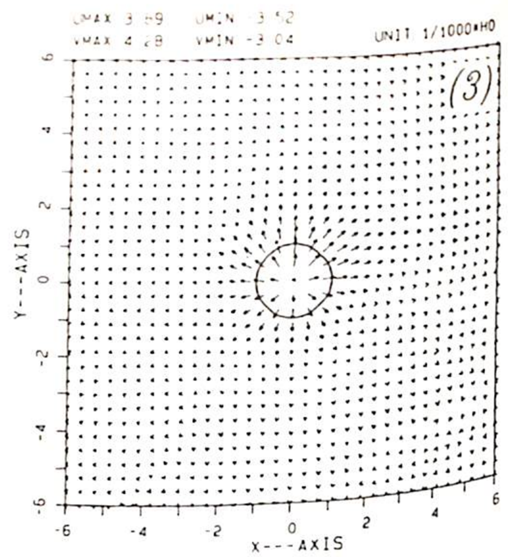
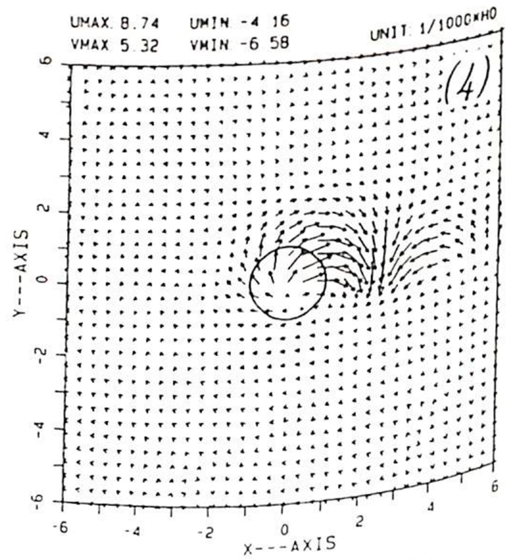


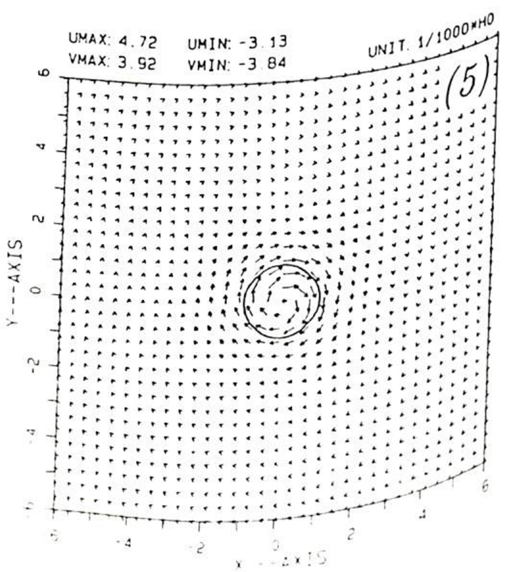
圖2：U'，V'，當a = 0.1km.



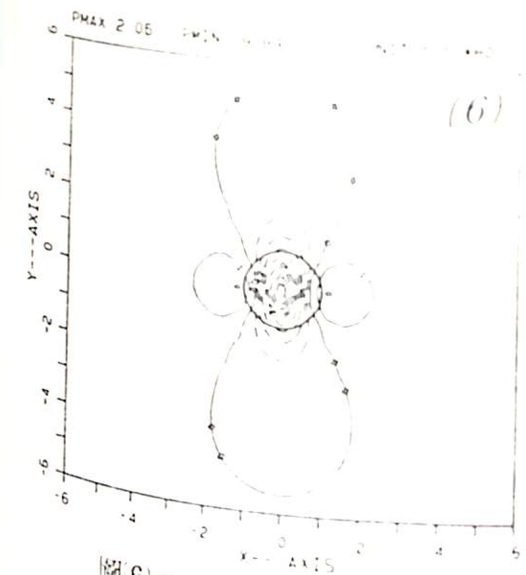
圖(3)：U'，V'，當a = 10km.



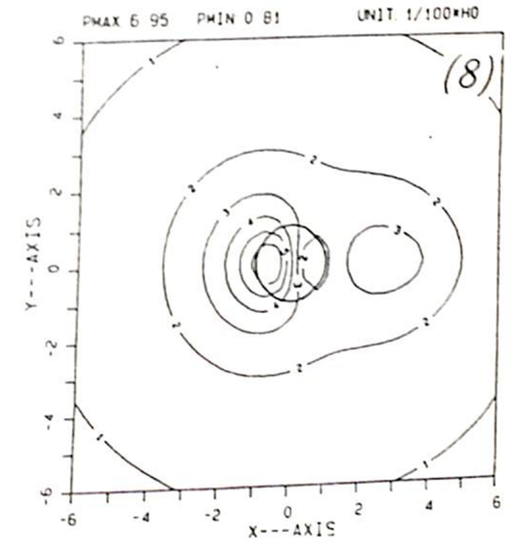
圖(4)：U'，V'，當a = 100km.



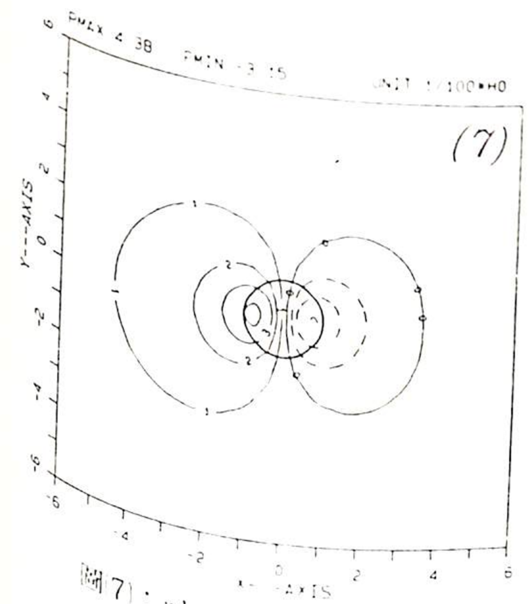
圖(5)：U'，V'，當a = 700km.



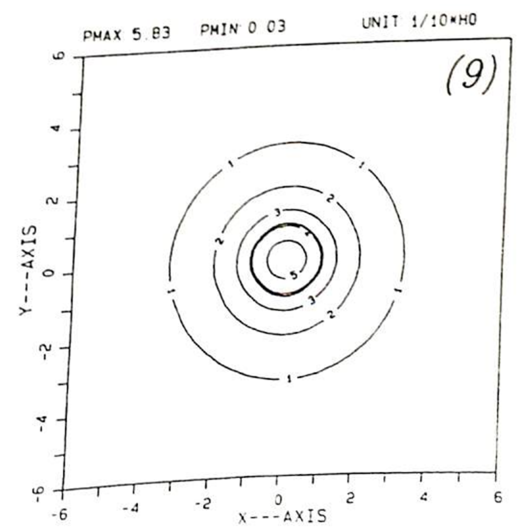
圖(6)：p'，當a = 0.1km.



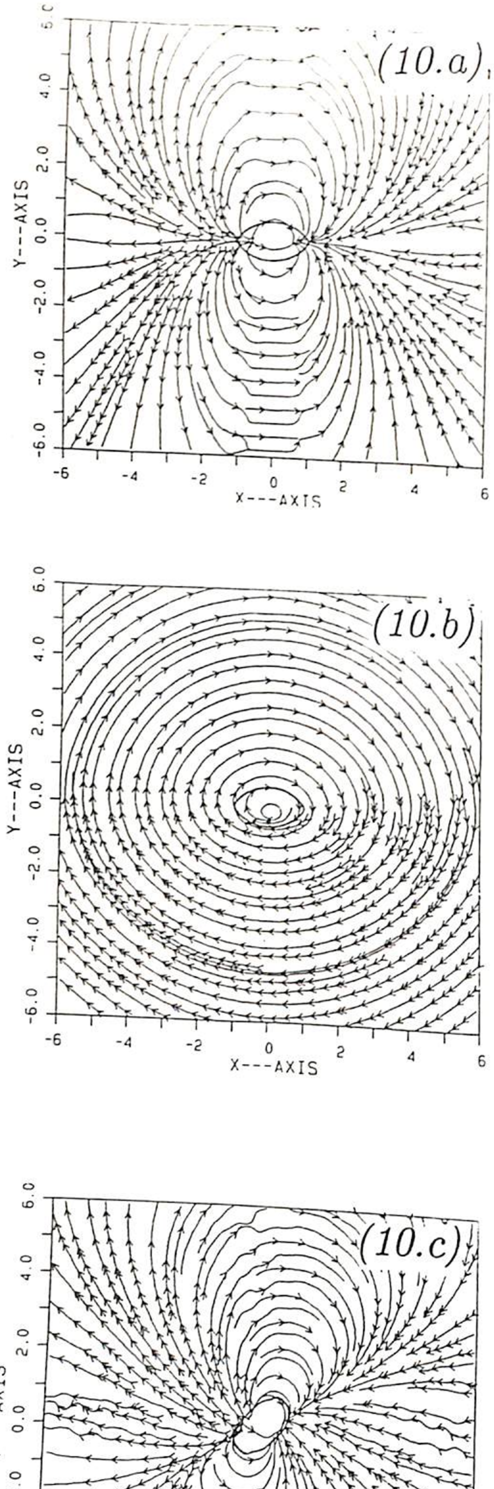
圖(8)：p'，當a = 70km.

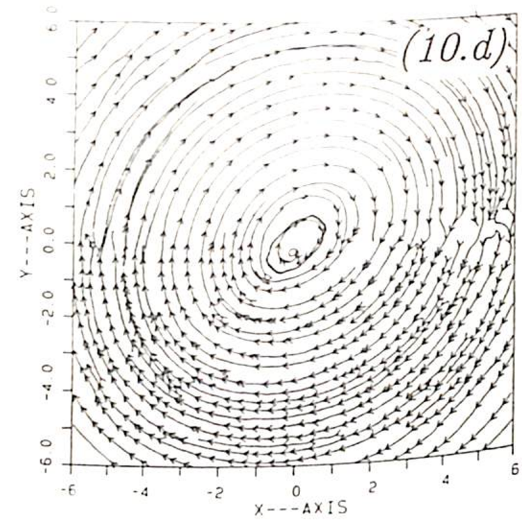


圖(7)：p'，當a = 10km.



圖(9)：p'，當a = 700km.





圖（10）：橢圓地形不同旋轉角度的流場分佈，長短軸比爲2:1，θ 爲長軸與y軸的夾角，順時鐘爲正．（a）:a = 0.1km，θ = 90° ．

（b）:a = 700km，θ = 90° ．

（c）:a = 0.1km，θ = 45° ．

（d）:a = 700km，θ = 45° ．