# 舉升凝結高度(LCL)溫度之計算

## Computation of Temperature at LCL.

李白華譯


摘　要

舉升凝結高度溫度值求得之若干近似公式被發現，以此等簡單代數方程式計算係與公式所獲結果比較而得，此種公式須以反覆的技巧以求其解，其所獲之一結果，在露點降低於25°C或以下時，準確在0.05C以內。


*　　*　　*

### 1、簡　介

一九六七年 Stackpole 業已提出了舉升凝結高度（Lifted Condensation Level LCL）上溫度及氣壓之數值計算法，其所使用之重復技巧，可準確至使用者所需之度數；如需更準確，則雖經若干次重復，可甚易獲得，如在原來重復的設計內使用一準確估計之凝結高度上之溫度，則其計算時間或可減少甚多，本文之目的在與 Stackpole 所列出之方法若干近似值之比較。

### 2、近似公式

舉升凝結高度之定義為，未飽和之濕空氣在絕熱澎脹下，上升而產生飽和之高度，下列式中書於下脚之 i，表濕空氣塊在原始位計算之變數。

Haurwitz 在一九四一年指出一上升未飽和空氣之露點溫度改變，可書為

$$\frac{dt_d}{dZ}=-\frac{1}{abk\ln 10}\frac{(t_d+b)^2}{(t+273.16)}\Gamma_d \quad (1)$$

式中 $t$＝溫度（C），

$t_d$＝露點溫度（C），

$K$＝定壓下乾空氣氣體常數對比熱之比值

$r_d$＝溫度之乾絕熱直減率，

$Z$＝高度，

$a,b$＝常數（出現於1930年 Teter 之經驗公式，在一平的水面上之飽和水氣壓），即

$$e_s=6.11\times 10^{at/(b+t)} \quad (2)$$

式中 $e_s$＝飽和水氣壓（mb），在一平的水面上 $a=7.5$，$b=237.3$，方程式(1)可改寫為氣塊絕對溫度 T 改變，而露點溫度相對的改變之微分方程式，即

$$\frac{dt_d}{dT}=C\frac{(t_d+b)^2}{T} \quad (3)$$

式中 $C=(abk\ln 10)^{-1}$。當氣塊接近其 LCL 時，其LCL溫度及露點溫度接近於 $t_{LCL}$。上式積分之，則得出 $t_{LCL}$ 與氣塊原始情況之關係如下：

$$\frac{1}{t_{LCL}+b}-\frac{1}{t_{di}+t_b}=C\ln\left(\frac{T_{LCL}}{T_i}\right) \quad (4)$$

方程式內 $t_{LCL}$ 可由數值法容易地解出；結果與 Stockpole 所列出者實際一樣。

下面係顯示(3)式簡化後之近似解，與用 Stockpole 法所得結果甘為相似。

下面係係以露點降低說明露點溫度變之一近似說明，即

$$\frac{dt_d}{dD}=C_2+C_3\left(\frac{2t_d}{b}-\frac{t}{273.16}\right), \quad (5)$$

式中 $t_d/b$ 及 $t/273.16$ 於二次方及二次方以上已略而不計，常數可以 $C_1$ 表示之，即

$$C_1=\frac{b}{ak\ln 10\times 273.16},$$

$$C_2=C_1(1+C_1),$$

$$C_3=C_1(1+2C_1)。$$

為使上述微分方程獲得一近似解，當氣塊上升至 LCL 時，$t_d$ 之變值較 t 或露點降低 D 之改變小得多，將方程式(5)之右端改寫為 $t_d$ 及 D 之函數，則微分方程可稍更改為更方便之形式，即

$$\frac{dt_d}{dD}=C_2-C_4D+C_5t_d, \quad (6)$$

式中 $C_4=C_3/273.16$，$C_5=C_3(2/b-1/273.16)$。應用界限條件，當 $D=0$ 時，$t_d=t_{LCL}$，則方程式(6)之解可寫為：

$$t_{LCL}=C_6+\left(-C_6+t_{di}-\frac{C_4}{C_5}D_i\right)\exp(-C_5D_i), \quad (7)$$

式中 $C_6=(C_4-C_2C_5)/C_5^2$。

在指數函數級數展開內，$D_i$ 三次方及三次方以上略去，則得出在 LCL 氣塊之溫度及其原始露點溫度與露點降低間之關係如下：

$$t_{LCL}=t_{di}-\left[C_2+\left(\frac{C_1}{2}+C_5+C_2\frac{C_1}{2}\right)t_{di}-\left(\frac{C_4}{2}+C_2\frac{C_5}{2}\right)t_i\right]D_i \quad (8)$$



考慮(6)式最後一項有一常數值等於該相當氣塊之原始位置，則(3)式可得一較近似之解，即

$$t_{LCL}=t_{di}-\left[C_2+\left(\frac{C_1}{2}+C_5\right)t_{di}-\frac{C_4}{2}t_2\right]D_i \quad (9)$$

關於(3)式之一解釋，係以 Clausine-Clapeyron 方程式為基礎，而較 Teten 之飽和水汽壓經驗公式為優。Petterson (1956)年導出結果，為

$$\frac{dT_d}{dT}=-\frac{R^*}{Km_vL}\frac{T_d^2}{T}, \quad (10)$$

式中 $T_d$＝露點溫度（K），

$T$＝氣溫（K），

$R^*$＝普通氣體常數，

$M_v$＝水汽克分子量，

$L$＝蒸發潛熱。

Petterson 指出 $T_d$ 與 T 之通常範圍，為

$$0.15<\frac{dT_d}{dT}<0.18。$$

因此，(10)式之右端顯然在多數情形下，可視為一常數。當氣塊上升時，將之變值略而不計，(10)式積分之，得

$$\frac{1}{T_{LCL}}-\frac{1}{T_{di}}=B_1\ln\left(\frac{T_i}{T_{LCL}}\right), \quad (11)$$

式中 $B_1=R^*/(KM_vL_1)$，解此方程式，係利用一種數的重復技巧而獲得，每一計算時，$B_1$ 作為氣塊原始露點溫度之函數，即

$$L_1=597.3-0.566t_{di}。$$

此種結果雖未能與(4)式之以數解之接近，但與 Stackpole 之方法所得者非常接近。

Petterson 之方程式(10)，可更換說明，顯示以露點降低露點溫度之變值，即

$$\frac{dt_d}{dD}=\beta=\left[\left(B_1\frac{T_d^2}{T}\right)^{-1}-1\right]^{-1} \quad (12)$$

$\beta$ 取平均值，約略說明 $t_{LCL}$ 可寫為

$$t_{LCL}=t_{di}-\bar{\beta}D_i, \quad (13)$$

用 $\bar{\beta}=\beta_1$，可獲得相當良好之結果。

將 $t_d/273.16$ 及 $t/273.16$ 二次方及二次方以上略而不計，則方程式(12)可寫成約與(6)式相似之式，即

$$\frac{dt_d}{dD}=B_2+B_3(t_d-D), \quad (14)$$

式中 $B_2=273.16B_1(1+273.16B_1)$，

$B_3=B_1(1+546.32B_1)$。

將(14)式積分，若將 $B_3D_1$ 三次方及三次方以上略而不計，則得

$$t_{LCL}=t_{di}-\left[B_2+\frac{B_3}{2}(B_2+3)t_{di}-\frac{B_3}{2}(B_2+1)t_i\right]D_i \quad (15)$$

除上述理論近似公式所決定者外，吾人加上下列由 Barns於1968年發表之經驗解說：

$$t_{LCL}=t_{di}-(0.1963+0.00129t_{di})D_i \quad (16)$$

### 3、各結果之此較

LCL3.各結果之比較之溫度係按(4)，(8)，(9)，(11)，(13)，(15)，(16)計算而得，且以一異於(9)式之方程式因 $C_1$ 適當地取捨值以計算 $C_2$，此種近似方程式，以計算過之係數相當於(8)，(9)，(13)，(15)且相似於(9)式之同次方程式臚列於下：

$$t_{LCL}=t_{di}-(0.2071+0.001688t_{di}-0.0005534t_i)D_i, \quad (17)$$

$$t_{LCL}=t_{di}-(0.2071+0.001571t_{di}-0.000436t_i)D_i, \quad (18)$$

$$t_{LCL}=t_{di}-\left[1549.43(T_i/T_{di}^2)-1.0\right]^{-1}D_i \quad (19)$$

$$t_{LCL}=t_{di}-(0.2074+0.0014t_{di}-0.0005272t_i)D_i, \quad (20)$$

$$t_{LCL}=t_{di}-(0.212+0.001571t_{di}-0.000436t_j)D_i \quad (21)$$

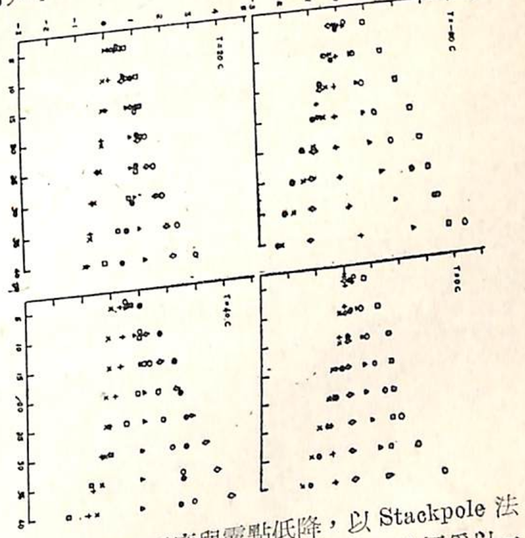

圖1.　選擇之溫度與露點低降，以 Stackpole 法所得結果約略估量之比較。縱坐標為以一近似公式計算之 $t_{LCL}$ 值與以 Stackpole 法計算之相應值間之差異，橫坐標係露點降低值 D。各符號於表 1 內已予以說明。

溫度變化自−30至40 C而以5 C爲間隔已計算好，每一溫度其露點降低係以5 C 爲間隔，其變化自5至40 C。每一方法總共計算120次，此等計算值已與 Stackpole 反復的技巧所得結果相比較。

以 Stackpole 法計算，實際已於其論文內述及，只是係使用 $\varepsilon=0.25$mb。Stackpole 以$D_1=0.5$且以一於LCL處甚精確之溫度近似值更準確核算$D_1$，在LCL處之每一溫度由(21)式計算兩次而決定。每一計算所需反復之數已予詮註。

各種不同之技巧，已納於表1內。圖1內所使用之符號以表示用 Stackpole 法所獲結果之偏差亦於該表內予以說明。

所獲結果指出(4)式之數值解與使用 Stackpole 方程組重復數值法係同樣性質；然而，(4)式之數值解較容易獲得。任一種方法通常約需五次或六次重復。按(2)式，第一次推測估計$t_{LCL}$可減少一次或兩次重復。

表1. 各近以技巧與 Stackpole 法之比較概要。

| 方法 | 圖1內所用之符號 |
|---|---|
| Eq. (4)——Haurwitz 之理論方程式 | |
| Eq. (17) Haurwitz 不方程式之簡化之近似解 | ○ |
| Eq. (18) Haurwitz 不方程式之簡化之近似解 | △ |
| Eq. (21) Haurwitz 不方程式之簡化之近似解 | ＋ |
| Eq. (11)——Pettersen 之理論方程式 | × |
| Eq. (19)——Pettersen 之方程式之近似解 | |
| Eq. (20)——Pettersen 之方程式之簡化式之近似解 | ◆ |
| Eq. (16)——Barnes 之經驗公式 | □ |

以各近似方程式所得之一些結果，無需用重復技巧者，已顯示於圖1內。此等核算及用 Stackpole 法所得兩者間之差異已繪製爲溫度 −20，0，20及40 C之露點降低函數。觀察所作所有之計算結果，乃以(21)式所得者爲最佳，雖然如此，仔細檢查圖1，將可發覺一有特性之溫度及（或）露點降低另一種方法可能稍好，由(21)式所得結果之最大偏差僅只0.12 C；此係以溫度爲−30 C而露點溫度爲−70 C。所有其他之偏差除二者外，均小於0.1 C 。且露點降低≦25 C時，所有之偏差均小於0.05 C 。

1. 歡迎投稿。
2. 來稿插圖請用黑色墨水繪製。
3. 創作稿請賜英文摘要或中文摘要。

謝謝您的合作

編 輯 室 謹 啓