

大氣運動的隨機方程式形式

林 和 潘宗明

國立台灣大學大氣科學系

(中華民國七十七年六月一日收稿；八月三十一日定稿)

摘 要

在探討氣候問題時，我們將重點放在大氣運動的統計性質上。從觀察得知數天內的天氣變化，在氣候平均值上下跳動極不規則。可以說，大氣的運動有兩種基本特色，微觀上類似隨機，巨觀上則保持統計平衡，這樣的性質恰好是一個Langevin方程所描述系統的表現。本文嚐試利用一個AR process把大氣實際觀測的資料寫成一個Langevin方程的差分形式，結果顯示Langevin方程表現了非常接近實際大氣的低階統計性質，至於更高階的統計性質如歪度(skewness)，隆度(kurtosis)，我們發現當自相關增加解析度，即採高階之AR process時，高階統計量對大尺度運動的影響較大。另外，對應到二維紊流EDM模式，Langevin方程式的兩種性質背後的動力機制正是非線性交互作用，於是，由觀測資料寫出的Langevin方程可供方程式封閉(closure)理論參考之用。

關鍵詞：非線性交互作用，蘭吉汶方程式，FGGE資料，自迴歸過程。

一、前言

大氣運動的控制方程式是一組複雜的非線性方程，不容易求得解析解。通常我們將氣象變數對一個正交基底(orthogonal base)展開時，可以得到各個模(mode)振幅隨時間變化之關係式，而原來方程式中的非線性項促成了不同模間之能量交換，這種錯綜複雜的非線性交互作用使得大氣運動表現了相當的隨機性，觀察每個模振幅的時間序列，在幾天之內振幅即可能有很大的跳動，但是就長時期的變化來看，非線性之能量交換發揮了它的另一種作用——使大氣的運動趨向一個統計平衡態，而使地球氣候保持數百年或數千年的穩定值。

考慮某個模隨時間的演變，在微觀上雖然方程

式為deterministic，但是變因的龐大自由度，使這個必然的變化顯得難以掌握。對於氣候動力學及一般氣候模式研究，只需要知曉其低階的統計性質(也就是說，它的細節不值得預測或計算)，這時候我們原來的方程式即顯得煩瑣浪費。如果只需要考慮兩項重點：微觀上的紊亂及巨觀上的低階統計性質(如自相關與能譜)，將系統的非線性項由一項隨機力(random forcing)取代，方程式可以大量簡化。但單是考慮一個“隨機力”的作用時，並不能兼顧到系統在統計上的特性。它使系統狀態的演變呈現一種毫無限制的“擴散”，於是必須同時考慮一個回復力(restoring force)以相抗衡——當系統偏離統計平衡態時，這個回復力將發揮作用，把系統拉回平衡態。如果這樣一個簡

化的隨機系統能具有與原系統相同之統計性質，則不同系統的動力將表現在統計性質中，也於是表現在隨機力與回復力的調適上。

對大氣運動而言，微觀變化相對於天氣變化，則其統計性質就是“氣候”了。也就是說，著眼於氣候問題時，有意忽略短期天氣上的微觀變化，我們要知道的是原來複雜的非線性方程式，是不是可以用一個較簡化的隨機方程式 (stochastic equation) 來取代它？本文將嚐試用實際資料來寫出這種隨機方程式。

Gambo (1981) 曾經把準地轉渦度方程，寫成一個 Langevin 方程式 (見第二節)，用以解釋超長波 red variance 的統計性質。結果他把 Langevin 方程式中的消散項取為 Ekman pumping，大大違反了非線性作用中趨向統計平衡的不可逆特性，紊流理論很早就發現 (Kraichnan, 1959)，由正壓渦度方程出發，直接推導其統計性質，經過方程式的封閉 (closure) 後，非線性項一分為二，並發現若原系統以一個 Langevin 方程取代，則不須再經其它假設，可以得到完全相同之統計性質。

本文嚐試經由觀測資料的統計性質，藉統計上一個 AR process 的表示法直接寫出 Langevin 方程，並經由與解析紊流模式之比較，討論非線性兩部份作用之性質。

第二節中我們將介紹 Langevin 方程及其物理意義。第三節概述二維紊流的 EDM (Eddy-damped Markovian) 模式，Langevin 方程的物理意義在這裡將再度顯現出來。第四節為寫 Langevin 方程的數值方法，即 AR process。第五節資料處理及結果分析。第六節為結論。

二、Langevin 方程式

(一) Langevin 方程式

考慮一個物理空間中作一維運動的質點，在 x 方向上受到一個力的作用，方程式表示為

$$dv/dt = f = \text{const.}, \quad v = dx/dt$$

若以質點的動量(v)及其所在位置(x)為軸之相位空間來描述這個系統，(相位空間上的任一點表示系統的一個狀態，其軌跡則為系統狀態隨時間的演變)，一旦我們知道某個時間系統出現在相位空間上的位置，就能根據運動方程式準確的劃出其軌跡(知道其任何時間的物理狀態)。如果把大氣這個非線性系統對一個正交基底展開，通常各個模為軸之相位空間擁有接近無限多的自由度，各個模的運動並非獨立進行，各模間有複雜的能量交換作用，這使得相位空間上質點運動的軌跡難以捉摸，對這樣的系統最好採用統計方法來作描述，把相位空間分成無數的小區域，計算質點出現在各區域的機率。或設想在相空間某個小區域放入很多初始狀態接近的質點，這堆質點將會隨著時間逐漸擴散開來。(Gleeson, 1970, 所用簡單的一維平流方程，就具有這種性質)。當 $t \rightarrow \infty$ 時，這個系統會達到一個統計平衡態，這個平衡態與初始狀態質點所在的位置無關，這種過程稱為不可逆緩和 (irreversible relaxation)。這時候，雖然每個質點依然有個別的運動軌跡，但在一片有限次元的區域內，質點出現的機率是不變的。對這種擴散運動，我們用下列隨機方程式來取代原始方程式：

$$dv/dt = f(t) \quad (2.1)$$

$f(t)$ 為隨機力

$$\langle f(t)f(t') \rangle = F \delta(t-t')$$

其中 $\delta(t-t')$ 為 Dirac delta function, 有

$$\int g(t)\delta(t-t')dt = g(t')$$

表示不同時間的 $f(t)$ 完全沒有相關，而其平均方差為 F 。對上式 (2.1) 取集平均 (ensemble average) 可以得到

$$d\langle v \rangle / dt = \langle f(t) \rangle = 0, \quad \text{於是}$$

$\langle v \rangle = \langle v_0 \rangle$ 不論經過多少時間系統狀態依然不變，這種情形使不可逆過程難以達成。所以一部分 f 必須和 v 直接有關，這部分 $f(v)$ 用泰勒展開式展開，採取第一階非零項，即

$$f(v) = -\lambda v, \quad \lambda > 0$$

於是必須在方程式中加入一個消散項，變成

$$dv / dt + \lambda v = f(t)$$

$$\langle f(t)f(t') \rangle = F \delta(t-t') \quad (2.2)$$

其中 $\lambda > 0$

此即所謂的Langevin方程式，其所描述的低階統計性質可由方程式的解直接求出。

(一) 統計性質

當我們描述一個系統的統計性質時，除了相位空間上的機率密度函數外，最基本的可能是描述其變化範圍（能譜、方差）及其如何隨時間變化（自相關）。下面我們來看看Langevin方程描述的系統有怎樣的自相關與方差。

由(2.2)式可解得

$$V(t) = V_0 e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-t')} f(t') dt'$$

V_0 為初始值

取集平均得

$$\langle V \rangle = V_0 e^{-\lambda t} \rightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

$\langle \rangle$ 表集平均

其中 $\langle f(t) \rangle = 0$

乘 $v(t+\tau)$ 再取集平均則

$$\langle v(t)v(t+\tau) \rangle = V_0^2 e^{-2\lambda t} e^{-\lambda\tau} + e^{\lambda\tau} (F/2\lambda) (e^{-2\lambda\tau} - e^{-2\lambda t})$$

當 $t \rightarrow \infty$ 時， $e^{-2\lambda t} \rightarrow 0$ 則，

$$\langle v(t)v(t+\tau) \rangle = (F/2\lambda) e^{-\lambda\tau} \quad (2.3)$$

為系統平衡態之自相關函數 (auto-correlation function)，兩個時間距離無窮遠的狀態完全無關。

當 $\tau = 0$ 時

$$\langle v^2 \rangle = F/2\lambda \text{ 為平衡態之能量}$$

由上面導出的統計性質，可以看出Langevin方程描述的是一種馬可夫過程 (Markov process)，方程式右邊的隨機力隨時對這個系統產生不可預期的影響，使系統表現得如一個隨機過程，但同時方程式中的消散項 $-\lambda V$ 卻隨時依系統當時的狀況作調整，亦即系統狀態的變化 dv/dt 也決定於系統本身的狀態 $-\lambda V$ ，於是下一個時間的狀

態受到現在的狀態的影響，但是這種“記憶力”隨著 $f(t)$ 的不斷加入被逐漸沖淡，當系統到達平衡狀態時，其能量只決定於方程式中的兩個參數 λ 及 F 與初始狀態完全無關，同時自相關的指數形式也表示了系統有限的“記憶力”。

這樣的系統在短期的變化裡由於 $f(t)$ 的作用而顯得雜亂無章，但是在長時間的變化上消散項發揮了它的功能——不可逆緩和，當經過一段長時間以後，系統達到一個統計平衡態。

上面我們討論了一個Langevin方程所描述的系統的一些基本性質，如果大氣表現出來的現象正如Langevin方程的性質一般，那麼是什麼樣的動力機制使得大氣表現如此的性質呢？在下一章中，我們將從二維紊流理論的 EDM 模式來討論這個問題。

三、EDM 模式

EDM 模式最早由 Krachnan 提出，本文採取 Salmon (1981) 之討論僅作概略之描述。

(一) EDM (Eddy-Damped Markovian) 模式

考慮一個二維紊流系統，其控制方程為正壓渦度方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) = \nu \nabla^4 \psi$$

ψ 為流線函數

其中 $J(P, Q) \equiv \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial Q}{\partial x}$

ψ 以 $\nabla^2 \phi_k = -k^2 \phi_k$ 之固有函數展開

即 $\psi = \sum_k y_k \phi_k$ 原式可寫成

$$dy_k / dt = \sum_{\kappa, \iota} A_{\kappa \iota} y_\kappa y_\iota \quad (3.1)$$

考慮在慣性區段 (inertial range) 中，分子摩擦 $\nu \rightarrow 0$ ， $A_{\kappa \iota}$ 為 coupling coefficients。

今由此式求系統的統計性質，由上式可得

$$\frac{d}{dt} \langle y_k^2 \rangle = \sum A_{\kappa \iota} \langle y_\kappa y_\iota y_k \rangle$$

又 $d/dt \langle y_k y_l y_j \rangle = \Sigma \langle A B C D \rangle + \dots$
 (詳見 Salmon 1981)

其中 $\langle ABCD \rangle$ 表示 4 個模之相關，可稱 4 階統計性質。由上面的推導，可以看出， n 階統計性質的演變皆涉及 $(n + 1)$ 階性質，於是變數總比方程式要多出一個，因而產生封閉問題。EDM 模式就是在原系統的保守量（在慣性區段中總動能、enstrophy etc.）及能量不為負值的要求下解決上述封閉的問題。

EDM 引進“渦流黏滯性”（eddy viscosity），認為非線性能量傳遞具備將能量均勻分散到各尺度的作用（non-linear scrambling），這個作用（劫富濟貧）對原來含高能量的模作用為能量的抑制，可以看作是類似黏滯性（viscosity）一般，但是並不像分子摩擦把動能轉換成熱能造成系統能量的損耗，它只是把能量傳給系統中其它的模，整體而言，系統並無能量之損失，相對的原本能量少的模卻因非線性能量的傳遞獲得能量而活躍起來。設想系統中的某一個模突然獲得外來的能量（e.g. 斜壓最不穩定波，獲得由斜壓不穩定轉換而來的動能），造成能量分佈的顯著不均，這時非線性作用開始發揮它的功能，如果我們只看這一個模的演變，可能發現它在受到一個擾動後又漸漸回到原來的統計狀態，這就是所謂的“不可逆緩和”，其回到原平衡態所需的時間稱為 relaxation time，長短隨各模而異，另一方面，其它模因獲得能量而活躍起來，於是可以說系統的自由度增加了，原來的模雖在統計上有能量的損失，但事實上其它活動起來的模也會有能量傳回，這個作用來自系統中巨大的自由度，使得其影響顯得混亂。這個作用稱為隨機化（randomization）。過了一段時間以後能量分佈漸趨某種均勻狀態，非線性能量傳遞不再那麼劇烈，受擾動的模返回其平衡態，這個平衡態，是系統本身的特性與當初所受擾動大小完全無關，可以說擾動已被遺忘，於是這個系統具“有限的記憶”（即所謂的 Markovian chain）。

(二) EDM 模式與 Langevin 方程

前面提及非線性作用造成的兩種效果——不可逆緩和及隨機化正好對應到 Langevin 方程中的消散項及隨機力項，如果我們的 Langevin 方程是對這個非線性系統中單一個模寫的，也就是我們把注意力放在一個模的演變上，這時其它所有模與這個模的作用被分為兩類，分別是 Langevin 方程中的兩個作用力。另一方面在數學上，EDM 經封閉後的方程式，可以由一個 Langevin 方程式：

$$\frac{dV}{dt} + \int_0^t \lambda(t, t') V(t') dt' = f(t)$$

不經其它假設直接推導出來，也就是說，原系統經 EDM closure 後得到的低階統計性質與原系統代以一個 Langevin 方程後所表現的低階統計性質（自相關與能量）完全相同。於是 EDM 模式中的 relaxation time 也可藉 Langevin 方程的寫出而決定。

四、AR(Auto-Regressive) process

AR process 原是 Box & Jenkins (1977) 所提出，對時間序列的一種描述方法，凡是一個時間序列隨時間的演變，可以寫成下列形式者，稱為 AR(N) process。

$$X_t = \Phi_1 X_{t-1} + \Phi_2 X_{t-2} + \dots + \Phi_N X_{t-N} + a_t$$

其中 $\langle a_t, a_j \rangle = A \delta_{tj}$ ， a_t 為 white noise

δ_{tj} 為 Kronecker Delta function，即

$$\delta_{tj} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$$

A 為 white noise 之方差。

由上式以看出 AR process 是一種有“記憶”的過程，時間 i 的狀態 X_i 與前幾個時間 $i-1, i-2, \dots$ 的狀態 X_{i-1}, X_{i-2}, \dots 有關，過程中含有一個隨機因子 a_t ，所以 AR process 描述的是一個馬可夫過程（既非完全隨機的過程，也無法由一個初始值確定其往後的演變）。從物理上看與 Langevin 方程式有相同的意義。而且在數學上

，Langevin 方程可以一個簡單的前差分法寫成 AR(1) process 的形式，這一點將在下一節中討論。下面先來看看 AR(1) process 表現怎樣的統計性質。

(一) AR(1) process

以 AR(1) 為例：

$$X_i = \Phi X_{i-1} + a_i, \quad \langle a_i, a_j \rangle = A \delta_{ij} \quad (4.1)$$

對一個在統計平衡態 (stationarity) 的時間序列，如果可以 AR(1) process 來表示，則必要條件為 $|\Phi| < 1$ 。這個平衡態的統計性質可由上式導出如下：

$$\langle X_i, X_{i-1} \rangle = \Phi \langle X_{i-1}^2 \rangle + A^{1/2} \langle a_i, X_{i-1} \rangle$$

$$r_1 \equiv \langle X_i, X_{i-1} \rangle / \langle X_i^2 \rangle = \Phi$$

其中用到 $\langle X_i^2 \rangle = \langle X_{i-1}^2 \rangle = \dots$

$$\langle a_i, X_{i-1} \rangle = 0$$

同理若兩邊乘 X_{i-k} 取集平均，可以得到自相關為

$$r_k \equiv \langle X_i, X_{i-k} \rangle / \langle X_i^2 \rangle = \Phi^k$$

兩邊平方取集平均得方差 (variance) 為

$$\langle X_i^2 \rangle = A / (1 - \Phi^2)$$

當 X_i 為速度時，上式表示動能 (平衡態)。

可見 AR(1) process 的低階統計性質完全決定於式中兩個參數—— Φ 及 A ，若以 (4.1) 式給定任意初始值，以電腦製造一個 white noise a_i 則由 (4.1) 式可製造出一個時間序列，當 $t \rightarrow \infty$ 時，這個時間序列所表現出來的低階統計性質即為由 (4.1) 式直接導出之結果，當取 AR(N) process $N \geq 3$ 時，由原式導統計性質變得相當複雜，此時即可由製造出之時間序列來求取。

(二) Langevin 方程與 AR process 在數學上的關係

前提及 AR process 與 Langevin 方程在物理意義上相同，下面我們來看看兩者在數學上的關係：

Langevin 方程以前差分法寫成差方時具有 AR(1) process 的形式

$$\text{即 } dV / dt + \lambda V = f(t)$$

$$\langle f(t) f(t') \rangle = F \delta(t - t')$$

由前差分法得到

$$V_{i+1} = (1 - \lambda \Delta t) V_i + \Delta t \cdot f_i$$

$$\langle f_i, f_j \rangle = F \delta_{ij} / \Delta t \quad (4.2)$$

(4.2) 式相當於一個 AR(1) process：

$$V_i = \Phi V_{i-1} + a_i, \quad \langle a_i, a_j \rangle = A \delta_{ij}$$

於是有

$$a_i = \Delta t \cdot f_i$$

平方取集平均得

$$A = \langle a_i^2 \rangle = \Delta t^2 \langle f_i^2 \rangle = F \Delta t \quad (4.3)$$

$$\Phi = 1 - \lambda \Delta t \quad (4.4)$$

由 4-1 節所述 AR(1) process 的統計性質，可直接寫出 (4.2) 式之能量為

$$\frac{F}{2\lambda} = \frac{F \Delta t}{2(1 - \Phi)} = \frac{A}{1 - \Phi^2}$$

$$\text{所以 } F = \frac{2A}{(1 + \Phi)\Delta t} \rightarrow \frac{A}{\Delta t}$$

當 $\Delta t \rightarrow 0$ ($\phi \rightarrow 1$)

又原 Langevin 方程自相關 (2.3) 式得

$$e^{-\lambda \tau} = e^{-\lambda K \Delta t} = (e^{-\lambda \Delta t})^K = \Phi^K, \quad \tau = K \Delta t$$

結果 $\Phi = e^{-\lambda \Delta t} \sim 1 - \lambda \Delta t$ (泰勒展開)

上式與前差分法所得 (4.3) 及 (4.4) 式相符。也就是說 Langevin 方程式可由前差分法寫成一個 AR(1) process，於是我們可以由觀測資料寫出的 AR(1) process 經過 (4.3)，(4.4) 之關係式寫成一個近似的 Langevin 方程。

(三) AR(N) process

實際大氣可能並不正好是一個 AR(1) process 於是可能需要更高階 (多項) AR process 的表示法，下面敘述的是 AR(N)， $N \geq 2$ 的情況：

AR(N) process， $N \geq 2$ 的情形可寫成

$$X_i = \Phi_1 X_{i-1} + \Phi_2 X_{i-2} + \dots + \Phi_N X_{i-N} + a_i$$

兩邊乘 $X_{i-1}, X_{i-2}, \dots, X_{i-N}$ 取集平均並利用 $r_0 = 1$ 及 $r_{-k} = r_k$ 的性質，可以得到

$$r_k = \Phi_1 r_{k-1} + \Phi_2 r_{k-2} + \dots + \Phi_N r_{k-N}$$

$$k = 1, 2, \dots, N$$

稱為 Yule-Walkers eqs. (共 N 式)

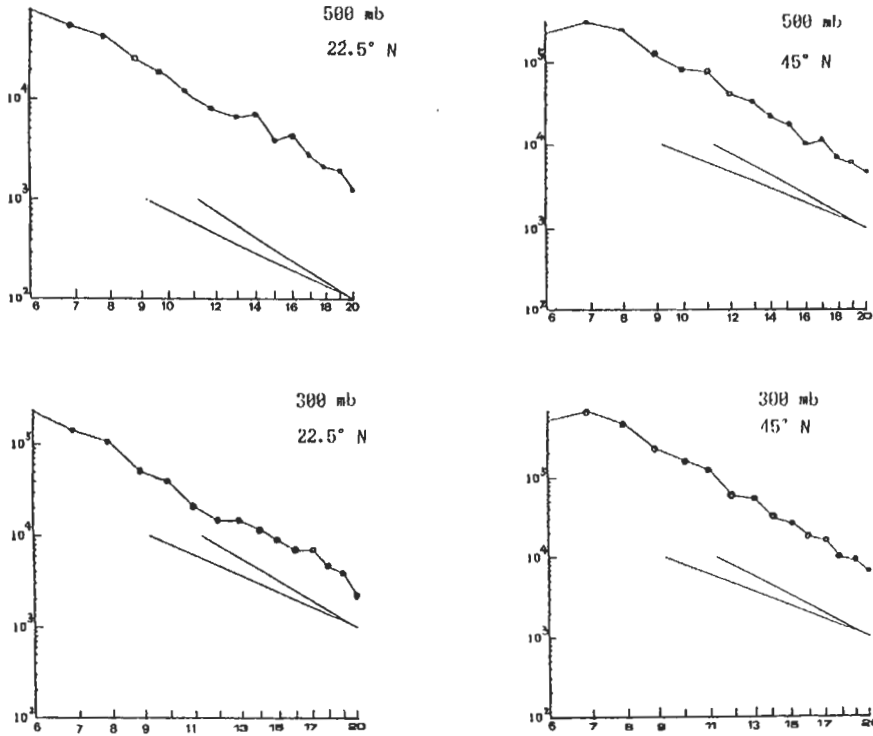


圖 1 300 mb、500 mb、22.5 N 及 45 N 之能譜觀測值與 AR(1) 之結果比較 (圖中小點為 AR(1) 斜線為 K^{-3} 與 K^{-5} 橫座標為波數單位 (m^{-1}) 縱座標為能量密度單位 ($m^{-3} s^{-1}$)

其中 r_1, r_2, \dots 代以觀測值自相關函數，即可求出式中參數。

五、資料處理與結果分析

(一) 方程式

二維紊流理論估計慣性區段之能譜為 k^{-3} ，在實際大氣中，如 (圖 1) 所示，在波數約為 $k = 8 \sim 15$ 的範圍之能譜接近 k^{-3} ，可見在這個波段中，正壓渦度方程式相當適用，我們由 (3.1) 式之正壓渦度方程式出發：

$$dy_k / dt = \Sigma A_{kij} y_i y_j \quad (5.1)$$

由 3-1 節所述知，其中之 y_k 為流線函數以一個線性運算元 (linear operator) 之固有函數 (eigen function) 展開後某個模 (mode) 之

係數，可視為富氏展開之係數。

我們的目的是將 (5.1) 式改寫成一個 Langevin 方程式，這個方程式能表現與 (5.1) 式相同 (在這裡就是與觀測相同) 之自相關與能譜。當上面的 y_k 為流線函數一維 (東西方向) 富氏轉換係數時，其能量為 $k^2 |y_k|^2$ ，絕對值表示振幅。而已知流線函數與南北風之關係為

$$v = \partial \psi / \partial x$$

一維富氏轉換後得到

$$V_k = iky_k$$

$$\text{i.e. } |V_k|^2 = K^2 |y_k|^2$$

於是，為了簡便起見，我們可以用一個南北風場經一維富氏轉換後各個模的振幅來寫 Langevin 方程。

(二) 資料來源

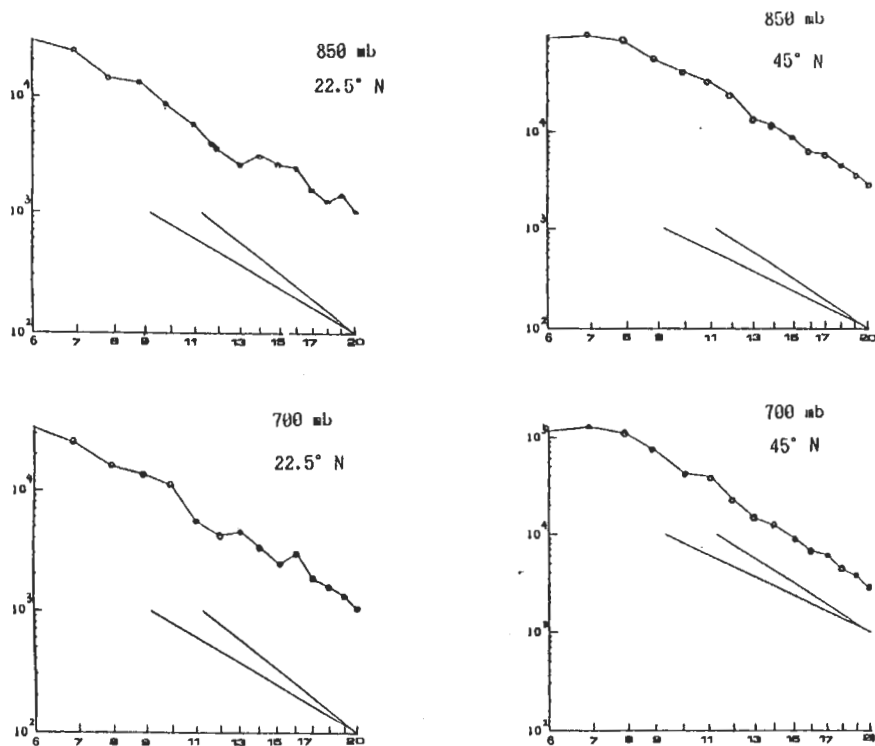


圖 2 700 mb、850 mb、22.5 N 及 45 N 之能譜觀測值與 AR(1) 之結果比較斜線為 K^{-3} 與 K^{-5} ，(圖中黑點為 AR(1)) 橫座標為波數單位 (m^{-1}) 縱座標為能量密度單位 ($m^3 s^{-1}$)

本文資料採 FGGE 1978 年 12 月 1 日至 1979 年 2 月 28 日冬季，每天 00Z，12Z 經緯網格 $1.875^\circ \times 1.875^\circ$ 之南北風場資料，並分兩個緯度 45 N 及 22.5 N，四個高度 300，500，700 及 850 mb 共八組資料進行處理並作比較。

(二) 計算方法

為了簡便起見，以一個緯度圈南北風場做一維富氏轉換：

$$V(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t) \cdot e^{ikx}$$

V_k 為複數， K 為波數

求統計性質之計算方法如下：

- (1) 以各波數振幅 $Z_k(t) = [V_k V_k^*]^{1/2}$ ，($*$ 表共軛複數) 求自相關函數 (auto-correlation function, 簡稱 acf)

$$R_k(\tau) \equiv \frac{\langle Z_k(t) Z_k(t + \tau) \rangle}{\langle Z_k(t) Z_k(t) \rangle}$$

$\langle \rangle$ 表集平均 (ensemble average) 實際計算時，以時間序列之平均代替集平均 (假設 ergodicity)

$$R_k(j) \equiv \frac{\sum_{i=1}^N Z_k(i) Z_k(i + j)}{\sum_{i=1}^N Z_k(i) Z_k(i)}$$

其中 $t = i \Delta t$ ， $\tau = j \Delta t$ ， N 為時間序列中觀測值個數。

(2) 能譜中波數 K 之能量定義為：

$$\int_{k - \Delta k}^{k + \Delta k} E(k') dk' \propto \langle Z_k^2(t) \rangle = \sum_{i=1}^N Z_k^2(i) / N$$

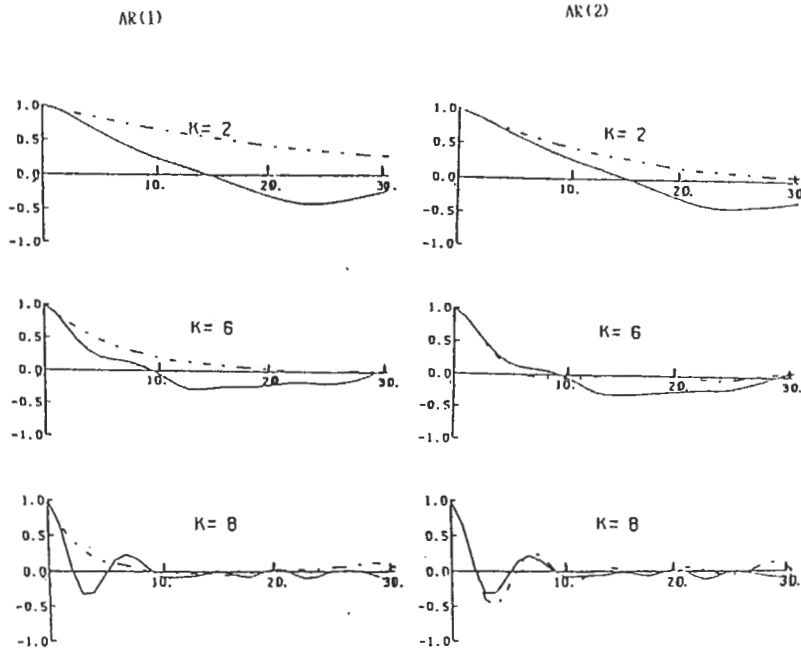


圖 3 AR(1)、AR(2)與觀測之自相關比較實線為觀測值。左邊虛線為AR(1)，右邊為AR(2)。橫軸單位為0.5天。資料為500 mb、45 N高度場。K為波數。

其中 $Z_k(t) = \bar{Z}_k + Z_k(t)$, $\bar{(\quad)}$ 表示時間平均

$E(k)$ 為能量密度 (energy density)

南北風分量動能，因次為能量因次 $L^3 T^{-2}$ 。

$$KE(k) \propto \langle V_k V_k^* \rangle$$

$$\text{故 } E(k) \propto \langle V_k V_k^* \rangle / K \text{ (數值)}$$

比較因次： V 的因次為 $L T^{-1}$ 波數 k 因次為 L^{-1}

，所以 $E(k)$ 為 $L^3 T^{-2}$ ，以 $\log E(k)$ 為縱座標， $\log k$ 為橫座標，能譜示於圖 1, 2。

(3) 利用求得之各波數 acf 寫成一個 AR(1) process

$$V_i = \Phi V_{i-1} + a_i, \quad \langle a_i a_j \rangle = A \delta_{ij}$$

其中 V_i 表示某個波數之振幅之偏差 (deviation)

Φ 以觀測所得 acf 代入

$$\text{由 } \Phi^k = r_k, \text{ 所以 } \Phi = r_1$$

$$\text{並取 } A = \langle b_i^2 \rangle = \langle (X_i - \Phi X_{i-1})^2 \rangle$$

取由電腦製造方差為 1 之亂數，其平均值為零。給定一個任意初始值，則可由上式製造模擬

出一個時間序列，當 $i \rightarrow \infty$ 時，我們希望這個模擬的時間序列能表現出與觀測值相同的低階統計性質 (acf 與能譜)，結果的比較如圖 1、2。

(4) 利用各波數之 acf 寫成 AR(2) process

$$X_i = \Phi_1 X_{i-1} + \Phi_2 X_{i-2} + a_i$$

$$\langle a_i a_j \rangle = A \delta_{ij}$$

其中

$$r_1 = \Phi_1 + \Phi_2 r_2$$

$$r_2 = \Phi_1 r_1 + \Phi_2$$

以觀測值求得之 acf 代入 r_1, r_2 ，求得

Φ_1 與 Φ_2, A 的求法同(3)即

$$A = \langle b_i^2 \rangle$$

$$= \langle (X_i - \Phi_1 X_{i-1} - \Phi_2 X_{i-2})^2 \rangle$$

給定兩個初始值 X_0 及 X_1 製造 20000 個取最後 10000 個求其能譜， a_i 之給定同(3)。

(5) 高階統計量歪度 (Skewness) 和隆度 (Kurtosis)

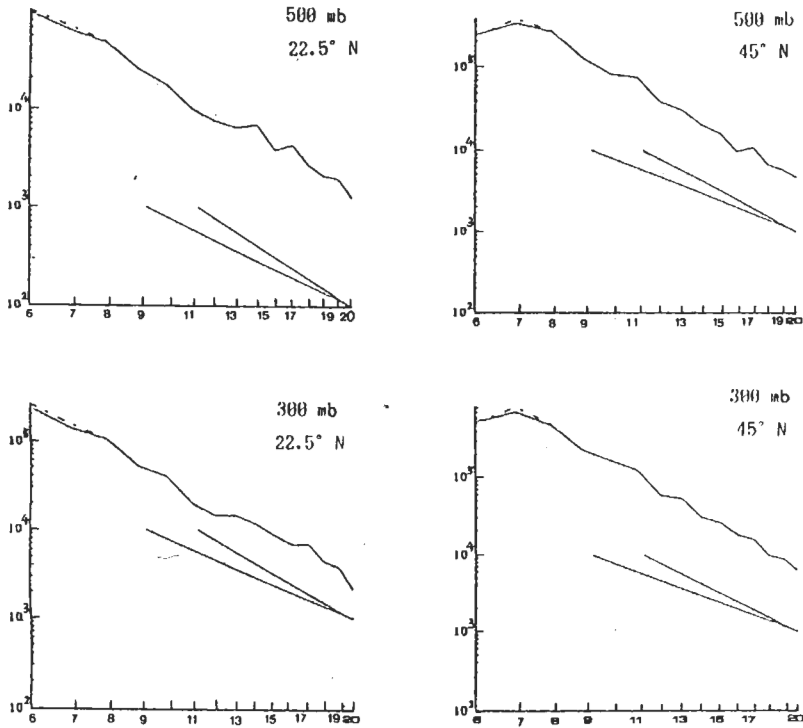


圖 4 同 (圖 1) 唯為 AR(2) 結果 (虛線) 與實際大氣之比較。

前面曾提及以相位空間之機率密度函數來描述系統之狀態，在把方程式改寫為 Langevin 方程式後，我們可能需要看看模擬之歪度及隆度與實際大氣有些什麼差別：

設時間序列 $y_i = \mu + X_i$ ， μ 為平均值
則其 2、3、4 階之分佈定義為

$$S (\text{方差}) = \sum_{i=1}^N X_i^2 / N$$

$$\sigma (\text{標準差}) = S^{1/2}$$

$$\text{歪度} = \sigma^{-3} \sum X^3 / N$$

$$\text{隆度} = \sigma^{-4} \sum X^4 / N$$

四 結果分析

(1) 圖 1 為由觀測資料劃出之能譜，因為二維紊流所估計之能譜在超長波部分 (大約 $K = 1 \sim 5$) 可能由於 β 效應 (Phines, 1975) 或地形效應 (Lilly, 1972) 的影響與實際大氣觀測到能譜有

15 的範圍，圖中斜線為二維紊流估計之 K^{-3} 能譜，顯示緯度 45° N 的情形與 K^{-3} 非常接近，尤其是高層的 300 mb 及 500 mb。二維紊流 K^{-3} 能譜乃利用慣性區段的觀念，由一個正壓渦度方程式經因次分析導得 (慣性區段假設能譜在遠離斜壓不穩定度的能量源 ($\sim K = 7$) 及分子摩擦能量匯 (sink) 的中間地帶，非線性作用為能量傳遞的主要機制) 而二維紊流之非線性能量傳遞乃以大渦流對小渦流扯緊 (strain) 的形式進行。緯度 22.5° N 的能譜與 K^{-3} 相差較大，大約介於 K^{-3} 與 $K^{-5/3}$ 之間， $K^{-5/3}$ 為三維紊流估計之能譜，表示可能 22.5° N 非線性能量傳遞，渦管的拉伸 (vortex stretching) 是一項重要機制。

(2) <表 1> 為經 AR(1) 寫出之 Langevin 方程中的 λ_K 及 $A_K^{1/2}$ ，對所有的波數 K ， $\lambda > 0$ 表示系統處在一個穩定狀態，如果給系統一個小擾動，過

<表 1> Langevin eq. 中之二個參數

	λ_K	$\Lambda_K^{1/2}$	λ_K	$\Lambda_K^{1/2}$	λ_K	$\Lambda_K^{1/2}$	λ_K	$\Lambda_K^{1/2}$
----- 22.5°N -----								
	300 MB		500 MB		700 MB		850 MB	
K=1	0.729	0.174	1.066	0.112	1.246	0.108	0.956	0.092
K=2	0.266	0.207	0.687	0.167	0.977	0.141	0.781	0.121
K=3	0.420	0.258	0.557	0.155	0.875	0.138	0.927	0.119
K=4	0.317	0.476	0.415	0.233	0.685	0.150	0.902	0.156
K=5	0.348	0.685	0.335	0.287	0.728	0.191	0.986	0.139
K=6	0.209	0.608	0.296	0.296	0.495	0.201	0.466	0.161
K=7	0.345	0.685	0.452	0.356	0.503	0.173	0.589	0.189
K=8	0.471	0.780	0.432	0.295	0.696	0.174	0.855	0.189
K=9	0.669	0.607	0.662	0.291	0.803	0.198	0.970	0.222
K=10	0.788	0.621	0.873	0.300	0.961	0.211	1.094	0.174
K=11	1.149	0.508	1.147	0.255	1.414	0.169	1.016	0.124
K=12	1.270	0.439	1.234	0.222	1.169	0.117	1.280	0.106
K=13	1.166	0.435	1.183	0.197	1.133	0.131	1.662	0.109
K=14	1.174	0.379	1.131	0.219	1.202	0.111	1.506	0.132
K=15	1.345	0.347	1.434	0.163	1.336	0.097	1.518	0.116
K=16	1.348	0.292	1.218	0.167	1.399	0.133	1.442	0.111
K=17	1.278	0.300	1.427	0.130	1.328	0.081	1.557	0.081
K=18	1.552	0.247	1.842	0.136	1.595	0.090	1.765	0.077
K=19	1.556	0.226	1.728	0.125	1.613	0.082	1.438	0.077
K=20	1.689	0.146	1.821	0.089	1.619	0.066	1.547	0.062
----- 45°N -----								
	300 MB		500 MB		700 MB		850 MB	
K=1	0.450	0.236	0.501	0.141	0.851	0.130	0.889	0.171
K=2	0.262	0.463	0.257	0.260	0.274	0.152	0.483	0.199
K=3	0.482	0.717	0.513	0.423	0.681	0.329	0.621	0.313
K=4	0.263	1.543	0.244	0.714	0.344	0.413	0.427	0.316
K=5	0.246	1.994	0.254	0.953	0.393	0.678	0.460	0.552
K=6	0.312	1.967	0.323	0.888	0.496	0.678	0.542	0.539
K=7	0.314	3.138	0.340	1.537	0.443	0.802	0.493	0.614
K=8	0.335	2.554	0.350	1.425	0.487	0.856	0.534	0.667
K=9	0.584	2.375	0.630	1.418	0.745	0.942	0.927	0.847
K=10	0.697	2.251	0.824	1.353	1.015	0.852	0.977	0.761
K=11	0.817	2.191	0.813	1.365	0.845	0.724	0.932	0.637
K=12	1.101	1.527	1.083	1.022	0.916	0.485	0.927	0.498
K=13	1.188	1.596	1.395	1.137	1.161	0.435	1.427	0.487
K=14	1.484	1.220	1.338	0.760	1.437	0.481	1.474	0.463
K=15	1.684	1.282	1.571	0.755	1.529	0.417	1.233	0.314
K=16	1.565	0.876	1.889	0.569	1.406	0.302	1.484	0.289
K=17	1.565	0.821	1.484	0.539	1.741	0.360	1.751	0.334
K=18	1.640	0.567	1.854	0.426	1.772	0.271	1.644	0.255
K=19	1.531	0.509	1.913	0.403	1.596	0.222	1.511	0.202
K=20	1.900	0.477	2.205	0.392	2.074	0.217	1.929	0.209

22.5°N

45°N

<表 2> 45°N 各層各波數之高階統計量(觀測值) K 表示波數, 4 個 column 分別表示(左→右): 平均值、標準差、歪度及隆度。

----- 300MB, 45. ON -----					----- 700MB, 45 ON -----				
K = 1	0.0000	0.5076	0.1609	2.2661	K = 1	-0.0002	0.2753	0.3637	3.5428
K = 2	-0.0002	0.9334	0.5241	2.8051	K = 2	0.0001	0.5188	0.7601	3.3386
K = 3	0.0000	0.8598	-0.0888	2.4220	K = 3	0.0003	0.4893	0.5501	3.3989
K = 4	-0.0005	1.6867	0.8480	3.5129	K = 4	0.0001	0.7658	0.6980	2.9393
K = 5	0.0002	1.9763	0.3539	2.6197	K = 5	-0.0002	0.9224	0.1679	2.2770
K = 6	0.0003	1.7541	0.2056	2.3414	K = 6	0.0004	0.8245	0.2300	2.5821
K = 7	-0.0002	2.2067	0.4693	2.7899	K = 7	-0.0003	0.9440	0.5992	3.1325
K = 8	-0.0004	1.9384	0.9482	3.7157	K = 8	0.0000	0.9335	1.4132	6.6450
K = 9	-0.0002	1.4182	0.4059	2.4620	K = 9	0.0003	0.7922	0.5615	2.5998
K = 10	-0.0004	1.2675	0.5723	2.5057	K = 10	0.0003	0.6454	0.5793	3.2202
K = 11	-0.0004	1.1563	0.5986	2.9488	K = 11	0.0003	0.6529	1.0179	4.0080
K = 12	0.0004	0.8316	1.0246	5.6329	K = 12	-0.0003	0.5134	0.3405	2.2437
K = 13	0.0001	0.8226	1.0253	4.3137	K = 13	-0.0005	0.4328	0.6382	3.1184
K = 14	-0.0004	0.6413	0.5331	3.1954	K = 14	0.0004	0.4092	0.6642	3.4999
K = 15	0.0004	0.6169	0.6099	2.8900	K = 15	0.0002	0.3694	0.6016	3.3285
K = 16	0.0004	0.5288	0.7184	4.2010	K = 16	-0.0004	0.3276	0.9498	4.3204
----- 500MB, 45. ON -----					----- 850MB, 45. ON -----				
K = 1	-0.0003	0.3727	0.3124	2.6250	K = 1	-0.0002	0.3093	0.4037	2.6415
K = 2	0.0004	0.7051	0.6611	3.0578	K = 2	0.0003	0.4508	0.7269	3.1761
K = 3	-0.0001	0.6393	-0.1156	2.2470	K = 3	-0.0005	0.4996	0.4269	2.7966
K = 4	0.0001	1.1891	0.6801	2.9287	K = 4	-0.0003	0.6045	0.7147	2.9744
K = 5	0.0004	1.3524	0.2174	2.4608	K = 5	0.0004	0.7693	0.4196	2.2550
K = 6	-0.0003	1.1654	0.2048	2.2956	K = 6	0.0005	0.7037	0.4777	2.7383
K = 7	-0.0002	1.4849	0.5508	2.7870	K = 7	0.0000	0.7839	0.6086	2.9027
K = 8	0.0002	1.4163	0.8153	3.4525	K = 8	0.0004	0.7880	1.5830	7.2866
K = 9	0.0001	1.0554	0.3573	2.2219	K = 9	-0.0002	0.6746	0.5880	2.6908
K = 10	0.0002	0.9042	0.4799	2.5757	K = 10	-0.0004	0.6233	0.5186	2.9051
K = 11	-0.0005	0.9139	0.8600	3.5250	K = 11	-0.0004	0.5835	1.0257	4.0420
K = 12	0.0000	0.6867	0.7008	3.6087	K = 12	-0.0002	0.5180	0.3627	2.4820
K = 13	0.0005	0.6395	0.8705	4.0003	K = 13	-0.0002	0.4130	0.4187	2.7465
K = 14	0.0002	0.5330	0.3079	2.4367	K = 14	-0.0005	0.3963	0.7097	2.8433
K = 15	0.0003	0.4900	0.5933	3.1288	K = 15	0.0002	0.3568	0.5100	3.1048
K = 16	-0.0003	0.3881	0.4853	3.0818	K = 16	0.0003	0.3119	0.7319	3.5677
					平均值	標準差	歪度	隆度	

<表3> 22.5°N 各層 k = 1 ~ 16 高階統計量 (觀測值), 其餘同<表2>。

----- 300MB, 22.5N -----					----- 700MB, 22.5N -----				
K = 1	0.0002	0.3445	0.6525	3.0755	K = 1	0.0002	0.2080	0.9508	4.2208
K = 2	0.0005	0.6140	1.5483	5.7519	K = 2	0.0005	0.2683	0.8028	3.1960
K = 3	-0.0003	0.5504	0.5006	2.9759	K = 3	0.0003	0.2798	0.3846	2.8498
K = 4	0.0004	0.8590	0.1952	2.2532	K = 4	0.0005	0.3297	0.3875	2.5520
K = 5	0.0002	0.9814	0.6668	3.0720	K = 5	-0.0001	0.3664	0.4560	2.6633
K = 6	-0.0003	1.1826	0.7934	3.6354	K = 6	-0.0001	0.4467	0.4005	2.8680
K = 7	-0.0003	0.9842	0.2106	2.6888	K = 7	-0.0004	0.4132	0.2873	2.1915
K = 8	0.0000	0.9111	0.2701	2.2540	K = 8	-0.0003	0.3556	0.4128	2.9605
K = 9	-0.0004	0.6718	0.0635	2.6429	K = 9	0.0001	0.3505	0.5510	2.9241
K = 10	0.0003	0.6257	0.6908	3.3747	K = 10	0.0004	0.3305	0.7372	2.9633
K = 11	-0.0003	0.4700	0.3865	2.7729	K = 11	-0.0001	0.2446	0.6733	3.0317
K = 12	0.0003	0.4155	0.2796	2.6625	K = 12	0.0000	0.2236	0.2902	2.6666
K = 13	0.0002	0.4316	0.6749	2.7608	K = 13	-0.0002	0.2404	0.7015	3.3673
K = 14	0.0005	0.4013	0.4817	2.9686	K = 14	0.0002	0.2144	0.5250	2.9449
K = 15	-0.0001	0.3593	0.6657	3.3366	K = 15	-0.0004	0.1901	0.4638	2.7809
K = 16	-0.0005	0.3293	0.4765	2.5508	K = 16	0.0000	0.2179	0.7989	4.4343
----- 500MB, 22.5N -----					----- 850MB, 22.5N -----				
K = 1	0.0002	0.2287	0.4345	2.9978	K = 1	-0.0001	0.2186	1.1065	4.6510
K = 2	-0.0003	0.3490	0.6134	2.7936	K = 2	-0.0001	0.2770	0.6441	2.6294
K = 3	-0.0001	0.3724	0.3424	2.3743	K = 3	0.0002	0.2547	0.3710	2.7402
K = 4	-0.0001	0.5278	0.3558	2.4773	K = 4	-0.0002	0.2936	0.7434	3.3376
K = 5	0.0004	0.6610	0.7311	3.2818	K = 5	-0.0004	0.2659	0.4051	2.5983
K = 6	0.0000	0.6990	0.5926	3.9797	K = 6	0.0003	0.4129	0.4113	2.5706
K = 7	0.0000	0.6239	0.0619	2.0780	K = 7	-0.0005	0.4038	0.3791	2.6403
K = 8	0.0004	0.5836	0.4710	2.7631	K = 8	-0.0004	0.3344	0.3598	2.5527
K = 9	0.0004	0.4665	0.5533	2.7961	K = 9	-0.0004	0.3385	0.4469	2.6232
K = 10	0.0005	0.4137	0.4980	2.9155	K = 10	-0.0002	0.2816	0.7576	3.4179
K = 11	0.0002	0.3333	0.6309	2.7994	K = 11	0.0005	0.2469	0.9889	4.2110
K = 12	0.0003	0.2999	0.7910	4.1152	K = 12	0.0004	0.2033	0.3467	2.7307
K = 13	-0.0002	0.2887	0.5258	2.6852	K = 13	-0.0003	0.1815	0.9619	4.4972
K = 14	0.0003	0.3109	0.7775	3.2080	K = 14	-0.0004	0.2092	1.2272	5.3229
K = 15	-0.0001	0.2383	0.3974	2.7925	K = 15	0.0001	0.1956	0.9181	4.3426
K = 16	0.0000	0.2618	0.7351	3.7434	K = 16	-0.0005	0.1958	0.9058	4.3907
						平均值	標準差	歪度	峰度

<表 4> 45°N 各層高階統計量—AR (1)結果，其餘同<表 2>。

-----300MB 45. ON, WINTER-----					----- 700MB, 45. ON, WINTER-----				
K= 1	0.0076	0.5139	0.0175	2.7856	K= 1	0.0028	0.2789	0.0248	2.7730
K= 2	-0.0212	0.9713	-.0207	2.8875	K= 2	-0.0117	0.5431	-.0209	2.8906
K= 3	0.0365	0.8568	-.0095	2.9220	K= 3	0.0169	0.4917	-.0014	2.9148
K= 4	-0.0327	1.6872	-.0947	2.8505	K= 4	-0.0124	0.7714	-.0893	2.8504
K= 5	-0.0128	2.0227	-.0636	2.9635	K= 5	-0.0034	0.9271	-.0336	2.9518
K= 6	-0.0782	1.8196	-.1319	3.0431	K= 6	-0.0285	0.8352	-.1139	2.9791
K= 7	0.2248	2.3665	0.0067	2.9360	K= 7	0.0788	0.9954	0.0115	2.9265
K= 8	-0.1263	1.9922	-.0144	2.8819	K= 8	-0.0490	0.9519	-.0131	2.8753
K= 9	0.0555	1.4092	-.0478	2.8809	K= 9	0.0268	0.7871	-.0459	2.8909
K= 10	0.0266	1.2562	-.0343	3.0179	K= 10	0.0107	0.6448	-.0141	2.9775
K= 11	-0.0711	1.1365	0.0082	2.8774	K= 11	-0.0393	0.6423	0.0101	2.8732
K= 12	-0.0140	0.8222	-.0003	2.8770	K= 12	-0.0098	0.5065	-.0090	2.9134
K= 13	0.0030	0.8265	-.0321	2.8944	K= 13	0.0016	0.4367	-.0311	2.8954
K= 14	0.0108	0.6414	-.0026	2.9205	K= 14	0.0071	0.4096	-.0026	2.9267
K= 15	-0.0011	0.6110	0.0280	2.9433	K= 15	-0.0007	0.3664	0.0305	2.9356
K= 16	0.0074	0.5359	0.0060	2.8826	K= 16	0.0050	0.3323	0.0136	2.8884
-----500MB, 45. ON, WINTER-----					----- 850MB, 45. ON, WINTER-----				
K= 1	0.0052	0.3772	0.0180	2.7804	K= 1	0.0031	0.3133	0.0248	2.7739
K= 2	-0.0162	0.7349	-.0206	2.8861	K= 2	-0.0080	0.4655	-.0240	2.9148
K= 3	0.0262	0.6389	-.0081	2.9244	K= 3	0.0183	0.5015	-.0035	2.9215
K= 4	-0.0242	1.1867	-.0955	2.8514	K= 4	-0.0084	0.6102	-.0799	2.8536
K= 5	-0.0084	1.3756	-.0617	2.9639	K= 5	-0.0023	0.7723	-.0244	2.9386
K= 6	-0.0508	1.2010	-.1304	3.0378	K= 6	-0.0232	0.7105	-.1105	2.9682
K= 7	0.1444	1.5855	0.0081	2.9337	K= 7	0.0614	0.8225	0.0121	2.9233
K= 8	-0.0901	1.4557	-.0141	2.8801	K= 8	-0.0392	0.8024	-.0125	2.8742
K= 9	0.0795	1.0486	-.0475	2.8826	K= 9	0.0198	0.6706	-.0416	2.9077
K= 10	0.0171	0.8995	-.0245	3.0000	K= 10	0.0106	0.6221	-.0160	2.9820
K= 11	-0.0565	0.8992	0.0079	2.8781	K= 11	-0.0330	0.5741	0.0152	2.8624
K= 12	-0.0117	0.6782	-.0013	2.8799	K= 12	-0.0098	0.5105	-.0085	2.9108
K= 13	0.0021	0.6423	-.0384	2.8834	K= 13	0.0013	0.4156	-.0391	2.8815
K= 14	0.0098	0.5335	-.0027	2.9409	K= 14	0.0067	0.3967	-.0027	2.9219
K= 15	-0.0009	0.4858	0.0299	2.9378	K= 15	-0.0008	0.3553	0.0304	2.9168
K= 16	0.0046	0.3927	-.0094	2.8994	K= 16	0.0046	0.3162	0.0099	2.8842
					平均值	標準差	歪度	際度	

〈表 5〉 22.5°N 各層高階統計量—AR (1)結果, 其餘同〈表 2〉。

----- 300MB, 22.5N, WINTER-----					----- 700MB, 22.5 N, WINTER-----				
K = 1	0.0039	0.3491	0.0233	2.7721	K = 1	0.0017	0.2103	0.0175	2.7891
K = 2	-0.0140	0.6441	-.0207	2.8884	K = 2	-0.0033	0.2749	-.0247	2.8636
K = 3	0.0255	0.5494	-.0126	2.9109	K = 3	0.0083	0.2818	0.0029	2.8814
K = 4	-0.0146	0.8594	-.0914	2.8498	K = 4	-0.0034	0.3351	-.0379	2.8635
K = 5	-0.0042	0.9919	-.0415	2.9588	K = 5	-0.0006	0.3610	-.0074	2.8828
K = 6	-0.0647	1.2576	-.1584	3.1153	K = 6	-0.0155	0.4545	-.1139	2.9794
K = 7	0.0949	1.0501	0.0084	2.9333	K = 7	0.0319	0.4318	0.0122	2.9225
K = 8	-0.0485	0.9249	-.0132	2.8755	K = 8	-0.0150	0.3577	-.0088	2.8659
K = 9	0.0242	0.6661	-.0470	2.8848	K = 9	0.0113	0.3476	-.0446	2.8964
K = 10	0.0122	0.6225	-.0270	3.0049	K = 10	0.0057	0.3299	-.0167	2.9838
K = 11	-0.0230	0.4623	0.0241	2.8470	K = 11	-0.0103	0.2408	0.0303	2.8445
K = 12	-0.0063	0.4113	0.0092	2.8568	K = 12	-0.0036	0.2211	0.0034	2.8677
K = 13	0.0016	0.4357	-.0313	2.8952	K = 13	0.0009	0.2428	-.0300	2.8959
K = 14	0.0081	0.4024	-.0025	2.9653	K = 14	0.0043	0.2150	-.0025	2.9610
K = 15	-0.0008	0.3572	0.0314	2.9240	K = 15	-0.0004	0.1891	0.0314	2.9236
K = 16	0.0052	0.3338	0.0164	2.8927	K = 16	0.0033	0.2210	0.0139	2.8886
----- 500MB, 22.5 N, WINTER -----					----- 850MB, 22.5 N, WINTER-----				
K = 1	0.0020	0.2315	0.0225	2.7803	K = 1	0.0021	0.2213	0.0244	2.7760
K = 2	-0.0052	0.3569	-.0234	2.9041	K = 2	-0.0039	0.2844	-.0233	2.8924
K = 3	0.0145	0.3723	-.0062	2.9250	K = 3	0.0072	0.2551	0.0036	2.8712
K = 4	-0.0075	0.5312	-.0816	2.8531	K = 4	-0.0025	0.2983	-.0060	2.8600
K = 5	-0.0029	0.6546	-.0441	2.9603	K = 5	-0.0003	0.2646	-.0054	2.8501
K = 6	-0.0320	0.7257	-.1345	3.0518	K = 6	-0.0149	0.4211	-.1161	2.9869
K = 7	0.0513	0.6560	0.0117	2.9259	K = 7	0.0280	0.4152	0.0125	2.9168
K = 8	-0.0327	0.5947	-.0135	2.8761	K = 8	-0.0124	0.3355	-.0045	2.8538
K = 9	0.0170	0.4635	-.0472	2.8844	K = 9	0.0096	0.3355	-.0406	2.9115
K = 10	0.0076	0.4123	-.0215	2.9940	K = 10	0.0044	0.2817	-.0113	2.9697
K = 11	-0.0163	0.3279	0.0240	2.8471	K = 11	-0.0132	0.2429	0.0194	2.8549
K = 12	-0.0047	0.2964	0.0071	2.8605	K = 12	-0.0031	0.2010	0.0098	2.8557
K = 13	0.0011	0.2912	-.0319	2.8945	K = 13	0.0005	0.1822	-.0431	2.8657
K = 14	0.0065	0.3118	-.0023	2.9721	K = 14	0.0035	0.2094	-.0025	2.9176
K = 15	-0.0005	0.2365	0.0312	2.9297	K = 15	-0.0004	0.1938	0.0307	2.9349
K = 16	0.0044	0.2658	0.0225	2.9057	K = 16	0.0029	0.1986	0.0120	2.8865
					平均值	標準差	歪度	隆度	

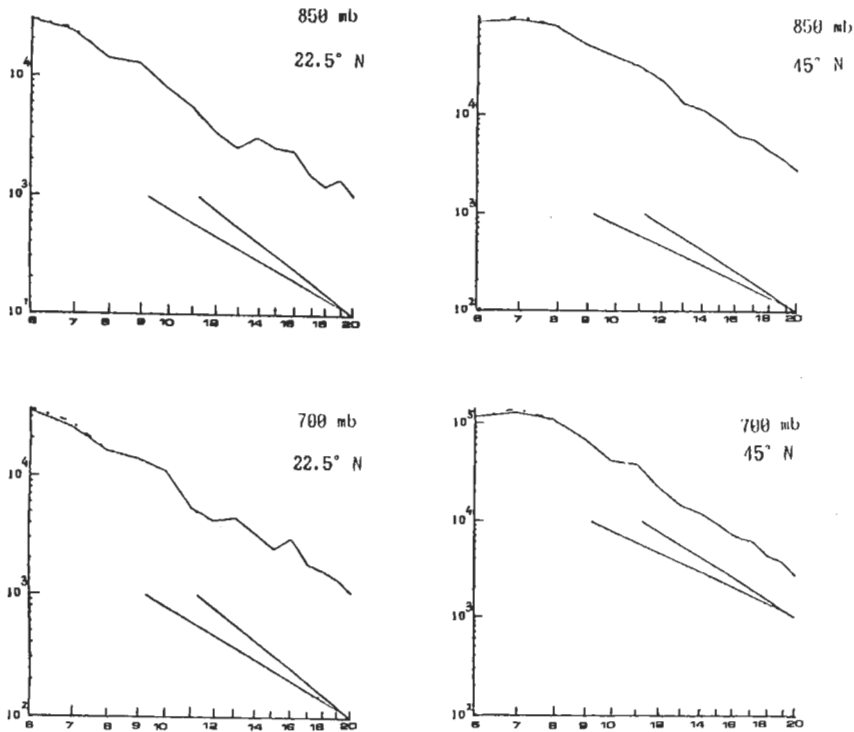


圖 5 同(圖 2)唯虛線表示 AR(2)。

了一段時間以後系統會回到其統計平衡態，(在 AR(1) process 中即滿足 $|\Phi| < 1$ 的條件，已能表現系統不可逆緩和的特性)，表中顯示：

- ① 緯度 45° N 之波數 2 有特別小之 λ_k ，可能是地形效應的影響，在 22.5° N 除 300 mb 外沒有這種現象。
- ② 緯度 45° N 波數 4 ~ 8 一段為 λ_k 之極小值，則可能表示能量經非線性作用外傳同時，也接受到由斜壓不穩定所轉換進來的能量，兩者相互抵銷，於是隨時間的變化較小，22.5° N 較不明顯。
- ③ 慣性區段的波段有隨機力的極大值表示非線性項在這裡是主要機制。
- ④ 45° N 之隨機力較 22.5° N 為大，可能由於 45° N 斜壓波活動較旺盛，由波數 4 ~ 8 傳入大量動能，於是需要較劇烈的非線性能量傳遞來消化它。 λ_k 在兩緯度沒有很大差別，於是

能譜顯示(圖 1) 45° N 有較大動能 ($= Ak^{1/2} / 2 \lambda_k$) 45° N 各波數之動能約為 22.5° N 之 3 倍大。

- ⑤ 低層隨機力較小， λ_k 較大，可能是地表摩擦消耗能量所致。
- (3) <表 2>，<表 3> 為兩個緯度各高度之 acf，有一個明顯的特色是各組資料各波數之歪度幾乎全部為正值，由歪度的求法知，正值表示 $\langle V \rangle > 0$ ，即 V 出現正值之頻率較 V 出現負值時的頻率為大。Leith (1975) 曾導出當黏滯性為零時二維紊流的平衡態為高斯分佈(歪度 = 0，陸度 = 3)，高斯分佈表示一種統計均勻的亂度，在實際大氣中振幅大的擾動出現次數稀少，但能譜上貢獻很大，可見得非線性作用不是唯一主宰的力量。
- (4) <表 4>，<表 5> 為 AR(1) process 模擬之結果，趨近高斯分佈，而方差 (variance) 與

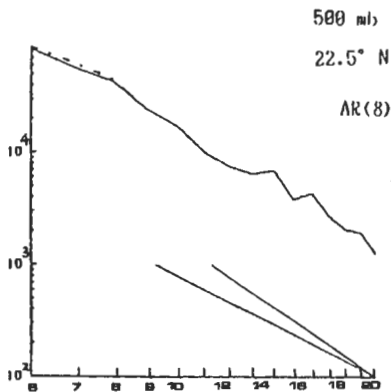
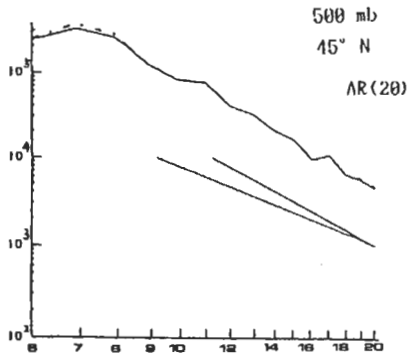
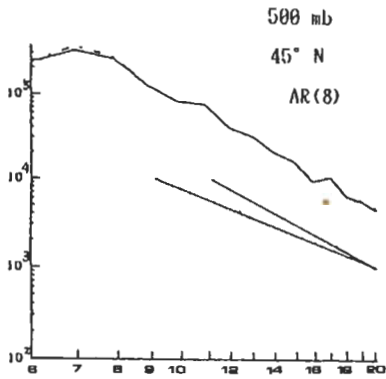


圖 6 AR(8)與AR(20) (虛線)與實際大氣之比較, 所採資料標示於圖中。

觀測資料非常接近, 即能譜與實際大氣非常接近。
 <圖 1>中虛線為AR(1)結果, <圖 3>則為acf之模擬結果, 圖左為AR(1), 圖右為AR(2), 顯示以AR process來模擬acf時, 高階(即多項)時效果較好。然而看<圖 4, 5>(AR(2)之能譜)時, 虛線(AR process)與實線(實際大氣)分開來, 再看一個AR(8)與AR(20)的情形(示於圖 6)更為明顯, 這表示Langevin方程很難同時滿足觀察到的acf與能譜。

六、結論

本文嘗試由FGGE資料分析利用AR process表示法寫出Langevin方程式以取代非線性正壓渦度方程式, 略去非線性作用微觀上的變化, 但求表現其低階統計性質, 結果顯示, 低階統計性質自相關與能譜之間似乎需要較高階性質之某種協調, 沒有非高斯部份存在的Langevin方程無法使兩者同時趨向實際值。

在EDM模式的封閉問題上, 用一個常數消散項 λ 的Langevin方程式求取的relaxation time, 可能在精確度上略嫌不足, 如3-2節中提及一個更一般化形式的Langevin方程, 消散項不再取為常數, 而是一個時間上的積分型式, 這個方程式若寫成差分型式將類似一個高階的AR process, 或許由此我們可以給EDM模式找到一個恰當的渦流黏滯性。

另外, 由Langevin方程與AR process中兩個參數 λ 及 Φ 的關係式, 我們知道 λ 的決定與寫AR process所採用資料之解析度 Δt 有關係, 於是如何找出 Δt 之criteria及決定一個最適當的取法, 則待進一步研究。

誌謝

本研究在國科會專題研究計劃NSC77-0202-M002-04支持下完成, 特此致謝。

參考文獻

- Box, E.P. and Jenkins, G.M., 1977: Time Series Analysis: forecasting and control. San Francisco, Holden-Day, pp553.
- Gambo, K., 1981: A Characteristic Feature of Ultra-Long Wave at the 500-mb Level in the Winter Season. *J. Meteor. Soc. Japan*, 56, 435-442.
- Gleeson, T.A., 1970: Statistical-Dynamical Predictions, *J. Appl. Meteor.*, 9, 333-344.
- Kraichnan, R.H., 1959: The structure of isotropic turbulence at very high Reynolds numbers. *J. Fluid.Mech.*, 5, 497-543.
- Leith, C.E., 1975: Climate Response and Fluctuation Dissipation. *J. Atmos. Sci.*, 32, 2022-2026.
- Lilly, D.K., 1972: Numerical simulation studies of two-dimensional turbulence. I. *Geophys. Fluid Dyn.* 3, 289-319.
- Rhines, P.B., 1975: Waves and turbulence on a beta-plane. *J. Fluid. Mech.*, 69, 417-443.
- Salmon, R., 1981: Geostrophic Turbulence (class notes of Oregon State University)

THE FORMULATION OF ^AMICROSCOPIC ATMOSPHERIC MOTIONS INTO A STOCHASTIC
EQUATION — FGGE DATA AND LANGEVIN EQUATION

LinHo *Pan Dzong-Ming*

Department of Atmospheric Sciences
National Taiwan University

(manuscript received June 1, 1988; in final form August 31, 1988)

ABSTRACT

In climate problem we concentrate on the statistics of atmospheric motion. It is known that the observed synoptic-scale motions are highly chaotic. Therefore the essentials of climate dynamics are two parts—a seemingly stochastic microscopic movements and a macroscopic statistical equilibrium state. A Langevin equation can describe these two effects nicely. This study will try to formulate the real atmospheric data into the form of a stochastic equation which is equivalent to write a finite difference scheme of Langevin Equation through an AR process. The results showed excellent agreements between our formulation and real data on the low level statistics, i.e. energy spectrum and auto-correlations.

As for skewness and kurtosis, we found that it is necessary to go to the higher order AR process and increase the temporal resolution of autocorrelation function. The increase of resolution made an impact on the representation of large-scale dynamics. Besides, the turbulence theory for example, the two-dimensional Eddy-damped Markovian Model predicts a type of Langevin equation. The nonlinear interactions produce the randomization and irreversible relaxation effects matching the two terms of Langevin equation. Our results can be a good reference for closure theories.

Key words: nonlinear interaction, Langevin equation, FGGE data, Auto Regressive (AR) process.