

# 相當正壓模式之修訂 及近地層模式之初步研究<sup>1</sup>

劉 廣 英<sup>2</sup>

The modification of Equivalent Barotropic Model  
and

A preliminary study of the Surface Boundary Layer Model

## Abstract

The Equivalent Barotropic model, which is using by CAF Weather Central, is modified in two folds: adding the frictional and very long wave effects into the model, and the orographical effects which already included in the model is changed by using the surface wind (which is derived from the upper level wind) in calculation. Numerical experiments show that each effect has some contributions to the numerical prediction especially the long wave term.

In the second part of this report, the important features of the boundary layer model are described. Also there are problems in developing this model, it can be solved in the future. And, for the purpose of Air Force operation, we think it is worth to develop this model into operation.

Some numerical results are presented in this paper.

## 一、前 言

本文包括相當正壓模式之修訂，及近地層模式之初步研究設計。就國內當前資料及設備狀況而言，正壓模式乃唯一可用於日常天氣預報作業之模式。因而在國科會支助下，空軍氣象部隊一直以此模式為研究對象。經兩年之努力，現已可用以製作500mb高空預測圖，且已獲得部分統計結果<sup>(1)</sup>。上項結果顯示，利用正壓或相當正壓模製作之預測圖，在預報上均具實用價值，但亦有其無可諱言之缺失，故在過去一年中，改進上述二模式，為研究重點之一。再者，低雲及霧為影響飛行安全之重要天氣因素，為能將此種因素之預報數值化，近地層大氣秉性之數值預報，即近地層模式之研訂，自屬必須進行者，由於國內外屬此範疇之參考資料不多，研究中問題就一定很多，唯經一年之努力，已為未來後續研究工作，奠定良基，再下功夫將不難有所成就。以下謹就各項研究結果簡介之，如有錯失

，尚祈學者先進不吝指教，以為今後研究之指針，則公私幸甚。

## 二、相當正壓模式之修訂

相當正壓模式使用之預報方程為<sup>(2)</sup>

$$\nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla \eta + \eta \frac{\partial \omega}{\partial p} \dots\dots(1)$$

即較正壓模式增加輻散項  $\eta \frac{\partial \omega}{\partial p}$ 。在過去吾人使用之模式中，此項係根據垂直平均方式化為<sup>(2)</sup>

$$\frac{A(p_0) f_0 g h}{R T_0}$$

統計顯示其對預報之影響並不大<sup>(1)</sup>。為增加此項之作用，使模式更能配合實際狀況，吾人特根據美國中央氣象局多年之經驗<sup>(3)</sup>，作兩項修訂：(一)將地形、地面摩擦，以及長波等效應所引起之輻散作用均考慮及之，(二)以實際風場計算各效用之大小。

### 1. 地形效應：

如右圖所示

$$\frac{\omega_M}{U_{sfc}} = -\frac{\partial p_g}{\partial x}$$

1. 本文之完成曾獲行政院國家科學委員會獎助。

2. 本作者曾獲曲克恭先生指導及協助。

即氣流線之斜率與地形者相同，亦即認定在地形作用下，空氣係沿地表流動。

$$\therefore \omega_M = U_{sfc} \frac{\partial p_g}{\partial x} = \vec{V}_{sfc} \cdot \nabla p_g$$

亦即由地形所引起之垂直運動 ( $\omega_M$ ) 可由地面風 ( $\vec{V}_{sfc}$ )，及地面氣壓 ( $p_g$ ) 之梯度計算得之。又設地形之影響止於某一高度 (如 200mb) 面，即在該高度上因地形引起之垂直速度 ( $\omega_T$ ) 可視為 0，則得

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_M}{\partial p} &= \frac{\omega_M - \omega_T}{p_g - p_T} \approx \frac{\omega_M}{p_g - p_T} \\ \therefore \frac{\partial \omega_M}{\partial p} &= \frac{\vec{V}_{sfc} \cdot \nabla p_g}{p_g - p_T} \end{aligned} \quad (2)$$

上式中包括地面風 ( $\vec{V}_{sfc}$ )，不過在運算中吾人

$$\frac{\partial \omega_M}{\partial p} = \frac{J(\Psi, p_g) - CJ(h, p_g)}{p_g - p_T} \quad (3)$$

## 2. 地面摩擦效應：

根據 Cressman<sup>(4)</sup> 之推導可知在摩擦層頂，由摩擦作用所引起之垂直速度為

$$\begin{aligned} \omega_F &= \frac{g}{f} \left( \frac{\partial \tau_x}{\partial y} - \frac{\partial \tau_y}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\rho g}{f} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (C_d V_{sfc} U_{sfc}) - \frac{\partial}{\partial x} (C_d V_{sfc} V_{sfc}) \right] \end{aligned}$$

式中

$$V_{sfc} = \sqrt{U_{sfc}^2 + V_{sfc}^2} \quad \text{或} \quad V_{sfc}^2 = \vec{V}_{sfc} \cdot \vec{V}_{sfc}$$

上式亦可改寫為

$$\omega_F = \frac{\rho g}{f} V_{sfc} \left[ -C_d \xi_{sfc} + V_{sfc} \frac{\partial C_d}{\partial n} + C_d \frac{\partial V_{sfc}}{\partial n} \right] \quad (4)$$

式中

$$\xi_{sfc} = \frac{\partial V_s}{\partial x} - \frac{\partial U_s}{\partial y} \quad \text{為地面渦度}$$

由於(4)式中右側第二項較小，而地面水平風切 (第三項) 在預報上有困難，故化簡為

$$\begin{aligned} \omega_F &= \frac{C_d \rho g}{f} V_{sfc} \xi_{sfc} \\ &= \frac{1}{f} \rho g C_d V_{sfc} (\nabla^2 \psi - C \nabla^2 h) \\ \therefore \frac{\partial \omega_F}{\partial p} &= \frac{1}{f} \frac{\rho g C_d V_{sfc} (\nabla^2 \psi - C \nabla^2 h)}{p_g - p_T} \end{aligned} \quad (5)$$

## 3. 長波效應：

相當正壓模式為一絕熱模式，故由簡化後之熱力能量方程<sup>(2)</sup> 可求得與長波效應相當之垂直速度，即

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( -\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) = -\vec{V}_g \cdot \nabla \left( -\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) + \sigma \omega_L$$

此式表示一地等壓面上溫度之變化 ( $-\frac{\partial \phi}{\partial p} \sim \text{厚度} \sim \text{溫度}$ )，係由平流及垂直運動所致。一般而言自是以平流項較大，但如僅考慮垂直運動項之作用，則得

$$\omega_L = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \phi}{\partial p} \right)$$

並不使用實際的地面觀測風，而係設  $\vec{V}_{sfc}$  與式(1)

中之  $\vec{V}$  有某一定之關係。本文所採用之關係式係

$$\vec{V}_{sfc} = \vec{V} - \left( \frac{p_g - 500}{350} \right) S_g$$

為美國中央氣象局自1964年以來所沿用者。式中

$$S_g = -\frac{g}{f} \hat{k} \times \nabla h$$

即 850–500mb 之地轉風風切。其中  $h$  為該層之厚度。

設

$$C = \frac{g}{f} \left( \frac{p_g - 500}{350} \right), \text{ 則得}$$

$$\vec{V}_{sfc} = \hat{k} \times (\nabla \Psi - C \nabla h)$$

將之代入式(2)則得

(3)

式中  $\phi = f_0 \Psi$ ，為重力位函數 (geopotential function)； $\sigma = -\frac{1}{\rho \theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$  為靜力穩定參數。

$$\therefore \omega_L = -\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial t} \left( -f_0 \frac{\partial \Psi}{\partial p} \right)$$

又根據相當正壓模式之基本假設「風場隨高度無方向之改變，而僅有速率之改變」，則得

$$\omega_L = -\frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{\partial \omega_L}{\partial p} &= -f_0 \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \left( -\frac{1}{\sigma} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ &= q \frac{\partial \Psi}{\partial t} \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$q = -f_0 \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \left( -\frac{1}{\sigma} \right)$$

將上述三項效應，即式(3)，(5)，(6)代入式(1)即得

$$\nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla \eta + \frac{\eta}{P_g - P_T} (\omega_M + \omega_F) + \eta \omega_L$$

$$\text{或 } (\nabla^2 - \eta q) \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -J(\Psi, \eta) + \frac{\eta}{P_g - P_T} [J(\Psi, p_g) - CJ(h, p_g)] + \frac{1}{f} \rho g C_d V_{sfc} (\nabla^2 \Psi - C \nabla^2 h) \quad (7)$$

上式即為修訂後相當正壓模式之運算方程。

## 三、修訂後相當正壓模式之計算結果

### 1. 各單項之比較及分佈

如前所述，修訂後之相當正壓模式，如公式(7)所示者，右側有四項： $J(\Psi, \eta)$ ， $J(\Psi, p_g)$ ， $J(h, p_g)$  及摩擦項。為比較各項之大小及其分佈

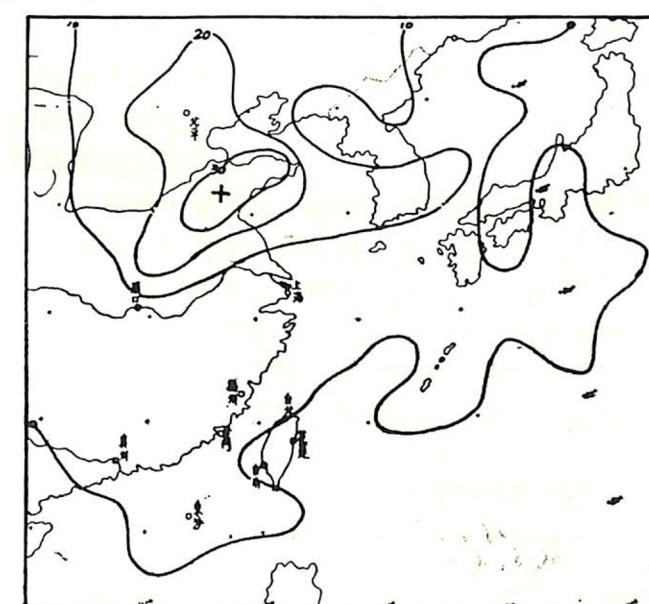


圖 1 相當正壓模式平流項之大小及分佈

Fig. 1 The magnitude and distribution of advection term in the Eguivalent barotropic model.

狀況，特以65年6月24日1200Z天之資料做實際之計算。計算結果分別如圖1，圖2，及圖3所示。此結果顯示，平流項之值最大，此與理論分析結果相符。圖1中有一最大平流區在山東半島，顯示該

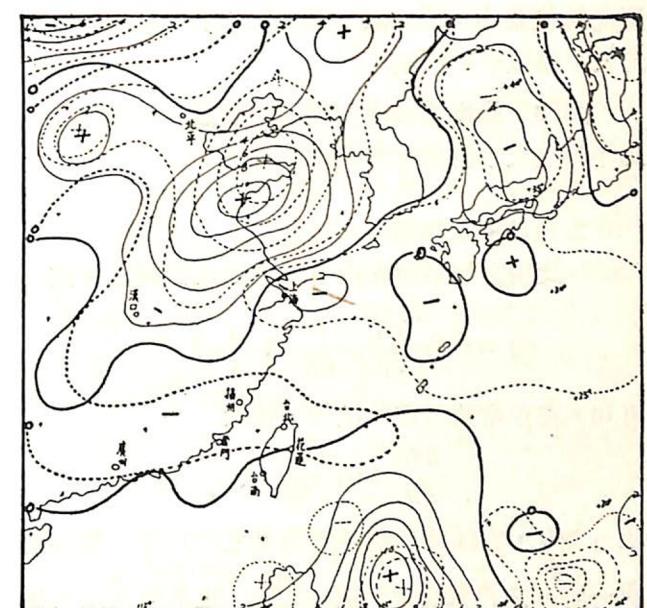


圖 2 相當正壓模式地形項之大小及分佈

—  $J(\Psi, p_g)$  等值線  
.....  $J(h, p_g)$  等值線

Fig. 2 The magnitude and distribution of topographic term in the Equivalent barotropic model  
— isoline of  $J(\Psi, p_g)$   
..... isoline of  $J(h, p_g)$

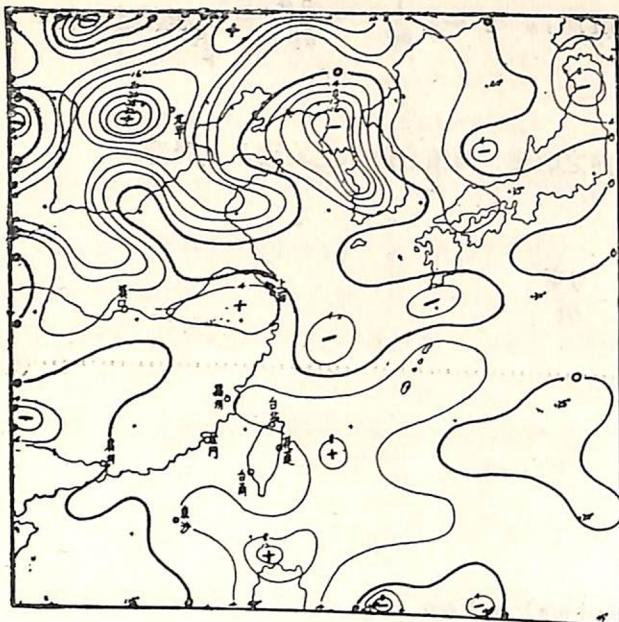


圖 3 相當正壓模式摩擦項之大小及分佈

Fig. 3 The magnitude and distribution of frictional term in the Equivalent barotropic model.

地渦度增加，與主槽將移至該區之現象正相吻合。

圖 2 中包括地形作用之二項，如將虛線值自實線值中減去，而後乘以  $f/(p_s - p_t)$ ，即為渦度隨時變量中，因  $\omega_m$  而增加之量。換算後此項約較平流項小 1 至 2 階。

圖 3 為摩擦效應對模式之貢獻。由圖可見，此作用之大小約與地形項同階。

## 2.長波項之作用：

此項之作用可先由  $q$  之定義探討之。按

$$q = -f_0 \frac{\partial A}{\partial p} \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \right)$$

可知，在正常及穩定狀況下，由於

$$\frac{\partial A}{\partial p} < 0, \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \right) > 0$$

故  $q > 0$ ，亦即此項對系統運動之作用是正是負端視  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  之符號而定，而  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  之符號又以大氣波動運行方向而定。如圖 4 中 A, B 兩點。當波動向東移動，即該槽線向東移動時，A 點之  $\frac{\partial \Psi}{\partial t} < 0$ ，而 B 點者大於零。反之，如該槽線西退，則 A, B 兩點之  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  符號互換，即無論波動向東或向西，此項之作用，均在使其移速減慢。

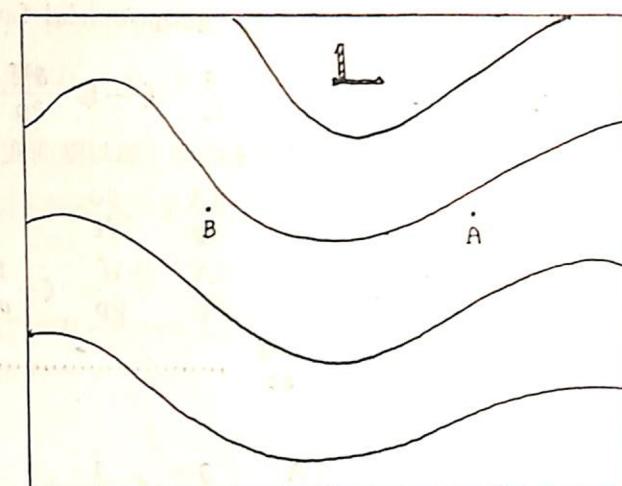
圖 4 槽線移動與  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  之關係示意圖

Fig. 4 Schematic diagram of trough movement and  $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$  variation

尤有進者，由於長波屬穩定波，即  $\frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{1}{\sigma} \right) > 0$ ，而氣旋波則穩定與否並不一定，因而就整體作用而言，此項對氣旋波之作用應不重要，而對長波之西退確有防止作用。如就局部高度變化而言，此種作用使正趨勢加強，而負趨勢減弱，即可使高度場，尤其是長波槽附近者，普遍升高。

由於  $q$  值計算複雜，且在原始資料輸上較難滿足計算需要，因而在數值實驗中，吾人採用定值，就所選個案分析顯示， $q\eta$  約在 0.14 至 0.2 之間。將此值代入模式後，24 小時預報之高度場，約較  $q=0$  時預報值高 60 動力公尺。圖 5 為臺灣附近地區  $q=0$  (實線) 及  $q\eta=0.16$  (虛線) 之 24 小時 500mb 預測圖，長波效應對高度場之修正極為明顯。如與當時實際 500mb 圖相較，預測高度仍偏低，此乃由於客觀分析結果即偏低<sup>(1)</sup> 之故。

將  $q$  視為定值，在實用上，由於長波在實際天氣圖中之作用程度並不一成不變，自亦有不可避免之誤差存在。下述畢莉 (Billie) 颱風預報結果，就與圖五個案所得結果不相同。

## 3. 颱風畢莉預報結果：

由圖 6 可見，本模式對颱風畢莉中心位置之預報，有相當正確之指示（圖中颱風中心位置系根據預測之等高線形式主觀訂定），而對導流系統之預測尤屬正確。

在此個案中  $q$  項之作用不明顯，此種結果甚合理，因由比較圖 5 與圖 6 可見，長波在前圖中

明顯的多，因而作用自亦較大。個人認為  $q$  採定值為簡便之可行方法，但究竟為若干，似應配合當時之天氣圖加以修正。或就歷史資料計算  $q$  值，而後利用統計分類，作為實際預報圖時引用  $q$  值之參考。

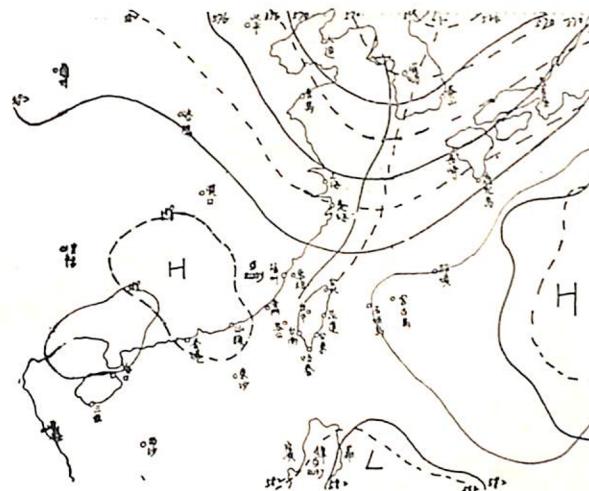
圖 5 根據 65 年 6 月 20 日 1200Z 製作之 24 小時 500mb 預測圖 (粗實線  $q=0$ ；虛線  $q\eta=0.16$ ，細 588 實線為實際天氣圖高度)

Fig. 5 24hrs 500mb prognostic chart, based on 1200Z, 7, Aug. 1976  
(thick solid  $q=0$ ; dashed  $q\eta=0.16$ , thin solid 588 line real height)

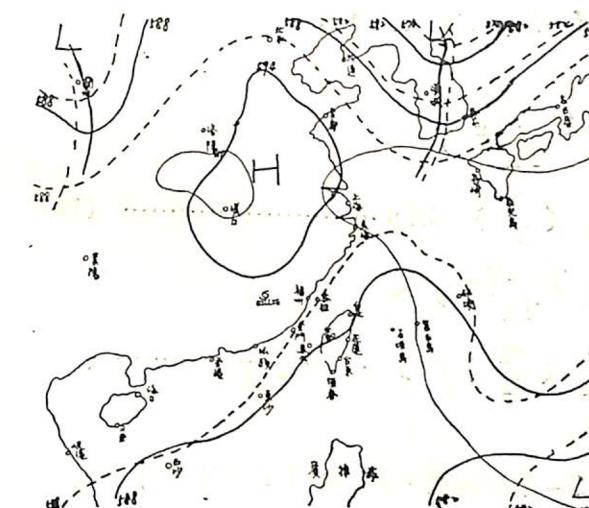
圖 6 65 年畢莉颱風根據 8 月 9 日 1200Z 製作之 24 小時 500mb 預測圖 ( $q=0$ ，虛線  $q\eta=0.16$ ，細 588 實線為實際天氣圖之高度)

Fig. 6 24hrs 500mb prognostic chart, based on 9, Aug. 1975 (thick solid  $q=0$ , dashed  $q\eta=0.16$ , thin solid 588 line real height)

## 四、近地層模式

### 1. 大氣分層及特性

任何物體運動均為受到相當作用力之結果，大氣運動自不例外。故根據所受作用力之不同，大氣中可分為以下三層（如圖 7 所示）：

(1) Prandtl 層：對大氣而言，地表為一固定邊界，所謂 Prandtl 層，即在地表上 30 至 100 公尺之一層，在此層內摩擦力較空氣所受其他力大很多，故其運動方程可寫成  $\partial |\tau| / \partial z = 0$ ，即  $\tau_{xy} =$  常數。此處  $\tau_{xy}$  為水平方向之渦流切應力 (eddy shearing stress)。

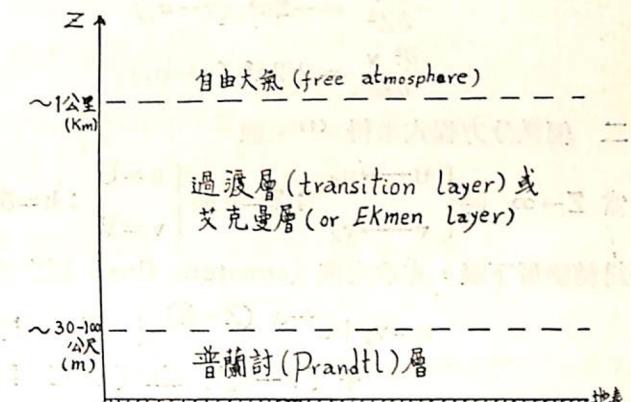


圖 7 大氣垂直結構

Fig. 7 Vertical structure of the atmosphere

(2) 過渡 (transition) 層：又稱 Ekman 層，即空氣運動 (或風) 由地面狀況轉變至自由大氣運動狀況之空域。在此層內，摩擦力 ( $\partial \tau_{xy} / \partial z$ ) 項在運動方程式中之重要性，隨高度遞減，直至此層頂時減至可省略之程度，因為此層中空氣之運動特性為地轉 (geostrophic) 加摩擦作用之狀況。

(3) 自由大氣層：即地轉或梯度 (gradient) 平衡層，此處大氣運動已近似不受摩擦力之影響。

本文中所指之近地層，包括上述(1)(2)兩層，與專指 Prandtl 層之近地層不同。

### 2. 數學結構：

設  $K_H$  = 渦流傳導係數 (Coef. of eddy conductivity)

$K_v$  = 渦流擴散 (diffusivity) 係數

$\hat{w}$  = 地形所導致之垂直速率

$w$  = 摩擦作用生成之垂直速率

則溫度 (T)、比濕 (Q)、及空氣之含水量 (= Q 加液態水, R) 之趨勢方程式，可分別寫成

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla T - \omega \left[ \frac{\partial T}{\partial Z} + \frac{g}{C_p} \right] - \hat{\omega} \frac{g}{C_p} + \frac{\partial}{\partial Z} [K_H \frac{\partial T}{\partial Z}] + \frac{dt}{dt} \quad \text{非絕熱作用} \quad (7)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla Q - \omega \frac{\partial Q}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial Z} [K_V \frac{\partial Q}{\partial Z}] - \frac{dQ}{dt} \quad \text{狀態轉換作用} \quad (8)$$

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla R - \omega \frac{\partial R}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial Z} [K_V \frac{\partial R}{\partial Z}] \quad (9)$$

以上諸式中之符號均為慣用者。

### 3. 先決條件：

解公式 (7)、(8) 及 (9) 所需要之先決條件可分別以下述方法求得：

(1) 各層之風場可由解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Z^2} = -2\alpha^2 (v - v_g)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial Z^2} = +2\alpha^2 (u - u_g)$$

### 二 偏微分方程式求得 (7)。設

$$\text{當 } Z \rightarrow \infty \text{ 時} \begin{cases} u \rightarrow u_g \\ v \rightarrow v_g \end{cases}; \text{Z=h 時} \begin{cases} u=U \\ v=V \end{cases}; h=50 \text{ 公尺}$$

為轉變層下限，亦取定流 (constant flux) 層之厚度。根據此條件，則可求得

$$u = v_g + e^{-\alpha(Z-h)} \{ [U - u_g] \cos [\alpha(Z-h)] + [V - v_g] \sin [\alpha(Z-h)] \} \quad (10)$$

$$v = v_g + e^{-\alpha(Z-h)} \{ [V - v_g] \cos [\alpha(Z-h)] - [U - u_g] \sin [\alpha(Z-h)] \} \quad (11)$$

上式中 Z 自 h 上一層，即模式第二層，向上延伸至模式頂層 (Z=H)，為 u 及 v 之所在高度。 $\alpha \approx (f/2km)^{1/2}$ ; f 為柯氏參數，K\_m 為渦黏滯係數 (Coef. of eddy viscosity)。

(2) 各層地轉風則由解下二式 (7) 求得

$$u_g = v_g^H + \left[ \frac{H-Z}{H-h} \right] \left[ (u_g^H - \tilde{u}) \left( \frac{T_h - T_H}{T_m} \right) - \frac{m_g T_h}{f} \int_h^H \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{T} \right) dZ \right] \quad (12)$$

$$v_g = v_g^H + \left[ \frac{H-Z}{H-h} \right] \left[ (v_g^H - \tilde{v}) \left( \frac{T_h - T_H}{T_H} \right) + \frac{m_g T_h}{f} \int_h^H \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{T} \right) dZ \right] \quad (13)$$

式中

$$\tilde{u} = -\frac{mg}{f} \frac{\partial E}{\partial y}, \tilde{v} = +\frac{mg}{f} \frac{\partial E}{\partial x}, E = \text{地形高度}, T_h \text{ 及 } T_H \text{ 則分別為 } Z=h \text{ 及 } Z=H \text{ 時之溫度}, m \text{ 為天氣圖比例因子。}$$

上式中  $u_g^H$  及  $v_g^H$  模式上限之地轉風分速，是經由自由大氣預報模式，外差求得。

(3) 垂直風場：

摩擦所導致之垂直運動，由下式求得

$$\omega(Z) = -m \int_h^Z \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dZ$$

地形所導致者則由下式求得

$$\hat{\omega} = m \vec{V} \cdot \nabla E$$

(4) 比濕 Q 可利用 Tetan 公式求得 (7)

$$Q = \frac{3.8 \times 10^{-3}}{P_s} \exp \left[ 17.25 \left( \frac{T-273.0}{T-35.7} \right) \right]$$

式中

$$P_s = [1013.0 - 1.065 \times 10^{-3} (Z+E)]$$

為地面氣壓。Z 及 E 均以公分為單位。

(5) R 在起始時令與 Q 相等，以後則

$$R = Q + \text{液態水。}$$

(6) 交換係數：根據  $R_i ( \equiv \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Z} / | \frac{\partial v}{\partial Z} |^2 )$ ，李察遜數 (Richardson number) 分兩種狀況求得，即

當  $R_i \leq -0.03$  時，假定渦流 (eddy) 為純對流性者，則

$$K_V = K_H = \lambda Z^2 \left| \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial Z} \right|^{1/2} = \lambda Z^2 \left[ \frac{g}{T} \left| \frac{\partial T}{\partial Z} \right| + r \right]^{1/2}$$

當  $R_i > -0.03$  時，則認定有迫生 (forced) 渦流存在，即

$$K_V = K_H = [kZ (1 - \beta R_i)]^2 \left| \frac{\partial v}{\partial Z} \right|$$

式中 k 為 von Karman 常數 ( $=0.38$ )； $\lambda$  及  $\beta$  為經驗常數 (分別使用 0.9 及 2.0)。

(7) 飽和調整：

當飽和發生時，Q、R、及 T 均發生變化，故須作適當之調整。本模式係採用 McDonald (8) 之方法為之。如圖 8 所示， $P_0$  ( $e_0$ ,  $T_0$ ) 為飽和氣塊 (parcel) 未調整前之狀況。此時之飽和水汽壓狀況為  $P_s$  ( $e_{sc}$ ,  $T_0$ )。由於凝結之發生，T 會上升，因而導致  $P_s$  上升，最後二者交於  $P'$  ( $e_{s'}$ ,  $T'$ )，即到達調整後之狀況。

上述過程可由以下方程式示之：

$$\frac{(e'_s - e_{so})}{(T' - T_0)} = (\epsilon L e_{so}) / R T_0^2 \quad (14)$$

$$e_0 - e'_s = \frac{C_p P}{\epsilon L} (T' - T_0) \quad (15)$$

$$T' - T_0 = \frac{\epsilon L R T_0^2}{(C_p P R T_0^2 + \epsilon^2 L^2 e_{so})} \times (e_0 - e_{so}) \quad (16)$$

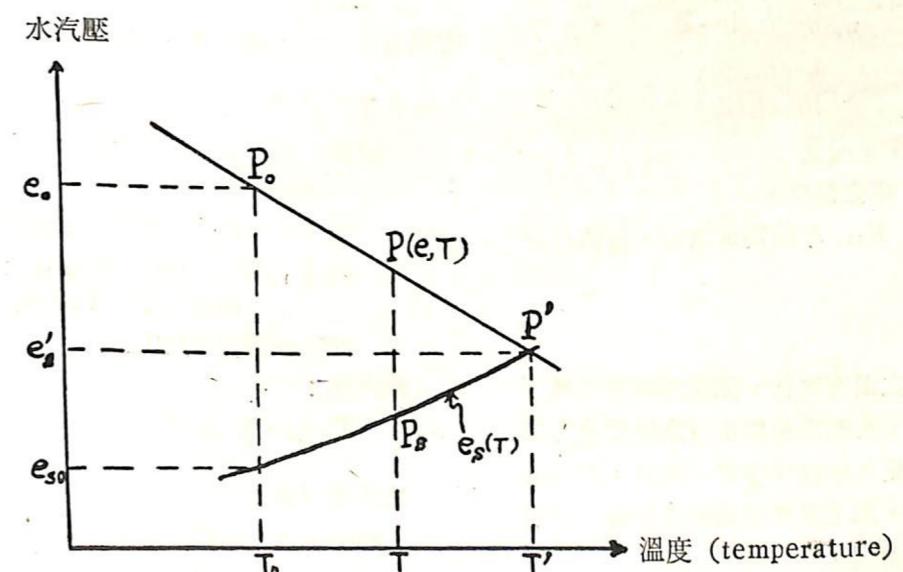


圖 8：飽和調整圖 (取自 McDonald)

Fig. 8 Graphical interpretation of the process of saturation-adjustment  
(adopt from McDonald)

