

旋流與層流動力學

鮑咸平 主講 王時鼎 記述

Dynamics of Rotating and Stratified Fluids

Lectured by H. P. PAO

Noted by S. T. WANG

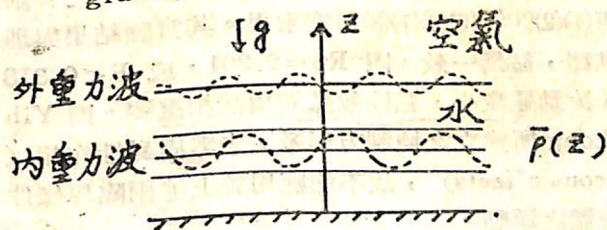
Abstract

This paper deals with some special aspects of the dynamics of rotating and stratified fluids. Emphasis is on the selective withdrawal of stratified fluids. Both the theoretical and experimental studies are worked out with the results showing that the successive arrival of "columnar disturbance modes" are the mechanism responsible for the development of flow concentration in the withdrawal region (selective withdrawal.) In addition, some common features of rotating and stratified fluids are also discussed.

大氣與海洋均係密度隨高度變化， $\rho(Z)$ ，即屬於密度成層流體 (Stratified fluid)。至於此處何以將旋流 (Rotating fluid) 與層流作為共同討論對象，乃因兩者——重力場中密度分層 (Stratified) 流體與加速或稱旋轉流體——之動力學有甚多類似性質，若干現象且為一一對應。且兩種流體中，某一方面的發展，常可應用於另一方面。其類似性質，如：

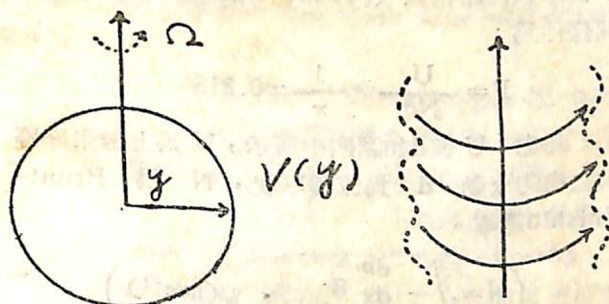
(1) 兩種流體均可維持 (Sustain) 波動

(A) 在層流中，因密度分層而造成重力波 (gravity waves) (註一) (參見圖一)。



圖一、在層流中，因密度分層而造成之重力波

(B) 在旋流中，因離心力作用可造成離心波或稱慣性波 (Centrifugal waves or Inertial waves) (註二)。(參見圖二)。

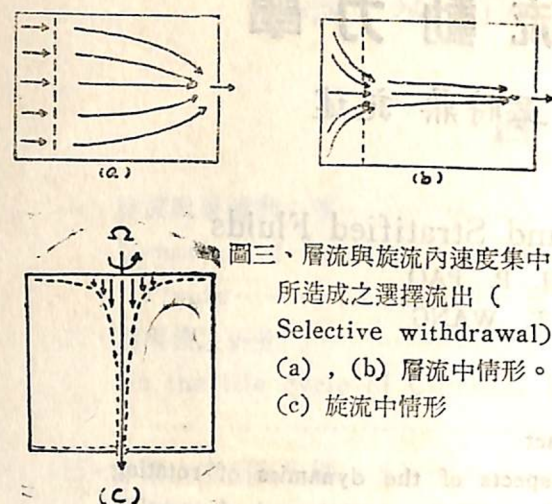


圖二、在旋流中因離心力作用造成之離心波或稱慣性波

(2) 當佛路德數 (Froude number) 甚小之時，兩種流體均可造成流速集中呈激流狀態 (Velocity concentration in the form of jet)，或稱選擇流出 (Selective withdrawal) (參見圖三)。而本文主要即係討論層流及旋流中選擇流

* 鮑咸平博士為 The Catholic University of America, Washington, D.C. 太空與大氣科學系教授。本文係民國62年8月返國參加經建會議期間，應氣象學會之請於8月22日發表之講詞。

出之動力學。



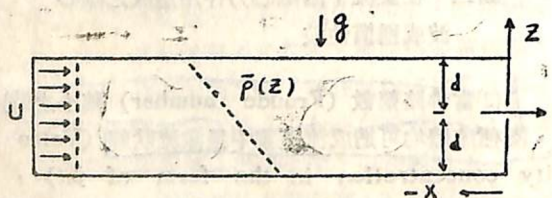
圖三、層流與旋流內速度集中所造成之選擇流出 (Selective withdrawal) (a), (b) 層流中情形。 (c) 旋流中情形

有關「選擇流出」現象，近年來極引人注意。特以蓄水池或水壩為尤然。因當水之流出 (Sink) 不大時，常可形成速度集中而選擇排出。至其他部份即呈滯留或阻滯現象 (Stagnation or blocking)，造成水污染，直接或間接影響魚殖或危害人類。注意上述現象並非一般流動均有，乃係僅出現於密度分層之流體中。而實際上如水壩蓄水因日射引起之上下溫差每可造成垂直密度差異而成層流 (Stratified fluid) 形式。有關類此「選擇流出」現象與佛路德數 (Froude number F) 有關，其條件為：

$$F = \frac{U}{Nd} > \frac{1}{\pi} \approx 0.318$$

此處： U 與 d 如圖四所示， U 為上游未經擾動之均勻流動， d 為流體厚度， N 為 Brunt-Väisälä 週率。

$$(N = \sqrt{-\frac{d\rho}{dz} \frac{g}{\rho_0}}, \text{ (sec}^{-1}\text{)})$$



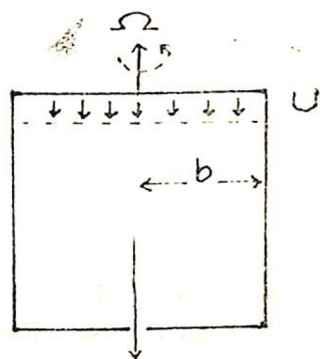
圖四、層流佛路德數 (Froude number) 中各參數值之決定

如為均勻流體， ρ 不變， $N=0$ 。特以 F 小時， N 值特為重要。如當層流中， $F > \frac{1}{\pi}$ ，或旋流中

， $Ro > 0.261$ (Ro = Rossby number)，即無「速度集中」或「選擇流出」發生。此處：

$$Ro = \frac{U}{2\Omega b} > 0.261$$

式中 U 為未經擾動之均勻速度， b 為半徑， Ω 為旋流之轉動角速度 (參見圖五)。



圖五、旋流洛士貝數 (Rossby number) 中各參數值之決定

圖五旋流中之 Ω ，即相當於層流中之 N 。實際 N 相當於 2Ω (註三)。及 Ω 愈大，速度之集中亦愈大。又 U 小時為線性問題 (Linear Problem)， U 大時為非線性問題 (Non-linear Problem)。

當層流中 $F > \frac{1}{\pi}$ ，及旋流中 $Ro > 0.261$ 時，

將無「速度集中」現象發生。前者業經 C. S. Yih (易家訓，國人)，及後者業經 R. Long 於理論與實驗中證實 (另有關於層流與旋流研究，可參看所列參考文獻 (1)(2)(3))。而於：

$$F < \frac{1}{\pi} \approx 0.318$$

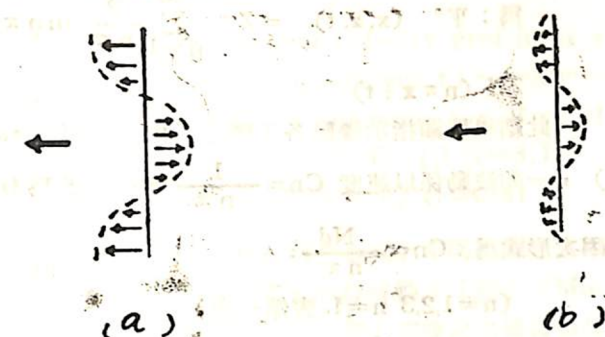
$$Ro < 0.261$$

情形下出現「速度集中」或稱「選擇流出」乃係講者等 (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7)(8) 研究求得。其實驗結果與理論推釋，甚為一致。因 $Ro = 0.261$ ，或 $F < 0.318$ 時，流動速度小，黏性效應變為甚相重要。而 Yih 及 Long 所建立之控制方程系，未考慮黏性作用 (Viscous effects)，故不能應用於上述兩臨界條件內流體之運動。

以下所述為有漏 (Sink) 時，層流中擾動 (Disturbances) 發生之情形。

開始時流體為靜止，而後在「漏」(Sink) 處突然開始流出 (Discharge)，致在「漏」處造成擾動 (Disturbances)。其擾動係向上游傳播，即：與基本流動之流向相反。擾動之模 (Modes)

，略如圖六所示。



圖六、層流有漏 (Sink) 情形下，各擾動之模 (Modes) 型式及運動舉例。 (a) 第一模，(b) 第二模。

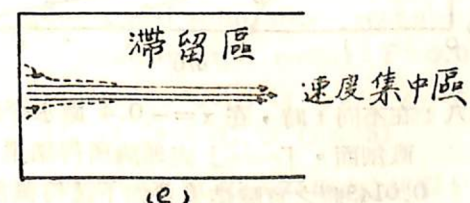
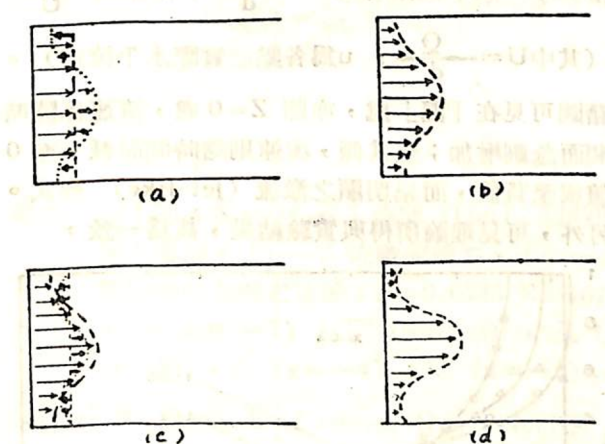
各不同之模式均以不同速度向上游傳播，惟波動模式愈高，其波速愈小，各模之速度如下：

$$\text{第一模者為 } C_0 = \frac{Nd}{n\pi} = \frac{Nd}{\pi} \quad (n=1)$$

$$\text{第二模者為 } C_1 = \frac{Nd}{n2\pi} = -\frac{1}{2} C_0 \quad (n=2)$$

$$\text{第三模者為 } C_2 = \frac{Nd}{n3\pi} = -\frac{1}{3} C_0 \quad (n=3)$$

故較高之擾動模式，因其移速將較流體流動速度為小，致無法越過而向上游傳播 (註五)，其擾動發生及造成選擇流出 (Selective withdrawal) 之程序略如下述：



圖七、層流有漏 (Sink) 情形下，各擾動向上游傳播之情形。 (a) 受第一模影響時； (b) 受第一模影響後之流速剖面； (c) 受稍後移至二模影響時， (d) 受第二模影響後之流速剖面； (e) 受向上游傳播各模次第影響下，最後在穩定狀態時之流速剖面。沿流軸之處造成速度之集中，兩側則為滯留區 (Stagnant Zone)。

第一階段：流體排出 (Discharge) 開始。此瞬時之所有流場為非旋轉流動或稱位流 (Irrotational or potential flow)，流動均勻一致，見圖七a。

第二階段：因「漏」處擾動各「模」，連續向上游傳播，及各「模」間非線性之交互作用，漸造成如激流形式 (Jet-like) 之擾動，見如圖七b，c，d。圖七b為第一模 (參見圖六a) 到達時之流場剖面。圖七c為第二模隨後到達時之流場剖面。圖七d為第一及第二模到達並交互作用後之合成剖面圖。藉圖七d可見，激流式之擾動更見增強。

第三階段：由於各連續擾動之模次第向上游傳播及滯聚而造成沿「漏」軸上之顯著速度集中帶，亦即選擇流出層 (Selective withdrawal layer)。

第四階段：穩定狀態 (Steady-state) 速度剖面之建立。在選擇流出層兩側造成完全之滯留區。佛路德數， F ，愈小，滯留區範圍愈大。

於旋流情形下，「選擇流出」現象與層流情形相若。其出現係在洛士貝數 (Rossby number) 甚小之時 ($Ro < 0.261$)。此時流出流量大於上游流心 (flowing cone) 中之流量。故實際在艾克曼邊界層中亦同時有流體排出。 (參見圖三c)。

以下為鮑威平博士對本問題藉幻燈片所作之部份介紹：

(1) 層流中「選擇流出」動力學

對二維不可壓縮，無黏性及無擴散流體，控制方程式包括 X 、 Z 軸之兩運動方程，連續方程，及不可壓縮方程，並經 Boussinesq 近似化之型式，因變數為 u^* ， w^* ， P ， ρ' ，分別為

$$\rho_0 \left(\frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} \quad (1)$$

$$\rho_0 \left(\frac{\partial w^*}{\partial t} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z} \right) = -\rho' g \frac{\partial P}{\partial Z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial w^*}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + u^* \frac{\partial \rho'}{\partial x} + w^* \frac{\partial \rho'}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

$$\text{式中 } \rho' = \rho(Z) + \rho^*(x, z, t) \quad (5)$$

$$\bar{\rho} = -\frac{\rho_0 - \rho_s}{d}(Z-d) + \rho_s \quad (6)$$

藉上各式消去氣壓並代入氣流函數

$$u^* = \frac{\partial \Psi^*}{\partial z}, \quad w^* = -\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \quad \text{後得控制方程式:}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta^* \Psi^* + \frac{\partial \Psi^*}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} \Delta^* \Psi^* - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \Delta^* \Psi^* = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho^*}{\partial x} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \frac{\partial \Psi^*}{\partial z} \frac{\partial \rho^*}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \frac{\partial \rho^*}{\partial z} = -\frac{\rho_0 - \rho_s}{d} \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \quad (8)$$

將(7)(8)兩式標準化，並以 Ψ , $NQ\rho_0/gd$, d , $1/N$ 及 $U=Q/d$ 為相應特性氣流線函數，密度，長度，時間與速度標尺（非一般性符號已各見文中所述）。經標準化後，上述(7)、(8)可寫為：

$$\frac{\partial \Delta \Psi}{\partial t} + F \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \Delta \Psi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \rho}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + F \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial \rho}{\partial z} \right) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (10)$$

(9)(10)為因變數與之完全方程式。

經線性化（引入 F 之微擾級數）得 0 次（Zeroth order） Ψ^0 與 ρ^0 之控制方程式為：

$$\frac{\partial^2 \Delta \Psi^0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \Psi^0}{\partial z^2} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 \Delta \rho^0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \rho^0}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

引入邊界及起始條件，並藉以下表明式代入

$$\Psi = \Psi^0 - ZH(t) \quad (12)$$

($H(t)$ 為 Heaviside unit step func-

tion) 並經較複雜數學處理而求得(11)式之解

$$\text{為: } \Psi^0(x, z, t) = Z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \sin n\pi \quad (13)$$

$$ZH(n\pi x + t) \quad (13)$$

此結果明顯指示擾動各不同之「模」(Modes)，一如波動係以速度 $C_n = \frac{1}{n\pi}$ 移行。改為有

$$\text{因次形式為: } C_n = \frac{Nd}{n\pi} \quad (14)$$

($n=1, 2, 3 \dots$ 表第一模)

此如波動狀之擾動模式被稱為圓柱擾動 (Columnar disturbances) 或稱頻率為零之圓柱狀波動 (Columnar waves of zero frequency)，因其係以呈水平狀激流柱 (Horizontal jet-like Columns) 之形式。有關層流中「選擇流出」理論僅簡介至此為止。

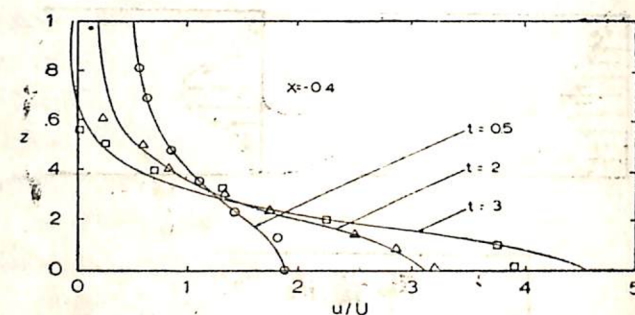
以下為藉上述理論及實際試驗所得某些結果之介紹（講演時係用幻燈片）。

圖八所示為在不同時間 t ，在 $x=-0.4$ 處（此處 $x = \frac{X}{d}$ ， t 係實際時間除以 N^{-1} ，均為無

因次者。負號表上游方向， d 表流體厚度）之水平速度之垂直剖面。各曲線為藉理論得出者。至各時間之實驗所得數值各以中空之圓形，三角形及正方形表示。圖中縱標為 $Z = \frac{z}{d}$ ，橫標為 $\frac{u}{U}$

（其中 $U = \frac{Q}{d}$ ， u 為各點之實際水平流速）。

藉圖可見在「漏」處，亦即 $Z=0$ 處，流速係隨時間而急劇增加；至其側，流速則隨時間而減小至 0 值或至負值，而呈明顯之激流 (jet-like) 形式。另外，可見理論所得與實驗結果，甚為一致。

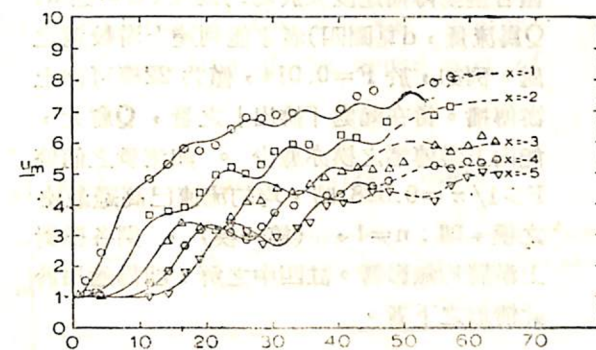


圖八：在不同 t 時，在 $x=-0.4$ 處水平速度之垂直剖面。「——」表理論所得結果，於 $F=0.0143$ 時之實驗結果各如下述符號所示：

Δ ($t=2.04$), $\square$ ($t=3.15$), 及 $F=0.062$ 時: $\circ$ ($t=0.5$)。

Figure 8. Horizontal velocity profile at $x=-0.4$ for various t ; —analytic theory; experiment for $F=0.0143$: Δ ($t=2.04$), $\square$ ($t=3.15$) and $F=0.062$: $\circ$ ($t=0.5$)

圖九為在沿「漏」處中心軸上不同距離之水平速度 U_m 隨時間分佈，示各波動之「模」(Modes) 連續滙合之情形。圖中實線之曲線為根據 Navier Stokes 運動方程之數值解答，另各種符號（如圓形，三角形等）代表實驗所得結果。本例係代表 $F=0.0143$ ，及雷諾數 (Reynolds number)， $Re=625$ 時之情形。在此甚低之佛路德數下，吾人可清晰見出各波動之「模」，次第到達上游，彼此聚合，並加強水平速度。例如在 $x=-3$ 處，吾人可見五個波「模」，並造成五相對之最高 U_m 值。各較高之「模」，由於黏性及非線性交互作用影響，並未到達其應有最強之值。例如，當運動黏性 $\nu=10^{-3} \text{ ft}^2/\text{sec}$ ， $1/N=1.75 \text{ sec}$ 時，第五模之波幅被減少一 e^{-1} 之比例值，較高之模削減更甚，故對速度場之進一步發展甚少助力。

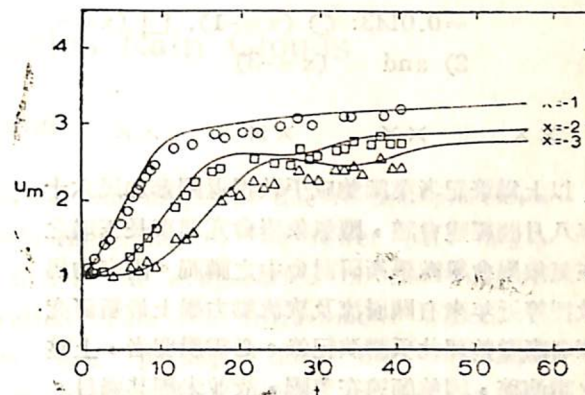


圖九：在不同 x 處，中心線上速度 (U_m) 隨時間增大增形，「——」表數值解答，「.....」實驗所得各點之連線； $F=0.0143$ $Re=625$ ， $\circ$ ($x=-1$), $\square$ ($x=-2$), Δ ($x=-3$), $\circ$ ($x=-4$), ∇ ($x=-5$)。

Figure 9. Growth of center-line velocity with time at various x ; —numerical solution, ---connection of experimental points; $F=0.0143$, $\circ$ ($x=-1$), $\square$ ($x=-2$), Δ ($x=-3$), $\circ$ ($x=-4$), ∇ ($x=-5$)

圖十為 $F=0.106$ ， $Re=3440$ 時之情形。佛

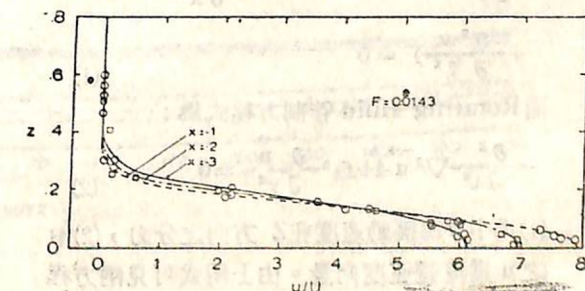
路德數愈大，非線性作用 (Non-linear effects) 愈見重要，故到達穩定之狀態愈早。在圖九之高佛路德數下，僅兩波「模」能向上游傳播，非線性作用至強，第一模之強度仍與解析之解答相若。非線性作用顯似已壓制其他各「模」。



圖十：在不同 x 處，中心線上速度 (U_m) 隨時間增大情形， $F=0.106$ ， $Re=3440$ ： $\circ$ ($x=-1$), $\square$ ($x=-2$) Δ ($x=-3$)。

Figure 10. Growth of center-line velocity with time at various x ; —numerical solution, $F=0.106$: $\circ$ ($x=-1$), $\square$ ($x=-2$) and Δ ($x=-3$)

圖十一所示為 $F=0.0143$ 時，在 $x=-1$ ， -2 ，及 -3 處，於穩定狀態 (Steady-state) 情形下水平速度 (u/U) 之垂直剖面。另 $F=0.032$ ， $F=0.07125$ 及 $F=0.106$ 之圖亦經作出（此處略去）。在所有情形，穩定狀態水平速度剖面均明顯顯示一完全靜止區 (Stagnant zone，即 u/U 為 0 值時) 及一流動或排出層 (A flowing or withdrawal layer) 之存在。且均未見可量度之迴流 (Reverse flow)。當佛路德數愈小時，排出層，或選擇流出層將愈見集中，此與理論上之解釋，流場係由於擾動自「漏」(Sink) 處向上游傳播所造成，完全一致。



圖十一：在 $x=-1$ 、 -2 及 -3 處，穩定狀態下之水平速度之垂直剖面； $F=0.0143$ ：○ ($x=-1$)，□ ($x=-3$) 及◇ ($x=-3$)。

Figure 11. Steady-state horizontal velocity profile at $x=-1$, -2 and -3 ; $F=0.0143$: ○ ($x=-1$), □ ($x=-2$) and ◇ ($x=-3$)

×× ×× ×× ××

以上為筆記者業師鮑咸平教授返國參加民六十二年八月間經建會議，應氣象學會允理事長玉瑾之邀在氣象學會舉辦學術研討會中之講詞。內容均為鮑教授等近年來有關層流及旋流動力學上最新研究。筆者應邀整理此項講演紀錄。必需說明者，上整理之講演稿，因鮑師遠在美國，故並未經其過目。文中如有失誤之處，概由筆記者負責。

註一：因在重力場中密度分層流體當受到一輕微擾動而驅離其平衡位置時，因浮力及重力影響而造成重力波。當密度均勻時

$$N = \sqrt{-\frac{d\rho}{dz}g / \rho_0}$$

$=0$ (N =Brunt-Väisälä Frequency)
，無波動，此時流體為中性，可隨遇平衡。

註二：在旋轉流體中，由於邊界層摩擦影響，流體亦將作Solid rotation。如流體質點受輕微擾動向外移動，如周圍流體之離心力大於該流體質點之離心力時，以離心力不足，該質點將返回其原位置。但當返回時，質點獲得動能，並向內移過其平衡位置。以動能增加，因之離心力又增大，如此往復波動，即所謂離心波 (Centrifugal wave or inertia wave)。

註三：按 Stratified fluid 中小振幅波動之管制方程式為：

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^2 w) + N^2 \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (1)$$

而Rotating fluid 管制方程式為：

$$-\frac{\partial^2}{\partial t^2} \nabla^2 \vec{u} + 4\Omega^2 \frac{\partial \vec{u}}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

(1)式中 w 為擾動速度在 Z 方向之分力，(2)中之 $\vec{u}$ 為流體速度向量。由上兩式可見兩方程

式甚為類似，並可知：

N 相當於 2Ω

註四：按 Stratified fluid 中大振幅 (Finite Amplitude) 波動管制方程式為：

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right) \Psi - F^{-2} \eta = -F^{-2} \Psi$$

ξ, η, Ψ, F 此處均為無因次者， $\xi = \frac{x}{d}$ ， $\eta = \frac{z}{d}$ ， $\Psi = \frac{\psi}{Ud}$

在於有 Sink (漏) 情形之解為：

$$\Psi = \eta + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp[-(n^2 \pi^2 - F^{-2})^{1/2} \xi] \sin n \pi \eta$$

其解僅於 $F > \frac{1}{\pi}$ 時才有效。於此情形

下，無Velocity concentration出現。(見參考書目3中，Stratified flow into a sink一節之討論)。

註五：在線性化理論 (Linearized theory) 有效之流場中，各擾動之模 (Modes) 係次第抵達，且其解僅為各模之疊加。但流動開始後，整個流場，係流向漏 (Sink) 處，故僅各擾動傳播速度大於均勻流速 ($U=Q/d$ ， Q 為流量， d 見圖四)者才能到達上游較遠之處。例如，於 $F=0.014$ ，僅共22模可向上游傳播。當在漏處「排出」之量， Q 愈大，能向上游傳播之模亦愈少。如流量之值使 $F \geq 1/\pi = 0.328$ 時，均勻流速已高過最快之模，即： $n=1$ ，(第一模)，則各模對上游將均無影響。註四中之解，即為適用於此情形之下者。

有關層流與旋流動力學參考書目

1. Greenspan, H.P., "The theory of rotating fluids" Cambridge Uni. Press, 1968.
2. Phillips, O. M., "The dynamics of upper ocean". Cambridge Uni. Press, 1966.
3. Yih, C.S., "Dynamics of non-homogeneous fluids", New York, Mac-Millan Company, 1965.

(下接14頁)