

# 阻塞研究---第二部份： 瞬變渦流與魔子穩定度之數值模擬

洪志誠 林 和

國立台灣大學大氣科學系

(中華民國八十五年八月二十六日收稿；中華民國八十六年三月二十一日定稿)

## 摘 要

本文是阻塞研究之第二部分，在無外力及摩擦的假設下，我們以系統積分保守量探討初始動之能譜(即，非均向性)與魔子穩定度的關係。並且以數值實驗模擬瞬變渦流(transient eddy)在魔子的初期演變。

若控制初始擾動之平均尺度，線性實驗得到：當初始擾動之非均向性(在此，非均向性定義為：波譜平面上，初始擾動能譜在  $l$  方向的能譜重心與  $k$  方向的能譜重心之比值)大於 1 為不穩定，小於 1 為漸近穩定，等於 1 為中性穩定。

根據資料計算得到瞬變渦流(週期 2-10 天)的非均向性約 0.4，按上面理論應屬於穩定類型的擾動。而實驗結果與理論預期完全一致，瞬變渦流在魔子的初期演化屬於漸近穩定。在穩定的條件下，魔子分流場提供一個有效的變形環境，可以快速吸收瞬變渦流的能量，維持阻塞。

非線性實驗得到，擾動的振幅會影響擾動與基本場間的能量交換速率。當瞬變渦流之振幅與魔子之振幅相當時，擾動能量輸往魔子的速率最大。此外，擾動能量收支顯示：積分初期，擾動能量趨近線性遞減率減弱，當擾動進入分流後，擾動與基本場間的能量交換速率有加速的現象，約以時間更高次方(大於二次方)減弱。

**關鍵詞：**積分守恆量、非均向性、魔子、瞬變渦流、漸近穩定

## 一、前 言

資料分析顯示：阻塞期間，基本場的位渦度與流函數幾近線性負相關，並且在阻塞半徑內、外延著不同的斜率分佈(Malanotte-Rizzoli & Hancock, 1987; Butchart et al, 1989)。

理論亦證實阻塞為局部的現象，是位渦方程的解析解，當位渦方程中的非線性項(能量鬱積)與線性(頻散)作用在局部區域達成平衡的結構(Stern,1975; McWilliams,1980;Malguzzi & Malanotte-Rizzoli,1984)。

除了魔子理論,資料診斷(Illari & Marshall, 1983; Illari, 1984; Metz, 1986; Shutts, 1986; Mullen, 1987; Holopainen et al, 1987)與數值實驗(Shutts,1983; Haines & Marshall, 1987)皆發現,阻塞期間,週期 2-10 天之高頻擾動(天)的位渦通量 (potential vorticity flux)是維持阻塞相重要的物理機制。

本研究的目地便是嘗試聯結這二股思維,允許擾動場有條件的維持阻塞結構,以穩定度分析探討瞬變渦流在阻塞期間所扮演的角色。

我們根據魔子是集中區域內,相同能量當中擁有最小渦動能的天氣型態(Stern, 1975;Leith,1983)。假設瞬變渦流對魔子阻塞為穩定或條件性穩定的擾動(在此穩定表初始擾動能量隨時間減弱或固定不變),在穩定可以保證的條件下,魔子分流場提供一個有效的變形環境,快速地汲取瞬變渦流的能量,用以抵擋摩擦的耗損,延續阻塞生命。

由於魔子流函數與位渦為負相關,不滿足 Fjortoft 穩定條件,從動力觀點魔子基本場為條件性穩定。所以本研究重心是找出魔子穩定的條件,並證明瞬變渦流屬於穩定類型的擾動。

在第一部分阻塞的穩定度分析我們得到:魔子穩定度與(1)擾動之空間尺度,(2)擾動能譜(非均向性)有關(洪和林,1993)。根據此標準,天氣波或瞬變渦流(週期 2-10 天)滿足穩定條件,屬於穩定類型的擾動。本文我們將進一步以數值實驗檢驗瞬變渦流在魔子的演變,否如假設為漸近穩定。

為了與理論結果比較,數值實驗將不考慮任何外力及摩擦消散。在系統能量守恆的限制下,擾動能量增加(減少)表魔子能量減少(增加),而(不)穩定類型的擾動表當擾動穿越魔子後其能量是減少(增加)。本研究僅探討擾動在魔子的初期演變,至於長時間的演變並不在研究範圍。

由於擾動之空間尺度與魔子穩定度的關係在 McWilliams(1981)的數值實驗已有詳細的討論。本文主要比較平均尺度相同但能譜(非均向性)不同之初始擾動在魔子演變的差異。

此外, Farrel(1982)研究指出:擾動在分流場的演變並非沿緯向對稱發展;資料分析亦顯示,阻塞分流區是擾動與基本場能量交互作用最顯著的位置(Metz, 1986)。因此,擾動能量的收支分析,何處擾動與基本場能量轉換最快?擾動穿越魔子後,有多少能量會被吸將是本文的目地。

本文共分五節,第二節模式簡介及模式測試,第三節初始擾動之非均向與穩定度的關係,第四節模擬瞬變渦流在魔子之初期演變,第五節結論與討論。

## 二、模式簡介

### (一)控制方程

由於觀測顯示阻塞為相當正壓結構(McWilliams,1980;Dole,1983)，下面將以相當正壓系統探討擾動在魔子的初期演變。相當正壓系統之位渦方程如下：

$$\frac{\partial}{\partial t^*}(\nabla^2 \varphi^* - k_r^2 \varphi^*) + J(\varphi^* - Uy^*, \nabla^2 \varphi^* - k_r^2 \varphi^* + \beta y^*) = 0 \quad (1)$$

其中  $k_r^2 = R_d^{-2}$ ， $R_d$  為羅士培波變形半徑； $U$  為常數，表基本場之緯流速度； $\beta$  表科氏參數之南北梯度； $J(,) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x}$ 。

為了分析方便，我們將上式無因次化，分別以  $R_d$  與  $(\beta^* R_d)^{-1}$  作為長度及時間無因次化的尺度。無因次與因次的關係如下：

$$\begin{aligned} x^* &= R_d x \\ y^* &= R_d y \\ t^* &= (\beta^* R_d)^{-1} t \end{aligned} \quad (2)$$

在此， $\beta = 1.6 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$ ， $R_d = 845 \text{ km}$ ，時間尺度  $\beta^* R_d^{-1}$  為  $7.4 \times 10^4$ ；經過無因次化的  $R_d^{-2}$  之數值為 1。

### (二)數值方法

本模式採用波譜法，任何物理變數皆以傅立葉(Fourier)級數展開。流函數與位渦的展開式分別如下：

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= \sum_{k, l} \hat{\psi}(k, l) e^{i(kx + ly)} \\ q(x, y) &= \sum_{k, l} \hat{q}(k, l) e^{i(kx + ly)} \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $q = \nabla^2 \varphi - k_r^2 \varphi$  表  $\hat{\varphi}(k, l)$ 、 $\hat{q}(k, l)$  分別是  $\varphi$  與  $q$  的波譜展開係數。

利用  $\nabla^2 e^{i(kx + ly)} = -(k^2 + l^2) e^{i(kx + ly)}$  的關係，比較  $\hat{\varphi}(k, l)$  與  $\hat{q}(k, l)$  得到：

$$\hat{\varphi}(k, l) = (k^2 + l^2 - 1)^{-1} \hat{q}(k, l) \quad (4)$$

在計算(1)式中  $J(,)$  項時，先在物理空間求值，然後再將所得轉換到波譜空間。

此外，因為魔子流函數在靠近邊界趨近零。在不影響動力特性的情況下，模式考慮循環(cyclic)邊界，即：

$$\begin{aligned}\varphi(0,y) &= \varphi(L_x,y) \\ \varphi(x,0) &= \varphi(x,L_y)\end{aligned}\quad (5)$$

其中， $L_x$ 與 $L_y$ 分別是無因次化模式的長與寬。模式的範圍為正方形區域，長、寬皆為24；時間積分採用4階Runge-Kutta方法，無因次的積分步距 $\Delta T=2.43 \times 10^{-2}$ ；為了避免非線性項計算造成的混淆(aliasing)誤差，網格數目為 $3N \times 3N$ ( $N$ 為模式在 $x$ 與 $y$ 方向的波數)。

### (三)模式測試

因為魔子為(1)式的非線性解析解，理論上，不考慮摩擦，魔子在基本場的演化只有平移作用，其形狀與振幅將維持不變。我們將根據此特性測試模式的精確度。

在此，我們比較三種解析度網格的模擬差異。粗網格模式使用 $24 \times 24$ 網格點，在魔子直徑內約有5個網格點。一般網格的解析為粗網格的二倍，魔子直徑內約有10個網格點，而細網格的解析度為粗網格的四倍。

圖1.a是魔子位渦場的解析解，圖1.b-d分別是不同的網格解析度積分20天後的結果。比較圖1.b-d發現：粗、細網格都能模擬魔子平移的特徵。但是，粗網格模式對魔子偶極結構的模擬較差，位渦的等相位線沿移動方向有傾斜現象。此外，粗網格模式對魔子振幅的模擬有低估現象，而一般網格與細網格模擬結果則相當接近理論值(表一)。

根據上面結果，在線性實驗中，因為模式需要計算擾動與基本場的交互作用，需要較高的解析度，我們使用細網格模式；在非線性的碰撞實驗，因為只考慮系統全流函數(total streamfunction)的演變，則使用一般網格解析度。

表一 不同的網格解析度的比較。

網格數目 \ 項目	魔子直徑內網格數目	中心最大值	平均誤差
24 x 24	5	4.39 (6.33)	54.6 %
48 x 48	11	7.08 (6.87)	7.4 %
96 x 96	23	6.87 (6.86)	1.2 %

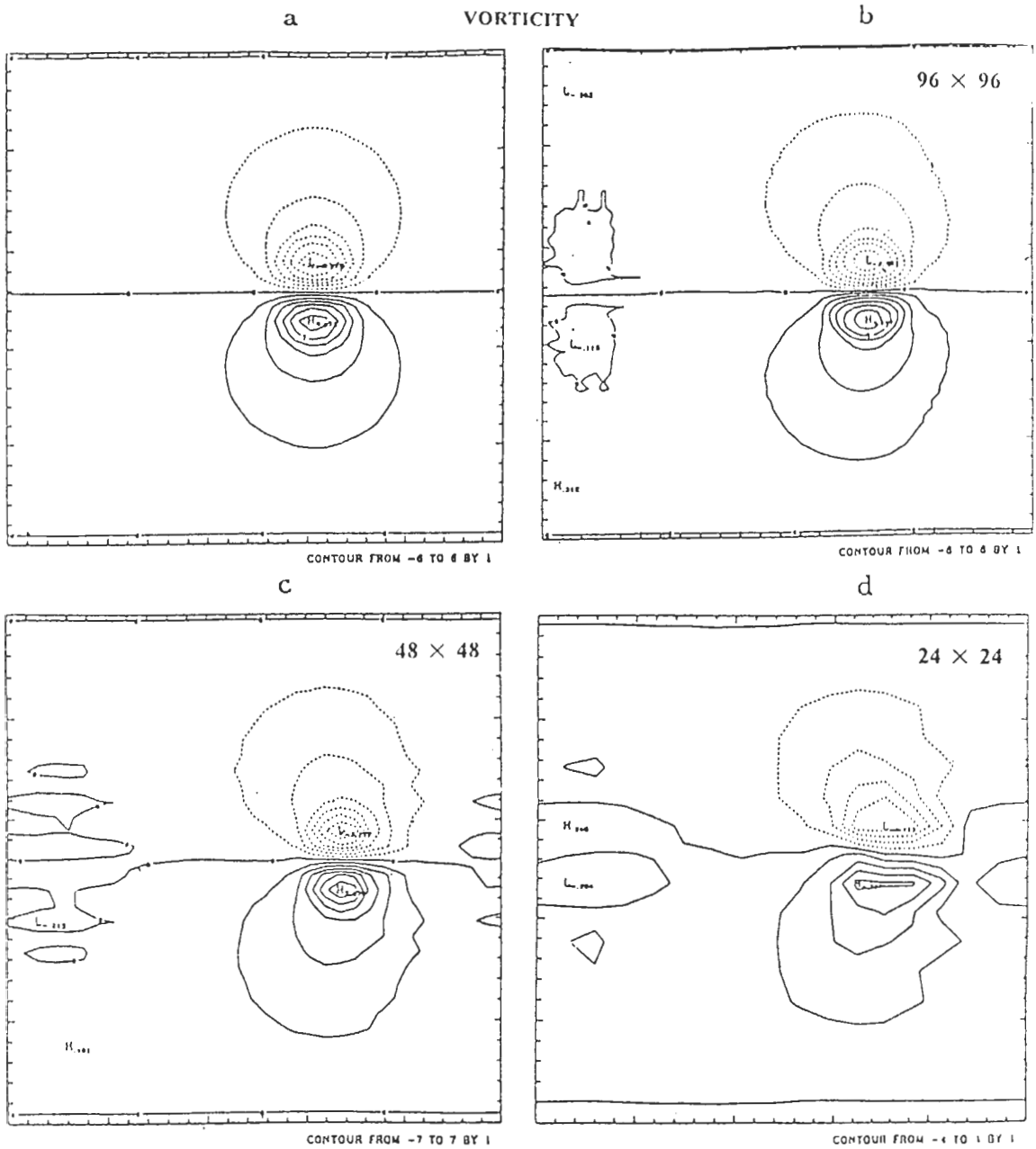


圖 1 不同網格解析度對魔子平移現象之數值模擬的比較。(a)為魔子之初始位渦場，(b)為細網格積分 388 小時後的結果，(c)同(b)但為一般網格，(d)則為粗網格。圖中等值線已經過無因次化，等值線間距為 1。

### 三、非均向性與穩定度

McWilliams(1981)找出擾動尺度與魔子穩定度的關係，其研究指出魔子的直徑是穩定與不穩定的界限，若擾動的平均尺度比魔子直徑小為穩定類型，反之為不穩定類型。但在第一篇研究與一些數值實驗，我們發現尺度相同但能譜(即幾何形狀或非均向性)不同的擾動，在魔子中的演變卻有很大的差異(圖2)，顯示除了空間尺度的大小，擾動的幾何形狀也是影響穩定度的因素。下面我們將針對擾動的幾何形狀，探討擾動能譜(非均向性)與魔子穩定度的關係。

考慮位渦方程：

$$\partial q / \partial t = -J(\varphi, q) \quad (6)$$

其中， $q = \bar{q} + q'$ ， $\varphi = \bar{\varphi} + \varphi'$ ； $\bar{\varphi}$ 、 $\bar{q}$ 表魔子流函數與位渦， $\varphi'$ 、 $q'$ 則為擾動的流函數與位渦。

為了瞭解當擾動穿越魔子時與基本場的交互情形，我們將(6)式線性化，分離基本場與擾動場。假設初始擾動是微小振幅( $|q'_{\max}/\bar{q}_{\max}| = 10^{-4}$ )，線性化的擾動位渦方程如下：

$$\frac{\partial q'}{\partial t} = -J(\bar{\varphi}, q') - J(\varphi', \bar{q}) \quad (7)$$

其次，控制初始擾動，使其平均尺度皆相同。初始擾動之渦度場由下式給定：

$$q'(x, y) \begin{cases} C e^{-\frac{x^2}{x_0^2} - \frac{y^2}{y_0^2}} & \text{for } x_1 < x < x_2 ; y_1 < y < y_2 \\ = 0 & \end{cases} \quad (8)$$

其中  $x_0, y_0$  皆為常數， $C$  為任一常數。在此，考慮初始擾動集中在長寬皆為 1 的正方形區域內，即  $x_2 - x_1 = y_2 - y_1 = 1$ 。調整上式  $x_0^2 / y_0^2$  的比值便可以製造各種相同空間尺度，但能譜(即非均向性)分佈不同的橢圓擾動。

為了計算擾動的非均向性，在此我們定義擾動的非均向性：首先將初始擾動之位渦場( $q'$ )以離散的傅立葉級數展開，令  $\hat{q}'(k, l)$  是波譜展開係數。然後，在波譜平面，分別沿著  $k$  與  $l$  方向，對被積分函數  $\hat{q}'(k, l) \times k$  與  $\hat{q}'(k, l) \times l$  作雙重積分，即：

$$\begin{aligned} w_k &= \sum_{k, l} \hat{q}'(k, l) \times k \\ w_l &= \sum_{k, l} \hat{q}'(k, l) \times l \end{aligned} \quad (9)$$

上式， $w_k$  可視為擾動渦度場之波譜密度沿  $k$  軸的加權面積，相當於擾動渦度場之波譜密度在  $k$  軸的分佈重心； $w_l$  則為擾動渦度之波譜密度沿  $l$  軸的加權面積，或波譜密度在  $l$  方向的分佈重心。

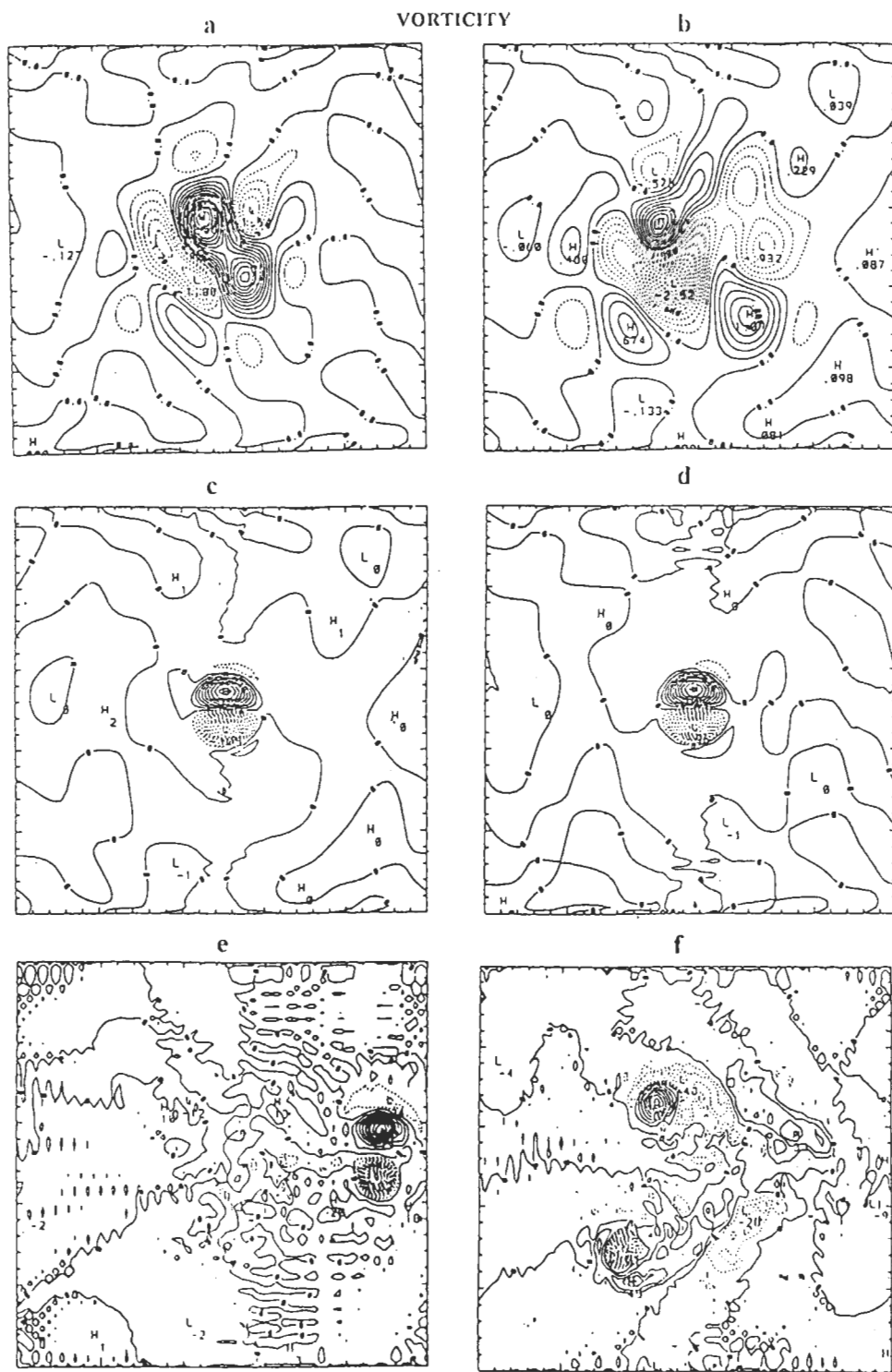


圖 2 空間的平均尺度相同，但能譜(非均向性)不同的兩種擾動，分別疊加於魔子後，系統全位渦場演變的比較。(a)、(b)分別表初始擾動之渦度場；(c)、(d)分別為(a)、(b)疊加於魔子後的結果；(e)、(f)則為(c)、(d)積分 20 天後的結果。圖中等值線間距為  $10^{-4}$ 。

接著，我們以  $w_k$  與  $w_l$  的比值決定擾動的非均向性：

$$\epsilon \equiv w_l / w_k \quad (10)$$

以簡單的例子說明上式：假設初始擾動之譜密度為常數，並且能譜分佈呈橢圓狀。根據上(10)式：如果擾動能譜為軸對稱分佈，則  $w_l = w_k$ ，此類型擾動的非均向性為 1；如果擾動能譜在  $k$  方向分佈較分散(東西扁平狀)，則  $w_l > w_k$ ，此類型擾動能譜的重心貼進  $k$  軸，其非均向性小於 1；如果擾動能譜在  $l$  方向分佈較分散(南北拉長狀)，則  $w_l < w_k$ ，此類型擾動的能譜的重心貼進  $l$  軸，非均向性大於 1(圖 3)。

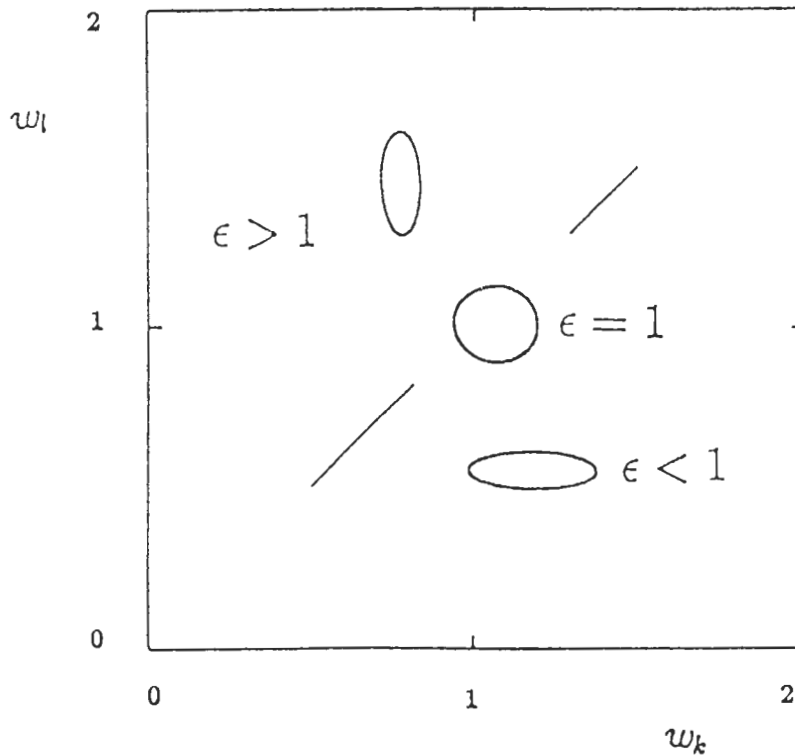


圖 3 各種橢圓擾動所對應之非均向性的示意圖。圖中橢圓表擾動位渦場的幾何形狀；在此擾動之非均向性  $\epsilon \equiv w_l / w_k$ ，其中  $w_l$  與  $w_k$  如(9)式，為初始擾動能譜之加權重心。

接著我們根據(8)式，調整  $x_0^2 / y_0^2$  的值製造各種空間平均尺度相同，但能譜不同的初始擾動(A-I)，這些擾動的非均向值( $\epsilon$ )如表二所示。圖 4 是上面擾動在穿越魔子過程，擾動能量的演變情形。從圖可發現對於均向性大於 1 之擾動，擾動能量隨時間增加；非均向性小於 1 之擾動，能量隨時間逐漸減少；等於 1 之擾動，能量則幾乎維持常數。

從穩定度的觀點，上面的結果表示：對於非均向性大於 1 ( $\epsilon > 1$ ) 的擾動，擾動在穿越魔



表二 各種非均向性( $\epsilon$ )之擾動在魔子演變過程，其能量改變之比較。表中  $E$  與  $E_0$ 、分別表積分 120 時及初始之擾動能量。

type	A	B	C	D	E	F	G	H	I
$\epsilon$	1.0	1.12	2.79	0.36	4.33	0.22	1.93	0.52	1.02
$E/E_0$	1.0	1.1	1.62	0.46	1.69	0.67	1.44	0.84	1.04

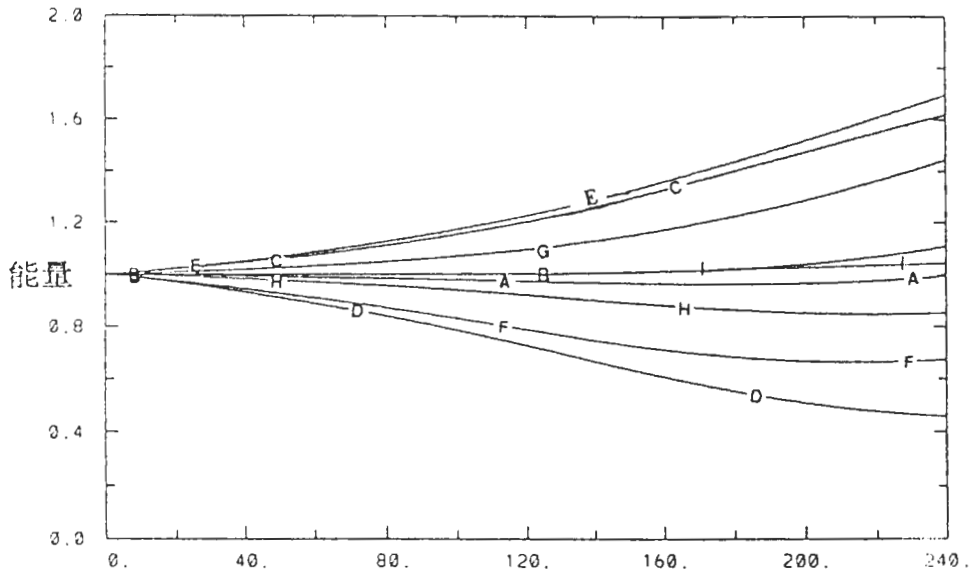


圖 4 不同能譜之初始擾動，穿越魔子過程中，其能量變化的比較。

子過程會吸收基本場的能量，若其能量夠大時便可能破壞魔子結構，亦即這類型的擾動是不穩定的；但非均向性大於 1 ( $\epsilon > 1$ ) 的擾動恰好相反，魔子會吸收擾動的能量，魔子偶極結構不受擾動影響。因此，從以上實驗歸納得到：對於平均尺度相同但能譜不同之擾動， $\epsilon = 1$  是穩定與否的分界，當擾動之  $\epsilon > 1$  為不穩定類型；小於 1 ( $\epsilon < 1$ )，擾動能量逐漸減少為漸近穩定；等於 1 ( $\epsilon = 1$ ) 為中性穩定(圖 5)。

#### 四、瞬變渦流的初期演變

上面實驗主要比較各種擾動之非均向性與穩定度的關係，下面將回到原始的問題，即瞬變渦流在在魔子的演化屬於何種類型？

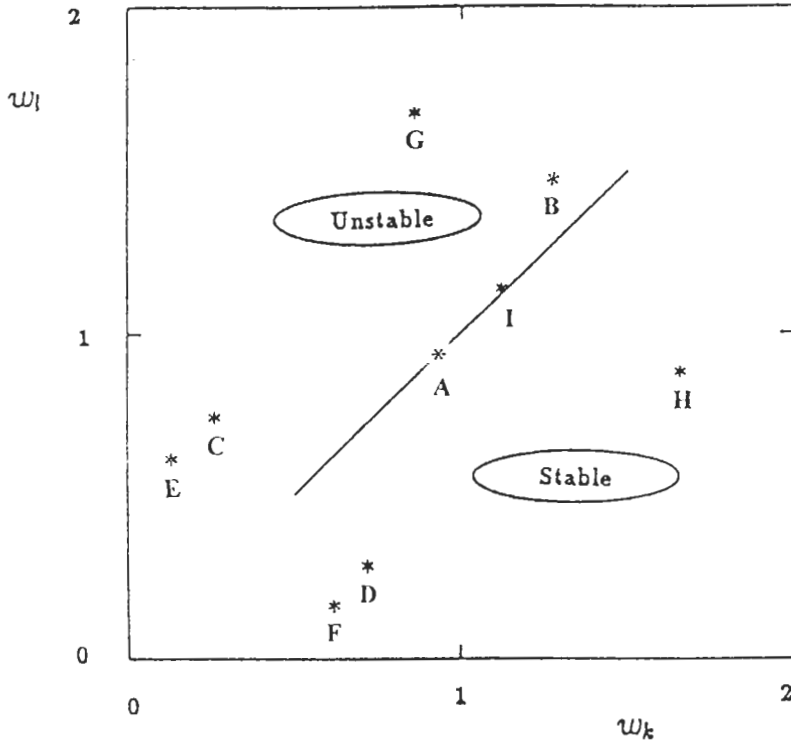


圖 5 各種初始擾動的穩定度分類。圖中落在 Stable 區域者表穩定類型，落在 Unstable 區域者表不穩定類型擾動；在此穩定表擾動穿越魔子後能量減少，不穩定者表擾動能量增加，縱軸( $\omega_l$ )與橫軸( $\omega_k$ )如(9)式。

在此，瞬變渦流所指的是週其介於 2-10 天的高頻擾動。從風暴路徑(storm tracks)上某固定基點(base point)所做的一點統計相關分析(Wallace 等 1988)，我們可以瞭解瞬變渦流的幾何特徵，其渦度場大致如下(Shutts, 1983)：

$$q'(x,y) \propto \begin{cases} \sin[\pi(x-x_1)/D_x] * \cos[3\pi(x-x_1)/D_x] * \sin(\pi(y-y_1)/D_y) & \text{for } x_1 < x < x_2 ; y_1 < y < y_2 \\ = 0 & \text{else} \end{cases} \quad (11)$$

其中  $D_x = x_2 - x_1$  ;  $D_y = y_2 - y_1$ ，分別表擾動在  $x$  與  $y$  方向的分佈範圍。圖 6.a 左半側便是瞬變渦流之流函數場。下面我們將模擬此擾動在魔子的演變。

**(一)線性實驗**

首先假設擾動振幅是無限微小，積分(7)式。圖 6.a-f 是(7)式積分 120 小時，瞬變渦流之流函數的演變。由流函數演變得知：在積分初期(圖 6.a-c)，瞬變渦流主要向東平移，當擾動進入魔子分流後(約 72 小時)，魔子分流發生作用，擾動流函數逐漸產生南北拉伸現象(圖 6.d)，此變形現象在積分 96 小時後最明顯，擾動之流函數因分流變形已分裂成南北二支(6.e 圖)；當擾動穿越魔子後(120 小時)，在魔子下游合流處產生匯合(圖 6.f)。

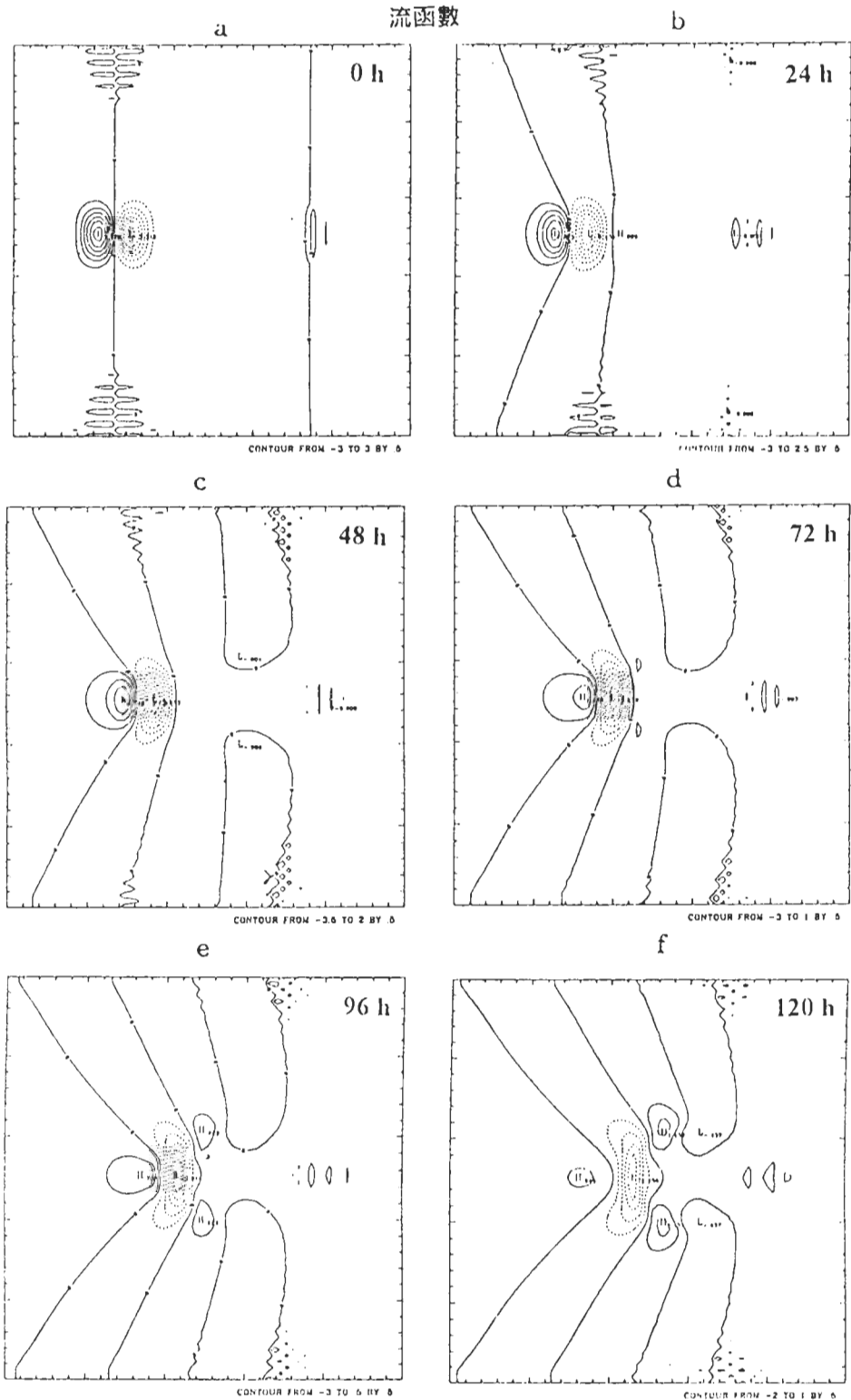


圖 6 瞬變渦流在魔子初期演變之數值模擬，圖中為線性系統[(7)式]的結果。(a)為初始擾動場之流函數，(b)為積分 24 小時，(c)為積分 48 小時，(d)為積分 72 小時，(e)為積分 96 小時，(f)為積分 120 小時的結果。圖中流函數的數值已經過無因次化，等值間距為 0.5。

## 1. 能譜分析

爲了進一步瞭解擾動接近魔子時，擾動流函數南北拉伸的現象，我們在波譜空間沿著擾動能譜作橫切面，分析能譜演變，令：

$$\hat{q}_k^i = \sum_l \hat{q}^i(k, l) \quad (12)$$

上式  $\hat{q}_k^i$  表擾動渦度場沿  $k$  方向之能譜密度。因爲波譜係數具有共軛的性質 ( $\hat{q}_k^i(k, l) = \hat{q}_k^i(k, -l)$ )，在積分(12)式時，我們僅考慮波譜平面的右半區域(即， $l=0, 32$ )。

圖 7 是  $\hat{q}_k^i$  的時間演變。圖中標記( $t=0$ )曲線表初始能譜，標記( $t=24$ )者表示積分 24 小時後的結果，其它以此類推。比較各能譜曲線發現：隨時間演進，能譜曲線的極大值有遞減的趨勢，並逐漸往小尺度遞送(cascade)。

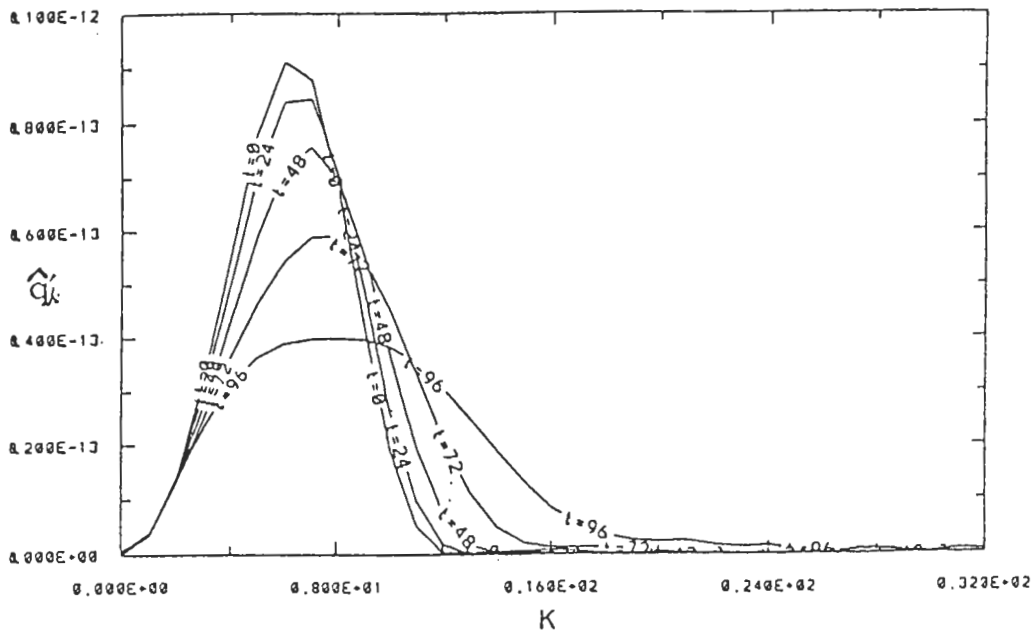


圖 7 瞬變渦流在穿越魔子過程中，擾動渦度場之能譜分佈曲線[(12)式]的時間變化。圖中曲線數值分別表積分時間(小時)的輸出結果，曲線數值已經過初始值正則化。

上面現象可以如下解釋：追蹤一個封閉的物質線(material line)，或流函數線。由於系統環流保守，根據 Kelvin 理論物質線的演化就是質點軌跡。又因爲系統非幅散，此封閉曲線在變形過程，曲線所包圍的面積維持不變。當此封閉曲線接近魔子時，受魔子分流的變形南北拉伸結果，東西向的截距勢必縮短，在波譜空間所反應的便是，能譜密度  $l$  值變小， $k$  值變大。

表三 擾動渦度場能譜[(12)式]之極大值的時間演變。

時間 (小時)	$\hat{q}_k$ ( $\times 10^{-14}$ )	$\Delta \hat{q}_k$ ( $\times 10^{-14}$ )
0	9.1	/
24	8.4	0.7
48	7.6	0.8
72	5.9	1.7
96	4.0	1.9

表三是  $\hat{q}_k$  曲線之極大值隨時間的變化。由表得知，能譜曲線之極大值，不但隨時間逐漸減小，並且遞減速率有增大的趨勢。

## 2. 能量收支

將(7)式乘以  $\varphi'$ ，結合高斯定理，作全場積分得到：

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \iint \varphi' J(\bar{\varphi}, q') dx dy \quad (13)$$

上式即擾動能量收支方程，其中 E 表擾動能量。圖 8 是擾動能量趨勢的時間演變，由圖顯示：積分期間擾動能量之變化趨勢皆為負值，表示擾動能量逐漸減少。對照流函數的演變(圖 6)，當擾動流函數分裂為二時(圖 6.c)，擾動能量的減少率最大，此時，擾動能量輸往基本場的速率最大。

## 3. 積分守恆量

從擾動的流函數或演變或能量變化皆顯示，當瞬變擾動穿越魔子時，擾動能量是減少的，但其變化量並非任意，而是受到一些限制。若將(7)式乘  $q'$ ，然後作全場積分，得到：

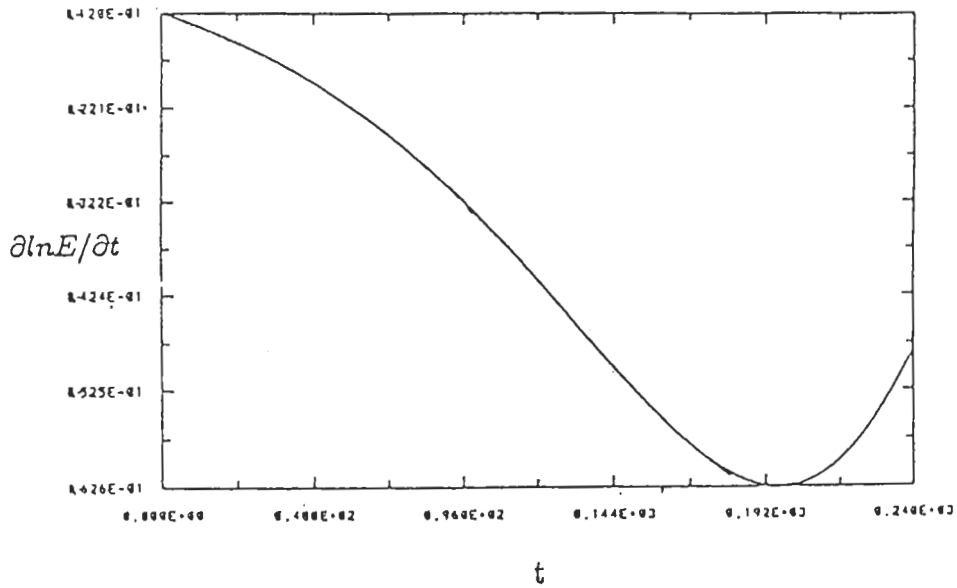


圖 8 同圖 7，但為擾動能量變化率[(13)式]之時間演變。圖中縱軸表擾動能量變化率( $\frac{\partial \ln E}{\partial t}$ )，橫軸為時間序列(時間間距為 30 分鐘)。

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \iint -q' J(\varphi, \bar{q}') dx dy \quad (14)$$

上式即擾動渦動能的收支方程，式中  $F = \frac{1}{2} \iint q'^2 dx dy$  表擾動之渦動能。將上式乘以  $(d\bar{\varphi} / d\bar{q})$

加上(13)式得到：

$$\begin{aligned} \frac{\partial(E + d\bar{\varphi} / d\bar{q} F)}{\partial t} &= \iint \varphi' J(\bar{\varphi}, \varphi') - \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{q}} q' J(\varphi', \bar{q}) dx dy \\ &= \iint q' J(\varphi', \bar{\varphi}) - q' J(\varphi', \bar{\varphi}) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (15)$$

對魔子而言，基本場的流函數與位渦度為線性相關( $d\bar{\varphi} / d\bar{q}$  為常數)，上式告訴我們：對線性系統[(7)式]，擾動動能加上擾動渦動能之常數倍( $d\bar{\varphi} / d\bar{q}$ )是守恆量。亦即，擾動在演化過程，能量與渦動能之變化所受的限制。圖 9 是  $E + (d\bar{\varphi} / d\bar{q}) F$  的演變，由圖得知擾動在演化過程  $E + (d\bar{\varphi} / d\bar{q}) F$  為守恆量。我們也可以從擾動在相平面的演化軌跡瞭解此特性。圖 10 是擾動在相平面的演化軌跡，在此，相平面是由擾動能量與渦動能所張成，圖中箭頭指向表演化方向。由於魔子基本場之流函數與位渦度為線性相關( $d\bar{\varphi} / d\bar{q}$  為負常數)，在  $E + (d\bar{\varphi} / d\bar{q}) F$  守恆的限制下，擾動的能量與渦動能必需同時減少(增加)，所以演化軌跡為逐漸向魔子(基本場)收斂的直線。

## (二)非線性碰撞實驗

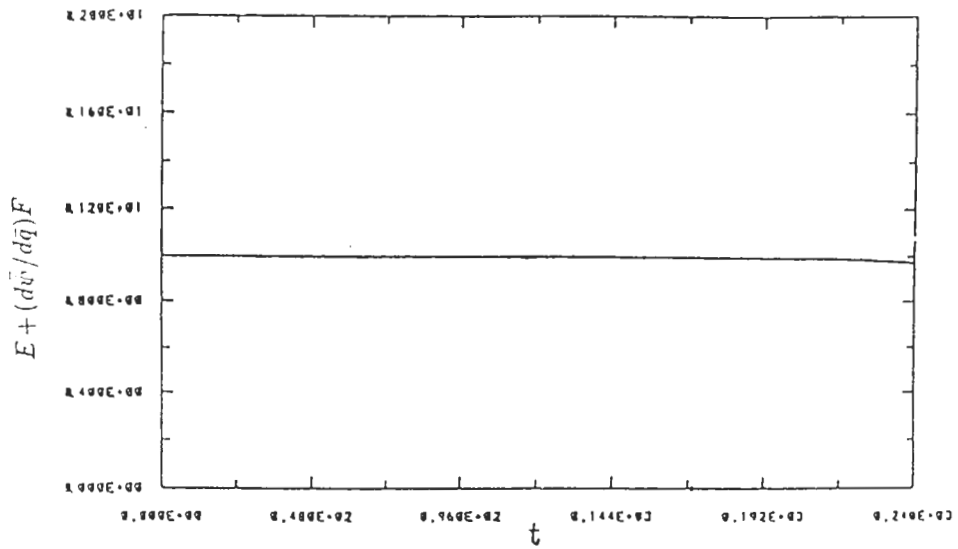


圖 9 瞬變渦流在穿越魔子過程中，系統積分量  $E + (d\bar{\varphi}/d\bar{q})F$  的時間演變。其中  $E$  表擾動能量， $F$  表擾動之渦動能， $d\bar{\varphi}/d\bar{q}$  為魔子之流函數與位渦度的比值。圖中橫軸表時間(時間間距為 30 分鐘)，縱軸為經過初始值正則化之值。

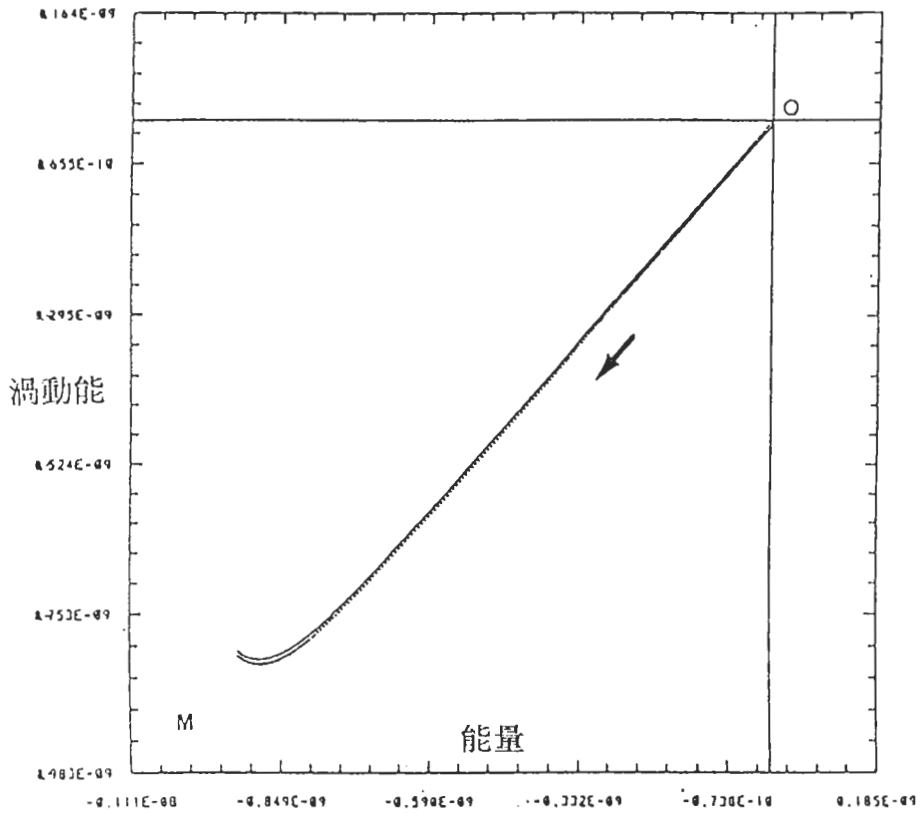


圖 10 同圖 9，但為瞬變渦流在相平面的演化軌跡。在此，相平面為擾動能量與渦動能所張成的平面，圖中箭頭指向表軌跡演化方向，"M" 記號表魔子的位置。

## VORTICITY

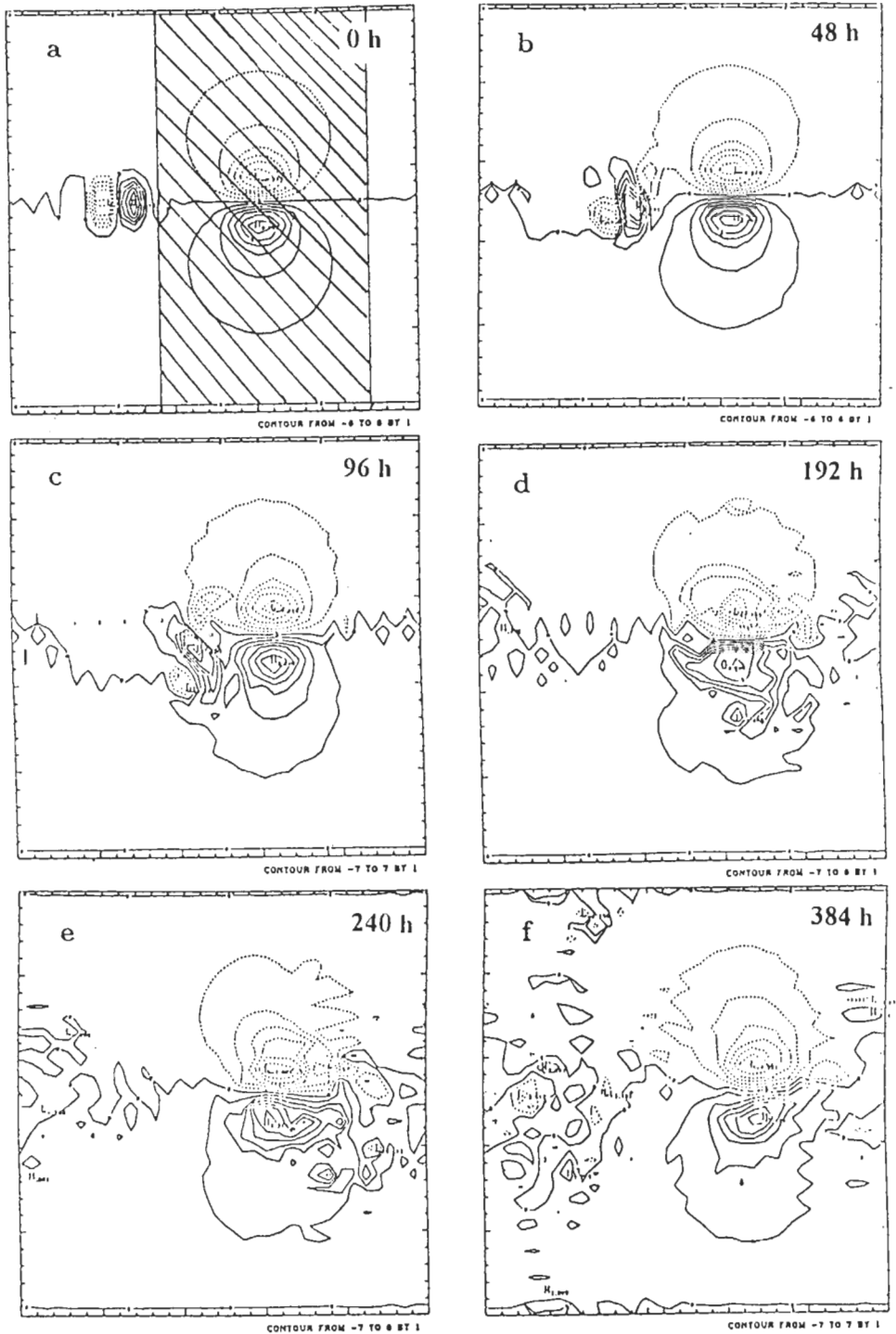


圖 11 瞬變渦流與魔子非線性碰撞[(6)式]之數值模擬，圖中為系統全位渦場(魔子位渦度與擾動位渦度的和)之演變。(a)表初始位渦場，(b)為積分 48 小時，(c)為積分 96 小時，(d)為積分 192 小時，(e)為積分 240 小時，(f)為積分 384 小時的結果。圖中等值線數值已經過無因次化，等值線間距為 1。



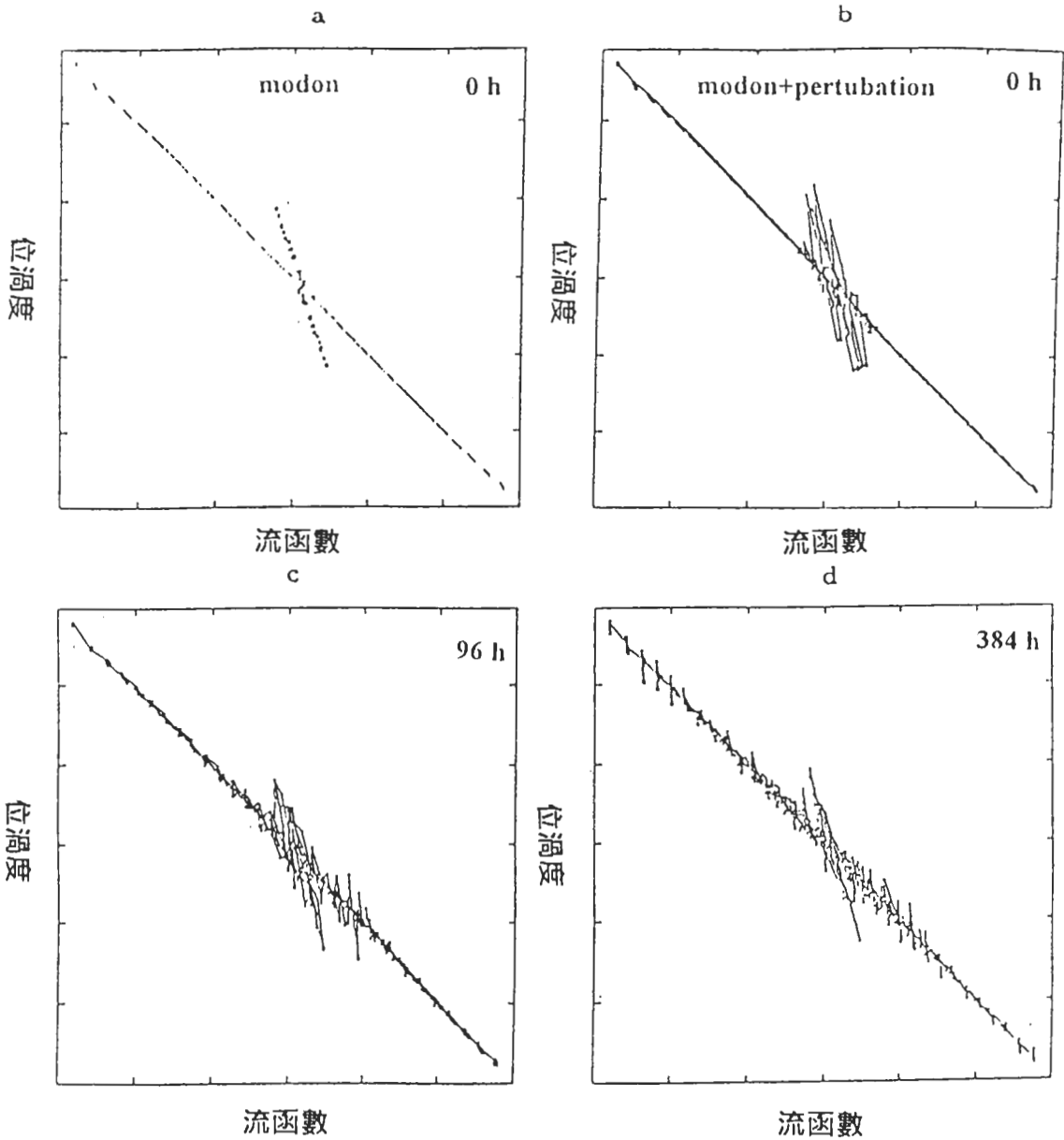


圖 12 同圖 11，但為系統之全位渦度與流函數之散佈圖。(a)未加入擾動前，系統(魔子)之流函數與位渦度呈線性負相關，圖中斜率較小(陡)者表魔子內部區域，斜率較大者表魔子外部區域，(b)加入擾動後的結果，(c)為當擾動進入魔子分流，(d)為擾動穿越魔子後的結果。從(a)-(d)的變化可發現，瞬變渦流與魔子在碰撞過程，雖然擾動會減弱魔子之流函數與位渦度線性的關係，但因為瞬變渦流為穩定型的擾動，所以當擾動穿越魔子後，魔子內部區域之流函數與位渦度仍維持線性的關係，魔子結構並沒有破壞。圖中位渦與流函數的數值皆已經過無因次化。

由於觀測得到，瞬變渦流的振幅與阻塞高壓幾乎是相同數量級。下面的時實驗將調整瞬變渦流的振幅，瞭解擾動振幅大對魔子穩定度的影響。

圖 11. a-f 是在魔子加入與其相同振幅之擾動後，系統全位渦場的演變。與線性實驗(圖 6)比較，二者最大的差異是：在線性實驗，因擾動振幅無限微小，魔子分流場幾乎不受擾動影響，擾動受基本場分流影響，南北拉伸的現象較顯著；在非線性的實驗，因為擾動振幅與基本場相當，可以直接影響分流場，南北分裂的現象較不明顯(圖 11. c)。

若單從流函數的變化，會誤以為魔子被一些振幅較大的擾動撞擊後，形狀產生劇烈變化，偶極結構可能因此破壞(圖 11. e-f)。但從魔子流函數與位渦度散佈圖(圖 12)的變化顯示：當擾動穿越魔子後，魔子流函數與位渦度仍具線性相關，魔子偶極結構並沒有被擾動破壞。

如果將模式積分範圍區分為魔子區(11. a 圖中斜線部分)與非魔子區，假設系統總能量為  $E_{total}$ ，魔子區的能量為  $E_m$ ，非魔子區域之能量為  $E_{total} - E_m$ ，因為系統總能量保守，此量的變化等於擾動能量的改變，或  $\partial(E_{total} - E_m) / \partial t = -\partial E_m / \partial t$ 。魔子區的能量收支如下：

$$\partial E_m / \partial t = -\nabla \cdot VE \tag{16}$$

上式，VE 表能量通量，V 表二維速度向量。

圖 13 是不同區域範圍之能量的時間演變。從圖得知，當擾動穿越魔子後，魔子區之能

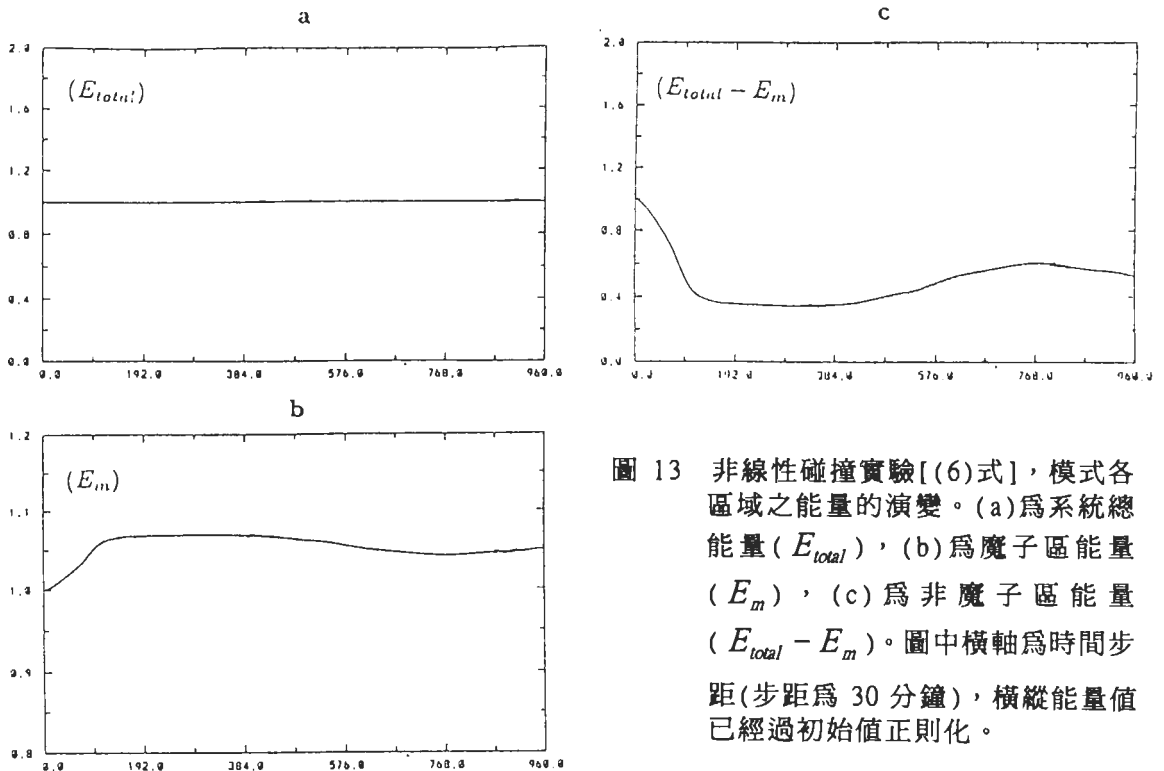


圖 13 非線性碰撞實驗[(6)式]，模式各區域之能量的演變。(a)為系統總能量 ( $E_{total}$ )，(b)為魔子區能量 ( $E_m$ )，(c)為非魔子區能量 ( $E_{total} - E_m$ )。圖中橫軸為時間步距(步距為 30 分鐘)，橫縱能量值已經過初始值正則化。

量增加(約增加 5%)，魔子以外區域之能量則逐漸減少(約減少 60%)。由於擾動穿越魔子後能量減少，表示當瞬變擾動的振幅與魔子相當時，瞬變擾動仍為穩定類型的擾動；即，在魔子偶極結構仍能維持的情況下，魔子吸收擾動的能量。

如果繼續調高擾動的振幅，當擾動的振幅超過某一極限時，結果卻迥然不同。圖 14 是比較不同振幅之瞬變擾動，非魔子區之能量的時間變化。由圖得知：當擾動振幅逐漸增大，擾動與魔子的交互作用逐漸加強。當擾動之振幅與基本場等數量級時，擾動與基本場的能量交換速率達最大值。但是，當擾動振幅太大超過基本場時，結果與 McWilliams & Zabusky(1982) 碰撞實驗非常相似，在碰撞過程，擾動與基本場則幾乎沒有能量交換，擾動與魔子碰撞後，各自保持原狀。

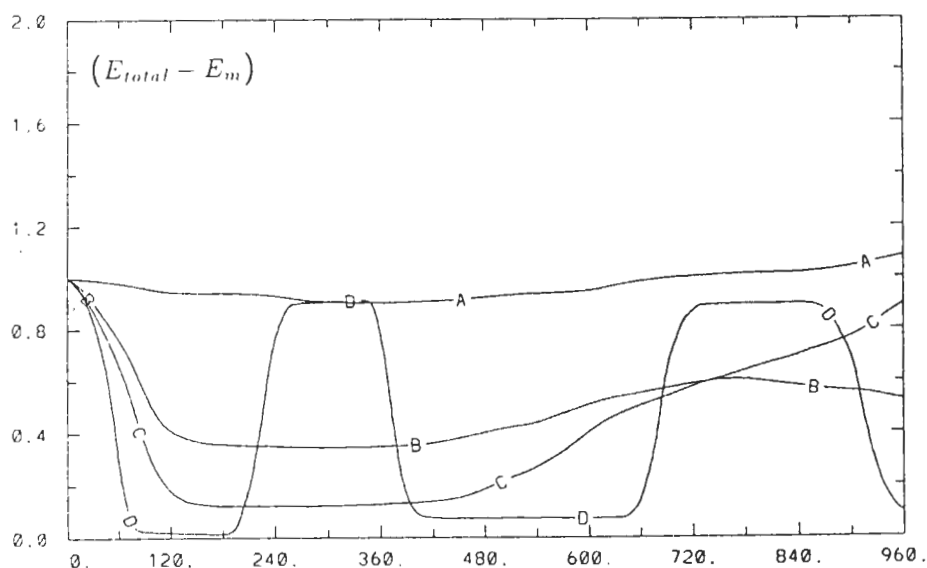


圖 14 同圖 13.c，但為不同振幅之擾動的比較。曲線 A 表擾動之振幅與魔子振幅的比值為 0.1，曲線 B 為 0.5、曲線 C 為 1、曲線 D 則為 4。

## 五、討論與結論

本研究我們以數值方法比較各種能譜之初始擾動在魔子中演變的差異，並瞭解瞬變渦流在魔子之初期演變，根據前面結果我們作以下的結論：

1. 非均向性的數值實驗得到，魔子的穩定度與擾動非均向性密切有關，對具有相同均向平均尺度之擾動，如果非均向性大於 1 ( $\epsilon > 1$ ) 為不穩定；小於 1 ( $\epsilon < 1$ ) 為漸近穩定；等於 1 ( $\epsilon = 1$ ) 為中性穩定。

2. 瞬變擾動之數值實驗得到，瞬變渦流在魔子之初期演化為漸近穩定。
3. 擾動之振幅大小與基本場的能量交換有關，當瞬變擾動之振幅與魔子之振幅相當時，擾動能量輸往魔子的速率最大。

從實驗我們發現，當擾動穿越魔子分流場，流函數南北拉伸之現象並非穩定的充分條件，初始擾動之能譜必需具有某種性質，才能與魔子發生能量轉換，並且將能量輸往基本場。結合文中對初始擾動之非均向性的定義(10式)，我們證明瞬變渦流屬於穩定類型的擾動，在穩定的條件下，魔子分流場提供一個有效的變形環境，可以快速地吸收瞬變渦流的能量，維持阻塞。

動力上而言，摩擦作用會破壞魔子結構(Stern,1975)。本實驗雖然不考慮摩擦效應，但結果與 Marshall & Haines(1987)，Shutts(1983)等研究是一致的；即，當阻塞吸收擾動的能量足以平衡摩擦消散時，魔子區域平衡的結構才能維持。

本研究與 Pierini(1985)、Swaters(1986)研究主要異同是：皆以系統積分守恆量分析魔子穩定度。但我們發現魔子穩定度除了與初始擾動之平均尺度有關，更決定於初始擾動之能譜(非均向性)，即使初始擾動在空間尺度上滿足穩定的條件，但不同的能譜分佈仍有截然不同的演化結果。

文實驗與 Shutts(1983)、Haines & Marshall(1987)等實驗亦有很大的不同。Shutts等並沒有分析魔子穩定度，僅討論高頻擾動的渦度通量(potential vorticity flux)，對維持阻塞的重要性。但本實驗則找出穩定的條件，證明週期 2-10 天瞬變擾動是穩定類型的擾動，在魔子結構能維持的情況下，高頻擾動才能有效率的將能量輸往基本場。

擾動能量的收支顯示，擾動在穿越魔子過程，能量並非等速遞減。擾動接近魔子分流時，與基本場之能量交換速率逐漸增強，在進入阻塞分流時達最大值。從擾動的能量收支估計，積分初期，瞬變渦流之能量近乎線性率遞減，進入分流後則以時間更高次項(大於二次方)減弱(圖 15)。

在非線性實驗顯示，擾動的振幅大小與穩定度亦有直接的關係。對穩定類型之擾動，振幅太小或太大的擾動，對阻塞的維持都無太大的作用，只有當擾動與基本場振幅相當時，擾動才能發生最大的效果。然此結論則有待進一步的資料佐證。

## 致 謝

本文在國科會自然處支助 NSC-80-0202-M002-015 計畫下完成。特別感謝評審委員的建議與指正。

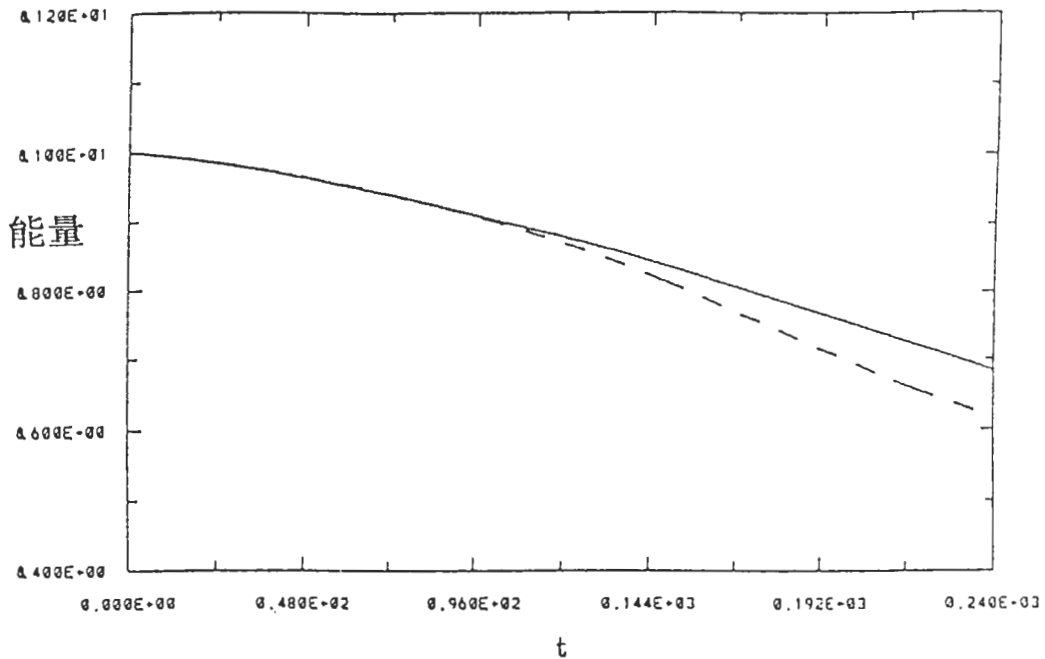


圖 15 同圖 6，但為瞬變渦流之能量的演變。圖中實線為數值模擬的結果，虛線表以線性迴歸估計擾動能量收支方程[(13)式]的結果。圖中橫軸為時間步距(步距為 30 分鐘)，能量值已經過初始值正則化。

## 參考文獻

- 洪志誠、林和, 1994: 阻塞研究: 第一部分, 魔子穩定度之分析。大氣科學, 16, 117-132。
- Butchart, N., K. Haines and H. C. Marshall, 1989: A theoretical and diagnostic study of solitary waves and atmospheric blocking., *J. Atmos. Sci.*, 46, 2063-2078.
- Dole, R. M., 1983: The life cycles of persistent anomalies and blocking over the Northern Pacific. *Adv. Geophys.*, 29, 31-69.
- Farrel, B., 1982: The initial growth of disturbances in a baroclinic flows. *J. Atmos. Sci.*, 39, 1663-1686.
- Haines, K., and J. Marshall, 1987: Eddy-forced coherence structures as a prototype of atmospheric blocking. *Q. J. R. Met. Soc.*, 113, 681-704.
- Holopainen, E., and C., Fortelius, 1987: High-Frequency transient eddies and blocking. *J. Atmos. Sci.*, 44, 1632-1645.
- Illari, H. and J. C. Marshall, 1983: On the interpretation of eddy fluxes during a blocking episode. *J. Atmos. Sci.*, 40, 2232-2242.
- , 1984: A diagnostic study of the potential vorticity in a warm blocking anticyclone. *J. Atmos. Sci.*, 41, 3518-3526.

- Leith, G. E., 1983: Minimum enstrophy vortices. NCAR Ms. 0502/83-2.
- Malanotte-Rizzoli, P. and P. J. Hancock, 1987: Coherent structures in a baroclinic atmosphere. Part IV: A comparison between theory and data. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 2506-2529.
- Malguzzi, P. and P. Malanotte-Rizzoli, 1984: Nonlinear stationary Rossby waves on nonuniform zonal winds and atmospheric blocking. Part I: The analytical theory. *J. Atmos. Sci.*, **41**, 2620-2628.
- McWilliams, J. C., 1980: An application of equivalent modons to atmospheric blocking. *Dyn. Atmos. Oceans*, **5**, 43-66.
- , 1981: Numerical studies of barotropic modons. *Dyn. Atmos. Oceans*, **9**, 237-280.
- and N. J. Zabusky, 1982: Interactions of isolated vortices. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics*, **19**, 207-227.
- Metz, W., 1986: Transient cyclone scale vorticity forcing of blocking heights. *J. Atmos. Sci.*, **43**, 1467-1483.
- Mullen, S., 1987: Transient eddy forcing of blocking flows. *J. Atmos. Sci.*, **44**, 3-22.
- Pierini, S., 1985: On the stability of equivalent modon. *Dyn. Atmos. Ocean.*, **9**, 237-280.
- Shutts, G. T., 1983: The propagation of eddies in diffluent jet streams: eddy vorticity forcing of blocking flow fields. *Q. J. R. Met. Soc.*, **109**, 737-761.
- , 1986: A case study of eddy forcing during an Atlantic blocking episode. *Adv. Geophys.*, **29**, 135-161.
- Stern, M. E., 1975: Minimal properties of planetary eddies. *J. Mar. Res.*, **33**, 1-13.
- Swaters, G. E., 1986: Stability conditions and a priori estimates for equivalent barotropic modons. *Phys. Fluid*, **29**, 1419-1422.
- Wallace, J. M., G.-H. Lim, and M. L. Blackmon, 1988: Relationship between cyclone tracks, anticyclone tracks and baroclinic waveguides. *J. Atmos. Sci.*, **45**, 439-462.

## **Blocking Study --- Modon Stability Part II : Numerical Experiments**

**Chi-Cherng Hong      LinHo**

**Department of Atmosphere Sciences , National Taiwan University**

### **ABSTRACT**

This paper is the second part of blocking studies. Assumed the flow is without external force and frictionless , we designed numerical experiments and chose some integral conserved quantity to investigate the effect of anisotropy of transient disturbances on stability ( the anisotropy , measured by a parameter  $\varepsilon$  defined by the ratio of the weighting spectrum of disturbances in the l direction to k direction in the spectrum space , see Eq. 10 ). We also examine the evolution of eddies embedded in a modon-like base state.

The amplitude of perturbation are assumed to be infinitesimal , the linearized model gave results that if the disturbances are highly anisotropy in the way that  $\varepsilon > 1$ , they become unstable , if the disturbances tilting to the other direction that  $\varepsilon < 1$  , they are asymptotically stable , when the disturbances are isotropic that  $\varepsilon = 1$  , the flow stays neutral.

From the definition of the anisotropy ( ie,  $\varepsilon$  ) of transient eddies is about 0.4, and the linearized run gives results identical to those predicated by stability analysis. The numerical simulations prove that the transient eddies is asymptotically stable. The diffluent flow of modon supports a environment when transient eddies past the diffluent section, the perturbed wave packets are broken into south and north branches, and loss energy to the base flow.

When the amplitude of perturbation is about equal to the amplitude of modon, the nonlinear runs show that the the interaction between perturbations and modon reaches a peak. In the beginning the perturbed energy decreases linearly. When the eddies enter the diffluent area , the loss of perturbed energy accelerates, the decrease of energy fits a t-squared curve.

**Key words: Integral conserved quantity, anisotropy, modon, transient eddy, asymptotically stable.**