

中低緯度地區氣象場統計結構及其 在最佳內插客觀分析上之應用

王光弘¹ 曾忠一^{2,3}
翁興中¹ 何台華¹ 劉禎¹

¹ 中正理工學院國防科學研究所

² 中央研究院物理研究所

³ 國立台灣大學大氣科學系

(中華民國八十四年八月二日收稿；中華民國八十五年一月二十三日定稿)

摘 要

本文研究是屬於數值天氣預報中初始場建立的探討。文中著重於氣象變數統計場的計算，及中低緯度地區最佳客觀分析的應用。

現今先進國家所使用的最佳客觀分析法，經多方驗證改良，證實能夠改進數值天氣預報的準確性，在非定時資料的四維資料同化過程中，亦證實較以往所使用的客觀分析法，更具解析能力。基本上，最佳內插法在統計上是令內插誤差在最小平方條件下達到最小值，進而引進均質與各向同性的自相關函數統計結構，藉著這個與距離為函數的自相關函數統計量，測站的資料便可以內插到網格點上。由於地理區域不同，各個地理區域的氣象場統計結構未必相同。因此，本文嘗試以中低緯度地區氣象場三個變數(h, u, v)大量的觀測資料，計算其相互間的相關函數，得到該地區具有代表性的空間統計結構，這個統計結構能確實反應該地理區域的統計特性。在計算高度場自相關函數模式時，我們提出一種新的模式，其目的是希望能夠追蹤更細微的統計結構。此外藉著地轉條件，我們可獲得高度場、風場分量間的九個相關模式，可供日後數值天氣預報初始值建立之參考。最後，我們將模式應用到最佳內插客觀分析法，並測試模式在內插過程中的各種特性。

分析結果顯示，在地轉條件下，推導的九個相關模式與實際觀測資料所算出之統計結構在型態上能夠相互配合，由於九個相關模式是藉著地轉條件而獲得，因此代表曲線配合所獲得的高度場自相關模式，能確實反應本區域高度場的統計特性。此外其應用在目標網格點的內插分析過程中，由分析值與觀測值計算其根均方差結果顯示其準確性、穩定性都極高。

關鍵詞：統計結構、數值天氣預報、相關函數、最佳內插客觀分析法

一、前言

引用氣象上統計、動力的約束條件，藉著數值計算上的分析原理，經由電腦超大的運算及記憶能力，把大量且分佈不規則的氣象測站所量測的資料，內插到分佈規則的網格點上，這個過程就是客觀分析。

多項式近似法客觀分析，首先由美國科學家 Gilchrist 及 Cressman(1954) 所提出來，目前在英國仍然使用中。後來有人沿用多項式近似法的基本精神，而在分析過程中採取些微的改變。多項式近似法的分析步驟是，先令氣象場變數為某種多項式的線性組合，這種多項式一般是採用三角多項式或者球面諧波的函數型態，最後經由最小平方差原理，得到一組線性方程式，再經由測站、網格點相互間的距離而內插到網格點上。這個方法的缺點是所選定的多項式是任意的 (Arbitrary)，不具有特定的物理意義，因此在分析過程中，測站較密、資料品質良好地區仍能具有較佳的分析結果，至於測站較疏、資料品質較差地區，其分析能力則相對的較差。

逐次訂正法客觀分析由 Bergthorsson 和 Doos(1955) 所提出來，目前仍有許多國家在使用中，分析步驟是首先選擇氣候平均值、阻尼持續值 (Damped Persistence)，或者數值天氣預報值作為初始猜測值，然後利用該網格點附近的幾個測站觀測值來逐次修正此一初始猜測值，最後的網格點分析值便是經由該網格點影響半徑 (Radius of Influence) 內的幾個測站資料作一個適當的權重 (Weighting) 而內插到網格點上。通常它所引用的權重函數是具有均質 (Homogeneous) 與各向同性 (Isotropic) 的距離函數，當然後來的研究也有應用非均質或非各向同性的函數，例如 Inman(1970) 提出一種權重函數，在上、下風處加重其權重，這時權重函數就不再只是距離的函數。

最近 20 年來，逐漸發展成熟的最佳內插客觀分析法則是 Gandin(1963) 所發展出來的方法，首先針對氣象場變數 (例如高度場、風場分量、溫度、露點等)，計算具有特性的統計結構 (一般是計算其相關函數) 在空間的分佈，接著應用具備均質與各向同性條件下，具有正定 (Positive Definite) 性質的數學模式，得到與地理上相互兩點距離有關的氣象場自相關 (Autocorrelation) 函數模式，藉著此模式求得最佳內插係數再內插到網格點上。目前先進國家在進行數值天氣預報初始場建立時，已逐漸更新並採用此方法。

最佳內插法的基本概念是選用某一地理區域的氣象場純量變數 (如高度場、溫度場、露點... 等) 所計算出來的統計量 (Statistical Quantity)，藉著此一統計量而內插到網格點上。但是由於地球上緯度不同，這種統計結構在空間上有不同的分佈狀態，中高緯度地區所求得的統計結構未必適用於其他緯度地區。本文的目的是希望利用中低緯度地區的實際測站資料計算其統計結構，進而求得高度場自相關模式，再內插到均勻分佈的網格點上。本文所選用測站個數為 78 個，地理範圍介於 $10^{\circ} \text{N} \sim 50^{\circ} \text{N}$ 的中低緯度地區，資料時間為 1977 年至 1983 年，每年冬季三個月 (12、1、2 月) 觀測時間為 1200GMT，500mb 高度場資料，為了使得個案間相互獨立，個案間相隔為五天，共選取 108 個個案。

首先利用高度場 (h)、風場 (u、v 分量) 計算各種相關函數，得到該地理區域的統計場空間結構，這個統計結構包含了上述三個物理量間的九個相關函數在平面空間上的分佈，接著在最

小平方 (L.S.M) 條件下，應用曲線配合得到高度場自相關模式，這一模式因為是從實際觀測高度場所獲得，能夠確實反應本研究區域的統計特性。由於大氣在中低緯度地區仍有相當程度遵守地轉風關係，因此上述所求得的高度場自相關模式，可以在該關係下，推導出其他八個相關模式。緊接著我們應用最佳內插法原理，進行單站分析，這個分析過程是將內插對象擺在測站，經由該測站附近數個測站的觀測資料，而得到該目標測站 (Target Station) 的分析值，此分析值與測站的觀測值做根均方差的計算，可以驗證曲線配合所推導的自相關模式在分析過程中的適用性及穩定性。

二、研究方法概述

Eliassen (1954) 和後來的 Gandin (1963) 首先提出，利用氣象場的空間統計結構應用到客觀分析的觀念，其中基本理念為希望這一空間統計結構為距離的函數，為了符合這個條件，就進而提出具有均質 (Homogeneous) 與各向同性 (Isotropic) 特性的自相關函數，此一函數基本上須滿足正定條件 (Positive Definite Condition)，在這裡我們嘗試推導其數學原理。

令任何地理位置上，氣象場純量 (Scalar)，可分成兩部份，一為樣品平均 $\bar{f}(r)$ ，另一為其偏差 $f'(r)$ 。

$$f(r) = \bar{f}(r) + f'(r) \quad (1)$$

定義變數 f 在 r_1 處及變數 g 在 r_2 處的協方差函數，為交協方差函數 (Cross-covariance Function)

$$C_{fg}(r_1, r_2) = \overline{f'(r_1)g'(r_2)} \quad (2)$$

當 $f' \equiv g'$ 時，上述函數稱為自協方差函數 (Auto-covariance Function)

$$C_{ff}(r_1, r_2) = \overline{f'(r_1)f'(r_2)} \quad (3)$$

當 $r_1 = r_2$ 時，上述函數變成為

$$C_{ff}(r_1, r_1) = \overline{f'(r_1)f'(r_1)} = D_f(r_1) \quad (4)$$

稱為 f 變數在 r_1 處的變異數 (Variance)。

兩個變數在不同點的交相關函數可以下式表示

$$\rho_{fg}(r_1, r_2) = C_{fg}(r_1, r_2) / \sqrt{D_f(r_1)D_g(r_2)} \quad (5)$$

單一變數的自相關函數可以用下式表示

$$\rho_{ff}(r_1, r_2) = C_{ff}(r_1, r_2) / \sqrt{C_{ff}(r_1, r_1)C_{ff}(r_2, r_2)} \quad (6)$$

在計算高度場及風場自相關函數時，爲了維持資料的均質性，最好選擇一個季節內的資料。因此，我們選擇的季節爲冬季三個月的高度場及風場資料。同時爲了保持各個個案間相互的獨立性，個案間相隔五天。測站間距離不小於200公里，測站間最遠達到6000公里，測站空間配置如圖1所示。

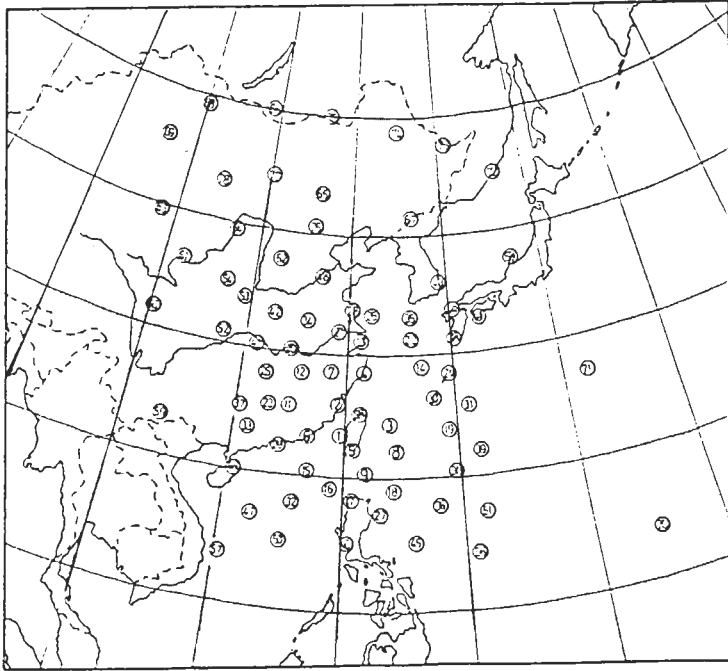


圖1 測站空間分佈圖。

(一) 高度場自相關函數的均質性與各向同性

令氣象變數 g 爲地理上 k 、 l 兩點的函數，

$$g_{kl} = g(x_k, y_k, x_l, y_l) \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} x_l &= x_k + r \cos(\theta) \\ y_l &= y_k + r \sin(\theta) \end{aligned} \quad (8)$$

r 爲 k 和 l 兩點的距離， θ 爲 k 和 l 兩點連線和 x 軸間的夾角，因此 g_{kl} 爲 x_k 、 y_k 、 r 和 θ 的函數。

$$g_{kl} = g(x_k, y_k, r, \theta) \quad (9)$$

當固定 x_k 、 y_k 和 r 保持不變，僅讓 θ 角改變，若 (9) 式函數值不跟著改變時，則 g_{kl} 具有各向同性的性質。當固定 r 和 θ 保持不變，而僅讓位置 x_k 、 y_k 改變，若 g_{kl} 函數值不跟著改變時，則 (9)

式具有均質性。若兩項性質均滿足時，此時 $g_{k1} = g(r_{k1})$ ，換句話說(9)式將純粹是距離的函數。圖2是台北與周圍77個測站，高度場(h)與風場(u、v)分量之間，應用實際觀測資料所得到的九個相關函數，在計算過程中台北測站氣象變數在(6)式中 r_1 是擺在台北，而 r_2 則是在其它77個測站間變化，至於f與g則是高度場與風場間氣象變數間變化(參考Onn, Wang, Tseng, 1994)。圖2中高度場自相關函數(h-h)幾乎是均質與各向同性的，而高度場與風場間的交相關函數(h-u)，(h-v)，(u-h)，(v-h)，(u-v)，(v-u)都不具備各向同性及均質的特性，至於風場的自相關函數(u-u)，(v-v)則是沿風場向量而分別朝著經向及緯向而延長，呈橢圓狀。

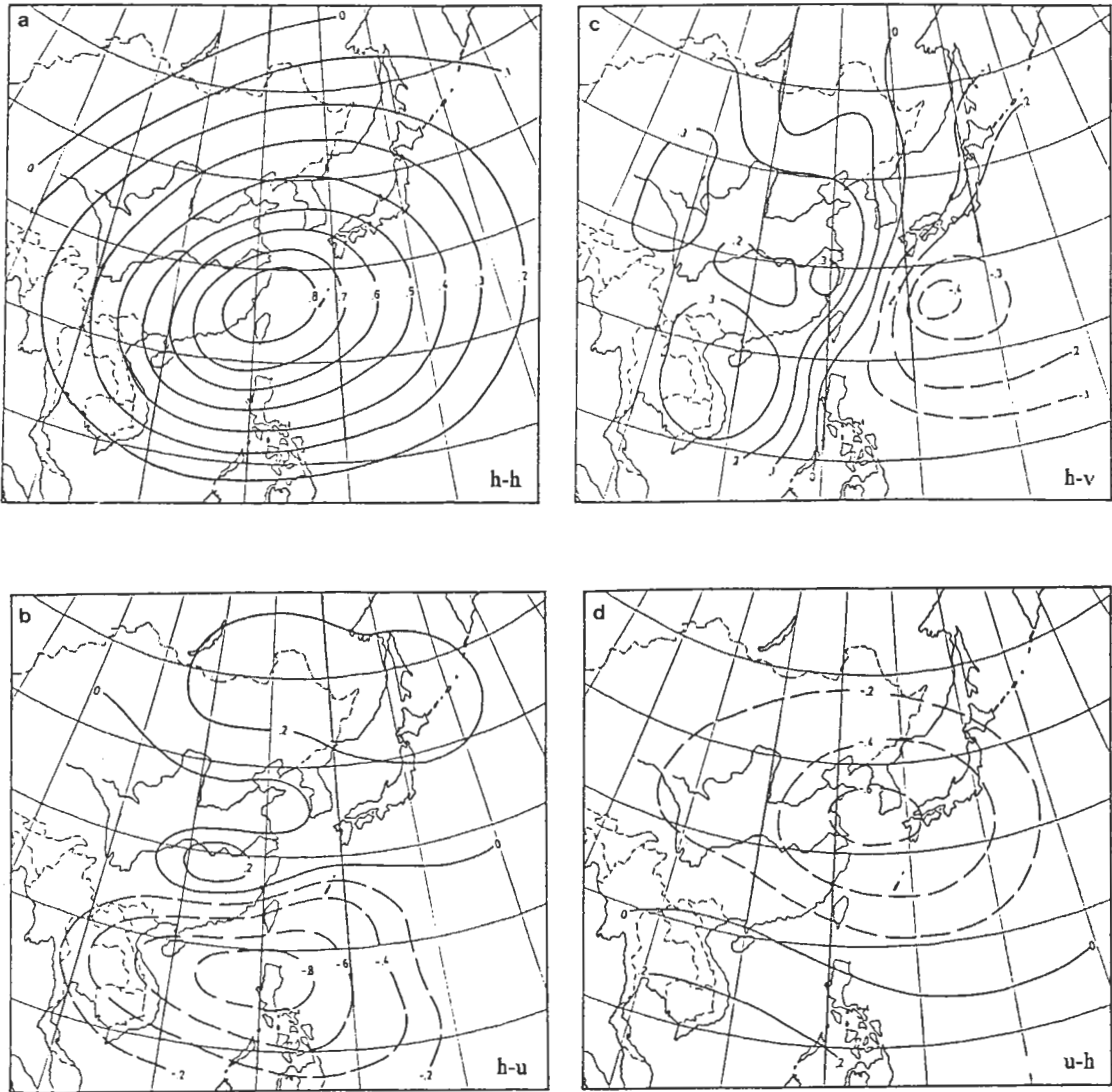


圖2 h,u,v 三個變量間的相關函數。(中心點為台北)

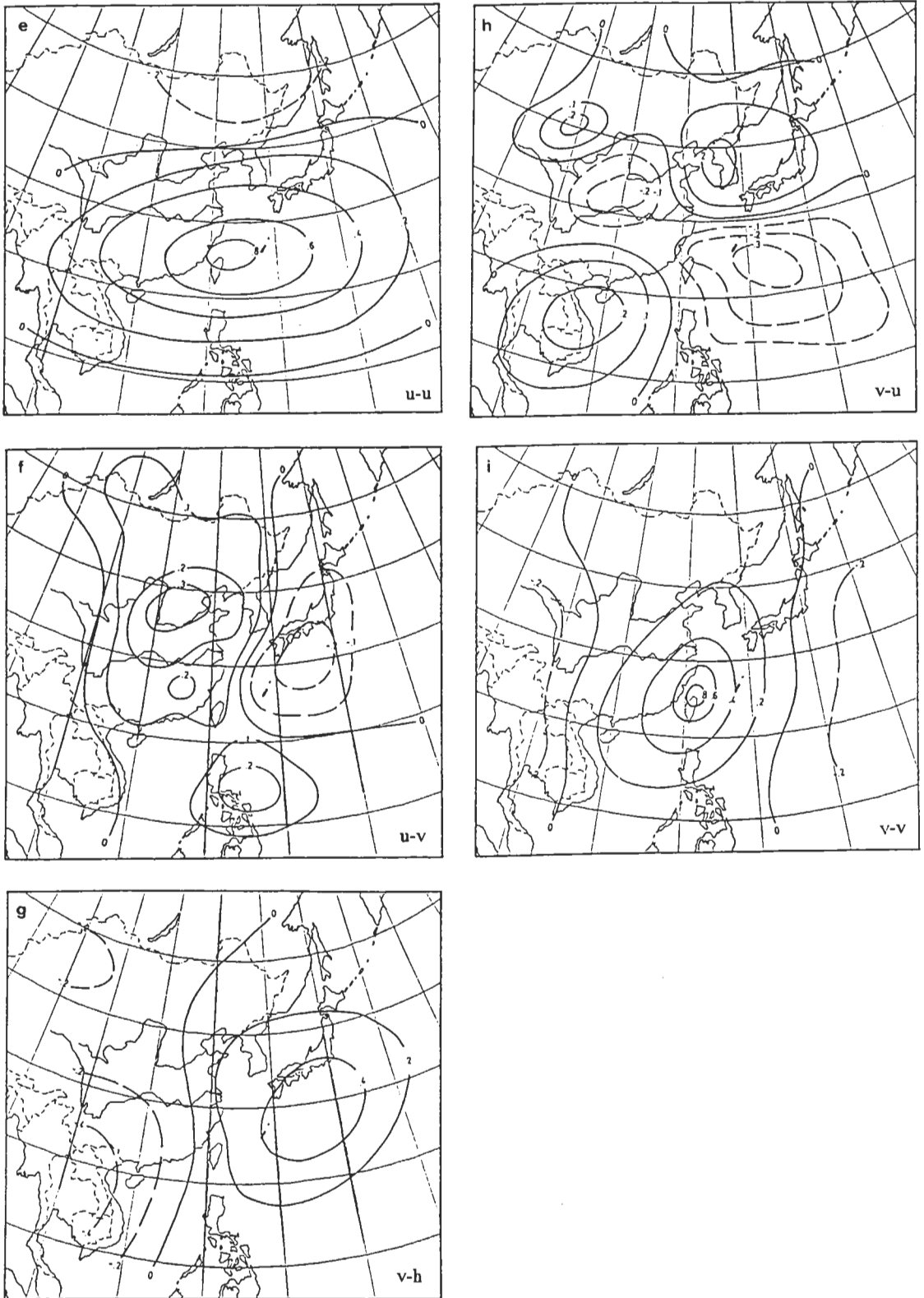


圖2 (續)。

(二) 高度場自相關函數的計算

由於最佳內插法是依據自相關函數的統計結構進行內插，在這章節我們將討論高度場自相關函數的計算及自相關模式的建立。高度場自相關函數可以用下面式子計算， $\langle (h_i - h_{fi})(h_j - h_{fj}) \rangle$ 其中 h_{fi} 為高度場初始猜測值，可以為氣候值、阻尼持續值、數值預報值。在本文中，我們是採取所有個案之和並且求其平均做為其氣候值， i 和 j 則在 78 個測站間交互變化。在建立這一矩陣時首先必須確認的是，此一矩陣對稱的，只須針對下半部來處理就可以了。因此將此自相關函數與其相對應之距離做成圖 3，其中計算出來的相關係數與距離的可能配對點個數為 $(78 \times 77)/2 + 78$ 個。由圖 3 中明顯可看出其分佈型態呈高斯函數(常態)分佈，在距離較遠處，自相關函數衰減較緩慢，測站間距離越接近，自相關函數越接近於 1，代表測站間相關性愈強。

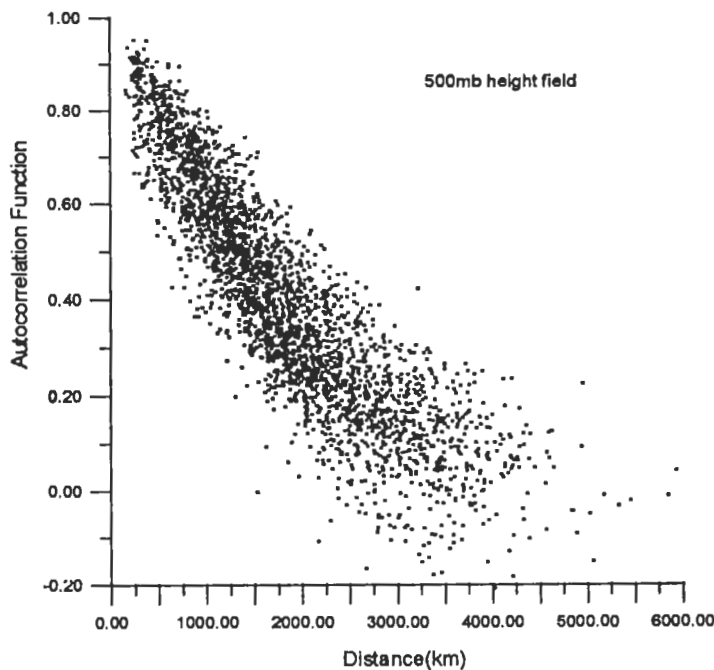


圖 3 具有常態分佈特性的 h-h 自相關函數。

前面說過，我們將引用具有均質與各向同性的函數來表示氣象場自相關函數的空間統計結構，Gandin (1963) 曾選用一種具有常態分佈 (Normal Distribution) 的函數 $\rho(r) = a \exp(-br^2)$ 來配合實際計算的高度場自相關函數 (其中 a 、 b 可由最小平方差曲線配合得到)。在本文中我們提出一種新的自相關模式， $\rho(r) = \exp(\sum_{i=0}^N a_i r^i)$ ，藉著增加新的幕次方，如此能夠更準確的捉住高度場自相關函數較細微的結構，尤其在低緯度地區，由於測站間距，受到海洋阻隔，必須用到極遠地區測站來內插時，較細微統計結構將相對變成重要。高度場自相關模式基本上仍採取具有正定性質的函數型態，其階數是可調整的，以能掌握距離較遠微細的氣象場統計結構為原則。首先，我們將上述 3081 個自相關係數，依距離遠近排成一維序列，再將距離介於 100-300 公里間的所有自相關係數相加並求平均，可得到該範圍內的平均自相關係數，當作 $\bar{\rho}(200)$ ，同理可

以得到 $\bar{\rho}(400), \bar{\rho}(600), \dots$ 等。至於圖3中負的自相關係數，在作曲線配合時，因為不適合於指數函數型態的曲線配合，所以捨棄不用。圖4中I曲線是利用上述自相關模式所獲得的結果，而II曲線則是利用 Schlatter (1975) 的 $\rho(r) = a \exp(-br^2)$ 在相同的曲線配合方法下得到之結果。由於II中其函數型態固定，因此曲線配合情況稍差，而I曲線其函數型態較靈活，其配合的程度可以藉著階數來調其近似的程度，因此曲線配合情況較佳。這種關係在測站分佈不均勻或測站分佈稀疏地區會顯示其對於內插過程準確性的重要性。表一則是所求得的内插係數，這些係數基本上是由氣候資料所得，能夠確實反應東亞地區500mb高度場中低緯度的統計結構。

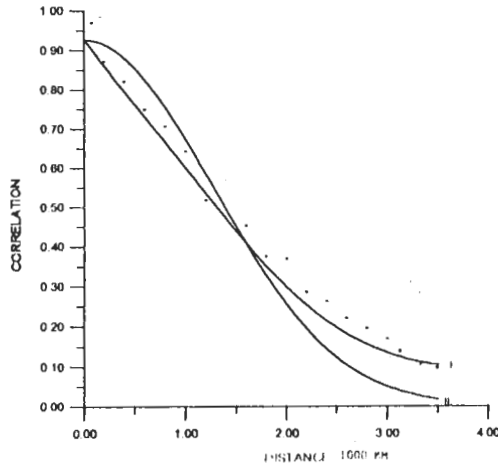


圖4 高度場自相關模式。

表一 高度場自相關模式曲線配合各階常數。

a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
-0.07389	-0.38778	0.03146	-0.09742	0.01324	0.00366	-0.00051

(三) 地轉假設下的複變量相關模式

由於風場與高度場，具有如下的地轉關係：

$$u = -\frac{g\partial h}{f\partial y}$$

$$v = \frac{g\partial h}{f\partial x} \quad (10)$$

因此，高度場與風場的關係，可以由下面關係得到：

$$\overline{(h'_k u'_1)} = -\frac{g\partial\overline{(h'_k h'_1)}}{f_1\partial y_1} \quad (11)$$

$$\overline{(h'_k v'_1)} = \frac{g\partial\overline{(h'_k h'_1)}}{f_1\partial x_1} \quad (12)$$

$$\overline{(u'_k h'_1)} = -\overline{(h'_k u'_1)} \quad (13)$$

$$\overline{(u'_k u'_1)} = \frac{g^2\partial^2\overline{(h'_k h'_1)}}{f_k f_1\partial y_k\partial y_1} \quad (14)$$

$$\overline{(u'_k v'_1)} = -\frac{g^2\partial^2\overline{(h'_k h'_1)}}{f_k f_1\partial y_k\partial x_1} \quad (15)$$

$$\overline{(v'_k h'_1)} = -\overline{(h'_k v'_1)} \quad (16)$$

$$\overline{(v'_k u'_1)} = \overline{(u'_k v'_1)} \quad (17)$$

$$\overline{(v'_k v'_1)} = \frac{g^2\partial^2\overline{(h'_k h'_1)}}{f_k f_1\partial x_k\partial x_1} \quad (18)$$

上面式子中， f 為科氏參數， g 為重力加速度， r 為距離。在計算過程當中，我們選取台北的經緯度為參考點，令其不改變，然後計算其他網格點與此參考點的距離，先求得 $\overline{(h'_k h'_1)}$ 之後，再藉著地轉風假設，依序得到其他八個相關模式來。比較圖5與圖2可以發現，圖2是應用實際擷取資料來計算三個變數 (h, u, v) 的九個自相關、交相關函數空間統計結構，而圖5則是求得高度場自相關模式後 (為距離的函數)，在地轉約束條件下所推導出來的九個自相關及交相關模式 (以台北為統計結構的中心)，風場資料可以藉由解其方程式而推導出來。理論上二者在型態上不可能完全相同，其中差異的程度可以由於儀器量測、人為誤差及地轉條件的有效性 (validity) 而造成型態定量上的差異。至於兩者在型態上是有定性上相似的。這種發現與國外若干文獻相同，同時也印證大氣中，雖然身處中低緯度地區，地轉風近似仍然有相當程度的有效性，這九個模式在複變量初始場建立時是一個重要的指標，可供日後數值預報參考。圖5中前九張圖為 h, u, v 三個變量間依據 $h-h$ 高度場自相關模式及地轉條件下推導之九個相關模式的二維剖面圖，後九張圖則為相對應的九個相關模式三維剖面圖。網格系統為 20×25 ，網格間距為 110 公里，目視位置在旋轉角 (rotational angle) 為 45 度、傾斜角 (tilting angle) 為 30 度之位置。

三、計算方程推導

最佳內插法的基本精神是令其內插誤差為最小。我們令網格點上之高度場分析值 \hat{z}_0 ，它是其週圍 N 個測站資料 z_i 的線性組合：

$$\hat{z}_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i z_i \quad (19)$$

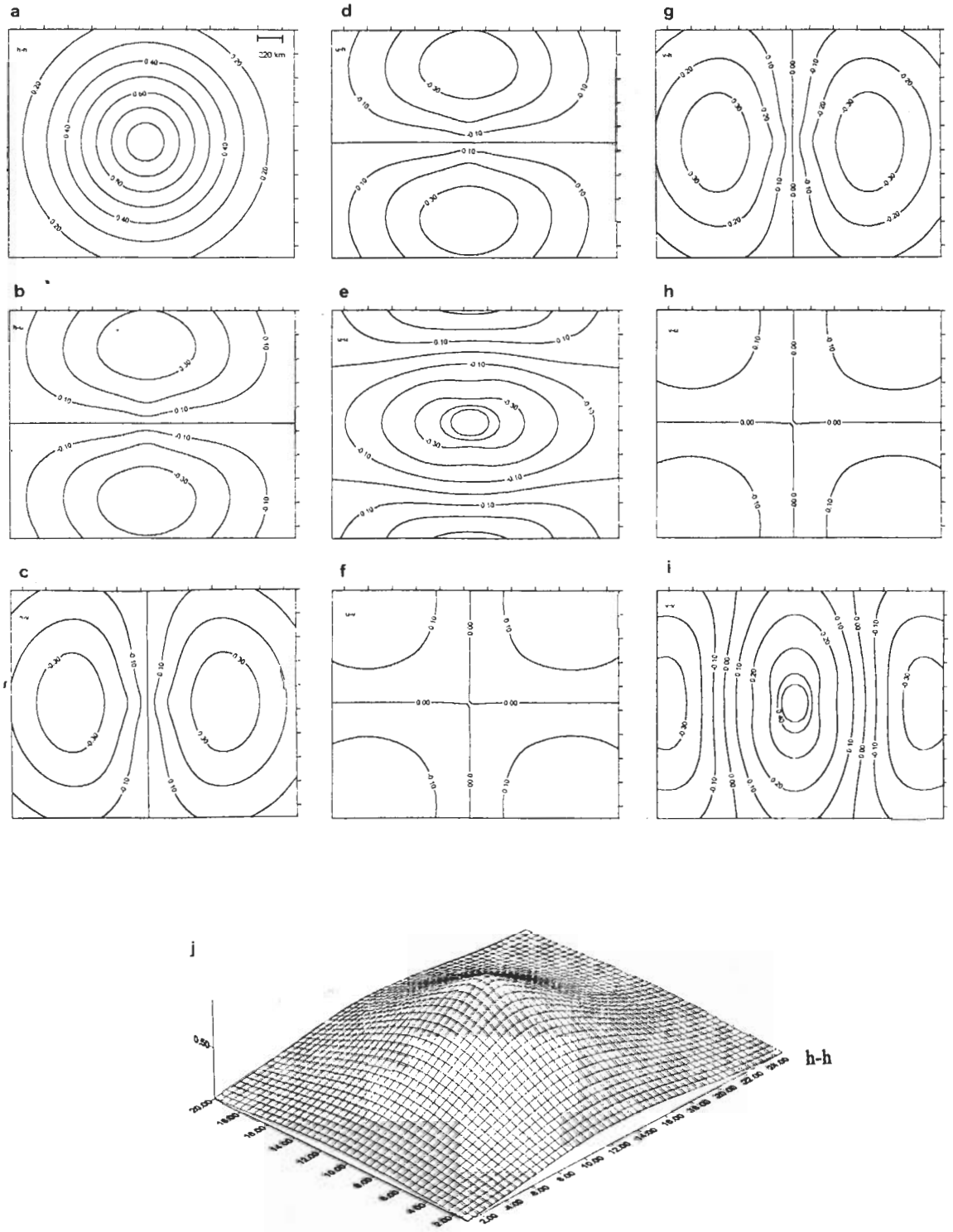


圖5 h,u,v 三個變量間依據h-h高度場自相關模式及地轉條件下推導之九個相關模式的二維及三維剖面圖。(中心點為台北)

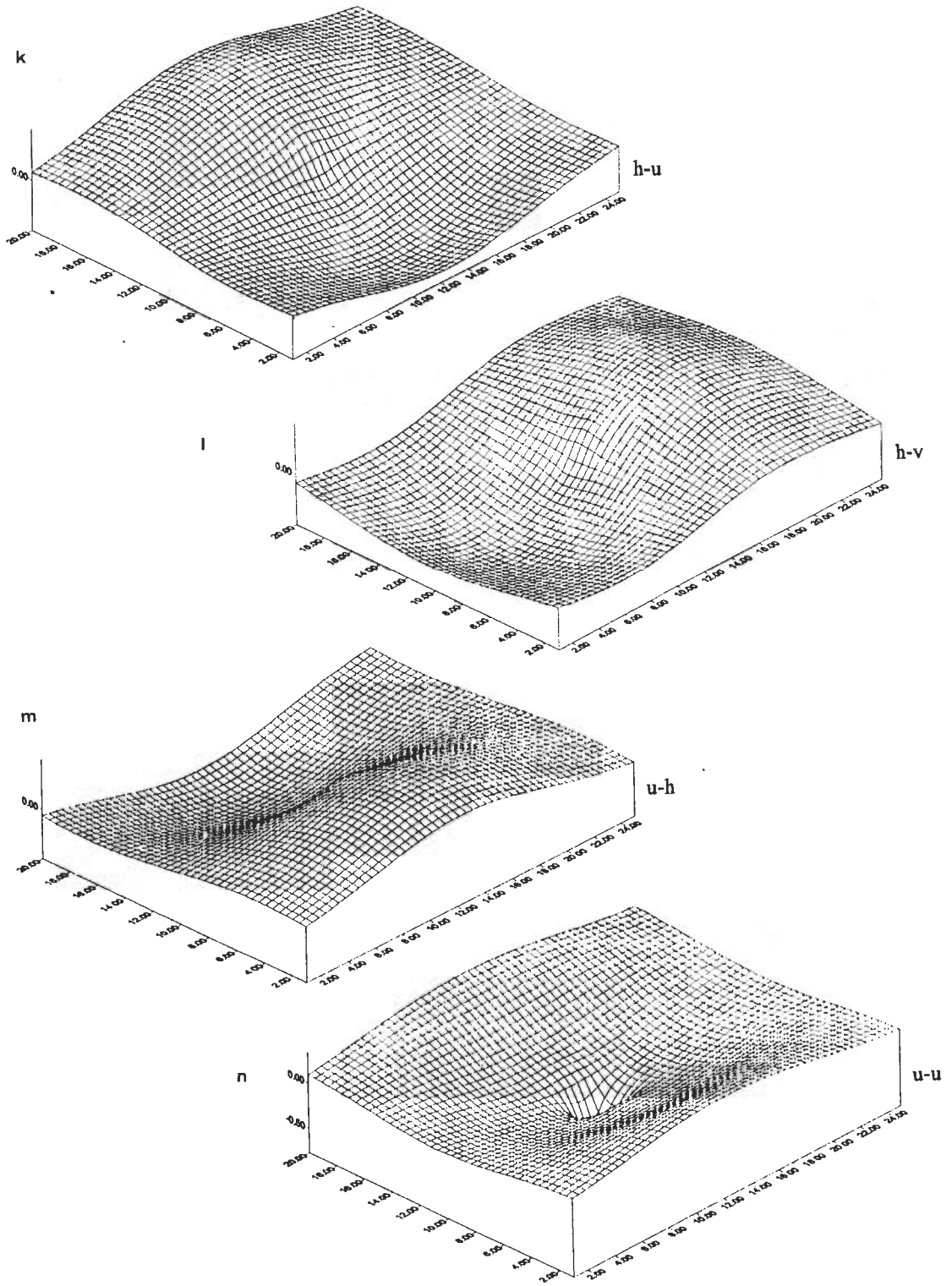


圖5 (續)。

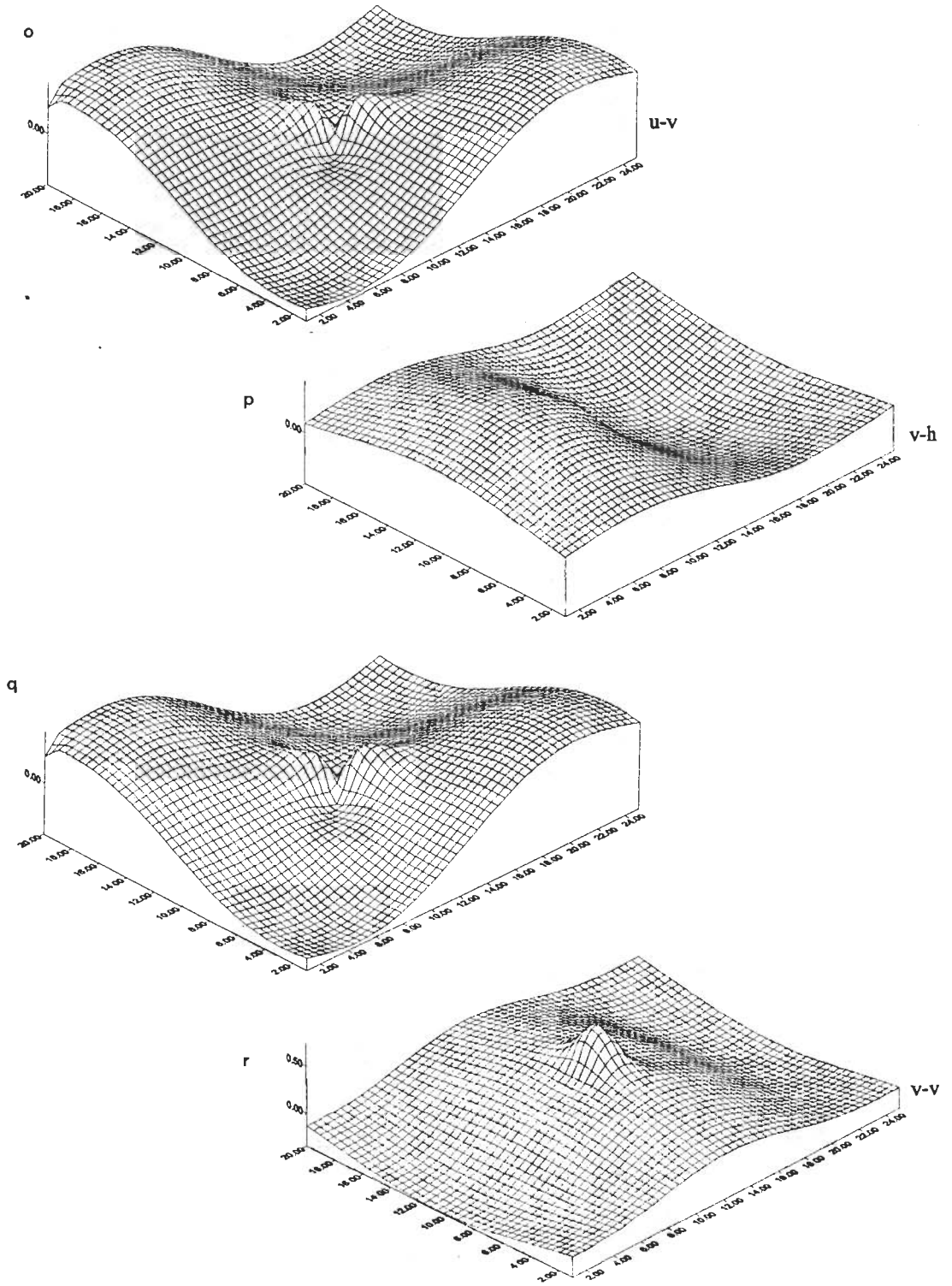


圖5 (續)。

其中 α_i 代表內插係數，令 E 表示平均方差 (Mean Square Error)

$$E = \overline{(\hat{z}_0 - z_0)^2} \quad (20)$$

(19) 式代入 (20) 式

$$E = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha_i \alpha_j \overline{z_i z_j} - 2 \sum_{i=1}^N \alpha_i \overline{z_i z_0} + \overline{z_0^2} \quad (21)$$

求平均方差最小，就是令 (21) 式對 α_i 微分為零。可以得到

$$\sum_{j=1}^N \overline{z_i z_j} \alpha_j = \overline{z_i z_0} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (22)$$

上述式子，由於網格點 z_0 在實際物理現象內無法獲得，所以我們以另一種表示式來表達：

令

$$\begin{aligned} z_i &= \bar{z}_i + z'_i \\ z_0 &= \bar{z}_0 + z'_0 \end{aligned} \quad (23)$$

代入 (22) 式，可以得到

$$\sum_{j=1}^N \overline{z'_i z'_j} \alpha_j = \overline{z'_i z'_0} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (24)$$

將 (24) 式代入 (21) 式，均方內插誤差 E 可以表示成

$$E = C_{00} - \sum_{m=1}^N C_{m0} \alpha_m \quad (25)$$

其中 C_{m0} , C_{00} 分別為協方差函數及變異數，

$$\mathfrak{R}_0 = \overline{(z'_0)^2} \quad ; \quad \mathfrak{R}_i = \overline{(z'_i)^2} \quad (26)$$

分別表示網格點 0 及測站 i 之變異數，在大尺度氣象上，根據實驗指出 $R_0 \approx R_i \approx R_j$ 所以 (24) 式變成爲

$$\sum_{j=1}^N \frac{\overline{z'_i z'_j}}{\sqrt{\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_j}} \alpha_j = \frac{\overline{z'_i z'_0}}{\sqrt{\mathfrak{R}_i \mathfrak{R}_0}} \quad (27)$$

最後

$$\sum_{j=1}^N \rho_{ij} \alpha_j = \rho_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (28)$$

很多綜觀尺度的研究中指出，在進行內插的過程時，目標網格點附近的變異數確實可以視爲均質的，而當使用來內插的測站，距離目標網格很遠的時候，均質性才會消失，這時候就會影響到內插的結果。

當(25)式除以 C_{00} ，可以得到“相對內插誤差” E' ：

$$E' = \frac{E}{C_{00}} = 1 - \sum_{m=1}^N \rho_{m0} \alpha_m \quad (29)$$

(29)式中，相對內插誤差 E' 是內插誤差 E 的正規化(normalization)，為內插誤差除以高度場的變異數 C_{00} ，事實上在上述處理過程中，其分母除以 C_{00} 並無法得到 ρ_{m0} ，但是在許多研究中顯現，在千公里(order)以內，其均質性是普遍存在的，這時候右邊項才得以成立，也不至於影響內插的效果。至於其數值大小則因為 ρ_{m0} 介於0與1(不會為1)之間，因此 E' 也介於0與1之間。

在最佳內插客觀分析方法中，其分析能力的穩定性、調適性及針對不同初始猜測值所產生的不同結果，是我們在進行數值天氣預報中例行的網格點分析，首先必須瞭解的。因此，在本節中，我們希望將內插目標(target point)擺在測站，經由臨近測站資料的內插，得到一個分析值，再將所有分析值與原來就具備的觀測值做各種測試、分析及比較。

由於內插對象為測站，步驟上稍異於典型作業的客觀分析。茲簡述其流程如下：

(1) 針對某一特定目標測站而言，求測站與測站及測站與內插目標測站之距離，

$$s = a[(\lambda_i - \lambda_j)^2 \cos^2 \frac{\varphi_i + \varphi_j}{2} + (\varphi_i - \varphi_j)^2]^{1/2} \quad (30)$$

其中 a 為地球半徑，單位為仟公里。 λ 與 φ 分別為經緯度以弧度(radian)表示。

(2) 做距離的排序次序，可以使用歇爾排序法(Shell sort)或氣泡式排序法(Bubble sort)，尋找出距離目標測站最近的 N 個內插測站。

(3) 由於內插目標為測站，因此(28)式中的網格點，測站間自相關函數在這裏是可以經過計算而獲得的，它們都是應用測站觀測資料所計算得來的，藉此可算出 ρ_{ij}, ρ_{i0} 。

(4) 計算(28)式，求得最近 N 個測站的最佳權重係數 $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, N$ 。

(5) 計算(19)式，求得 \bar{z}'_0 ，並加上該測站之平均值 \bar{z}_0 ，得到目標測站的分析值 \hat{z}_0 。

表二為利用(29)式求得高度場相對內插誤差(E')與使用測站個數的關係，由表中知道當僅使用最近的一個測站來內插時所得到相對內插誤差最大，逐漸增加內插測站個數時，將會降低相對內插誤差，當內插測站個數增加到7至8個時，相對內插誤差減少的趨勢已經減緩了，代表再增加內插測站的個數，對內插過程準確度的實質助益不大。表二中測站序號20為香港，在計算相對內插誤差 E' 時，發現其值在最近一個測站內插時為0.50，最近二個測站內插時為0.45，直到用最近十五個測站內插時，其值已降到0.38。此點現象顯示香港測站資料品質不甚理想或者鄰近測站品質不佳的緣故。但是就表中其它24個參加測試的測站而言內插效果是理想的。

表二 相對內插誤差與使用測站個數的關係。

$E' = 1 - \sum_{i=1}^{N_0} \rho_i a_i$

高 度 誤 差
first guess
氣 候 值

使用 測站 個數 (測站號碼)	58	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	0.25	0.45	0.25	0.31	0.28	0.30	0.23	0.14	0.31	0.29	0.21	0.12	0.17	0.27	0.19	0.16	0.29	0.31	0.39	0.24	0.50	0.24	0.17	0.12	0.24
2	0.24	0.22	0.20	0.18	0.16	0.23	0.18	0.08	0.20	0.23	0.13	0.12	0.07	0.19	0.16	0.14	0.18	0.31	0.28	0.22	0.45	0.21	0.14	0.11	0.18
3	0.18	0.22	0.13	0.10	0.14	0.20	0.15	0.07	0.16	0.15	0.10	0.11	0.06	0.18	0.15	0.13	0.16	0.23	0.25	0.15	0.44	0.16	0.12	0.10	0.12
5	0.17	0.21	0.12	0.08	0.10	0.16	0.13	0.07	0.14	0.15	0.06	0.10	0.05	0.12	0.14	0.11	0.12	0.22	0.23	0.11	0.44	0.14	0.09	0.09	0.12
7	0.17	0.21	0.10	0.07	0.10	0.15	0.13	0.06	0.12	0.15	0.06	0.09	0.04	0.11	0.14	0.11	0.12	0.22	0.21	0.11	0.44	0.13	0.09	0.09	0.12
8	0.17	0.21	0.10	0.07	0.09	0.14	0.12	0.06	0.12	0.15	0.06	0.09	0.04	0.11	0.14	0.11	0.12	0.22	0.21	0.11	0.43	0.13	0.08	0.09	0.12
10	0.17	0.20	0.10	0.07	0.09	0.13	0.12	0.06	0.11	0.14	0.05	0.09	0.04	0.10	0.13	0.10	0.12	0.20	0.20	0.11	0.40	0.11	0.08	0.09	0.11
15	0.16	0.20	0.09	0.07	0.09	0.12	0.11	0.06	0.10	0.11	0.05	0.08	0.04	0.09	0.12	0.09	0.09	0.19	0.16	0.11	0.38	0.10	0.07	0.08	0.11
17	0.15	0.20	0.09	0.06	0.09	0.12	0.11	0.06	0.10	0.11	0.05	0.08	0.04	0.09	0.12	0.09	0.09	0.18	0.15	0.11	0.38	0.10	0.07	0.08	0.09
20	0.15	0.18	0.09	0.06	0.08	0.12	0.11	0.06	0.10	0.11	0.05	0.08	0.04	0.09	0.11	0.08	0.09	0.18	0.13	0.10	0.37	0.09	0.07	0.08	0.09

Gandin (1963)曾指出當測站觀測系統，在沒有儀器之系統誤差時，用來內插測站個數若持續增加，則內插誤差會持續降低，甚至達到趨近於零。但是實際上觀測系統本身就有觀測性、系統性誤差，況且當選用更遠測站來內插，由於與目標測站的距離甚遠，相互間的相關函數亦減小，所以對內插過程準確性的提升沒有什麼幫助。

由相對內插誤差(E')的空間分佈，可以瞭解最佳內插法在空間上分析能力的研判，也可以作為測站資料品質(quality)的鑑定。圖6為利用(29)式，將內插測站個數固定為8個時，計算空間上78個測站，相對內插誤差(E')的分佈圖。比較圖6與圖1測站空間分佈圖可以發現，內插誤差較小的區域($E' < 0.3$)位於測站系統的中間區域，而內插誤差較大的區域($E' > 0.4$)則位在測站系統的邊界，顯示最佳內插法在資料品質良好，且測站空間分佈均勻的地方，其分析能力非常好，右下角由於測站在海洋地區，資料品質不易掌握則分析能力稍差，台灣地區旁臨廣大大海洋，在未來數值天氣預報初始場建立，右邊海洋部份氣象資料之獲得，實有賴於衛星、船舶、飛機等資料之有效應用，建立良好的四維資料同化系統來解決初始場的問題。

針對某個測站的所有個案分析值與觀測值做分析，可以對客觀分析方法的穩定性有所認識，我們固定內插測站個數為八個以得到測站分析值，並與原來測站之探空觀測值做根均方差分析。分析個案數目為108個。

$$(RMS)_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{108} (f_{ij} - \hat{f}_{ij})^2 / 108} \tag{31}$$

其中 f_{ij} 及 \hat{f}_{ij} 分別為第*i*個測站在第*j*個個案的觀測值與分析值。圖7是取測站編號1到40個測站所做的根均方差波譜圖，由圖中知道根均方差平均分佈於30到50之間，很少超過50。顯示每個測站對其所有個案之分析能力非常穩定，準確性也極高。接著我們令

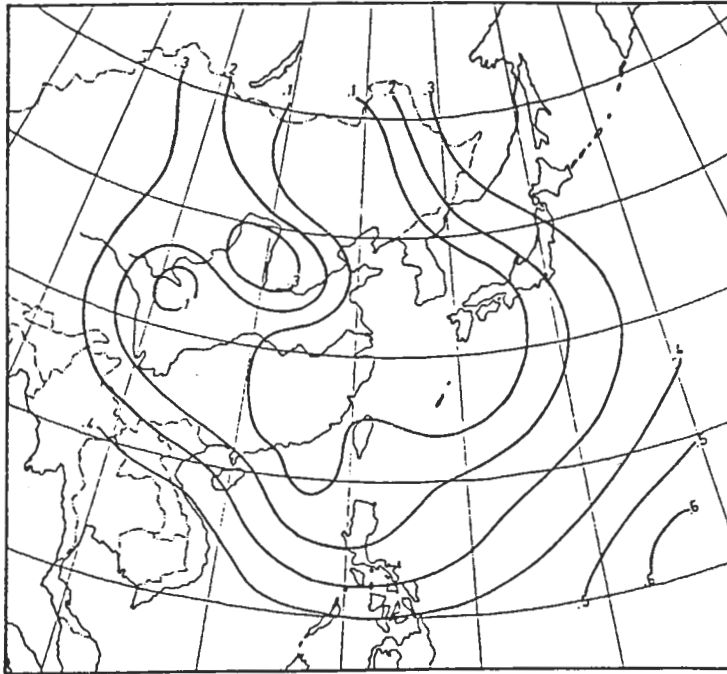


圖6 相對內插誤差空間分佈圖(內插測站數目為八個)。

$$(RMS)_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{78} (f_{ij} - \hat{f}_{ij})^2 / 78} \quad (32)$$

表示某一天整個氣象場的分析值與觀測值的根均方差。由圖8知道根均方差大約介於20到30之間，超過35以上的少於10天，這個數值比前述圖7還要小，顯示在整個場的分析能力極佳。事實上，圖7與圖8分別從不同的觀點(一個從時間角度，一個從空間角度)來看其分析能力，這種分析值與觀測值根均方差的試驗能顯示這個高度場自相關模式在分析過程的優越特性。

在不同的自相關模式內插之結果，可以瞭解模式的優劣性，圖9中利用Schlatter (1975)的自相關函數模式針對圖7的測站內插之結果，比較圖7與圖9的分析值與觀測值的根均方差振幅大小，可以發現前者之振幅較小，顯示本文所提供之自相關模式在分析過程中有較佳的分析能力。

由(29)式知道，由於自相關模式具有正定性，所以 $0 \leq E' \leq 1$ ，換句話說當 E' 最大時 $E' = 1$ 時只有在 $\rho_{k0} = 0$ 的狀況下。此種情況下，由定義知道，由於 $f'_k = f_k - \bar{f}_k \neq 0$ 。唯一條件為 $f'_0 = f_0 - \bar{f}_0 = 0$ (在這裏 \bar{f}_k ， \bar{f}_0 ，分別為測站、網格點氣候值)，換句話講，當使用建檔後的網格氣候值當作 f_0 時，相對內插誤差(E')為1，而利用最佳內插法所推導出來的氣象場統計結構作自相關函數來內插時， $0 \leq E' \leq 1$ 顯然最佳內插法所得到的初始場比用網格點氣候值作為初始場來的準確。

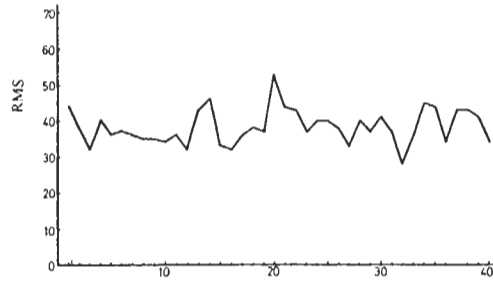


圖7 觀測值與分析值根均方差分析(由空間角度研究)。

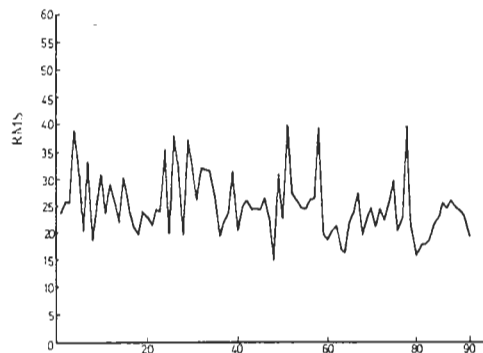


圖8 觀測值與分析值根均方差分析(由時間角度研究)。

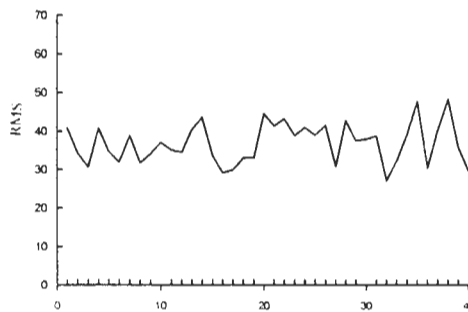


圖9 應用Schlatter (1975)自相關模式內插之觀測值與分析值根均方差分析(由空間角度研究)。

最後我們以本文所獲得的高度場自相關模式進行網格點客觀分析，圖10(a)為1983年1月6日1200 GMT 500 mb主觀分析圖，圖10(b)則為應用臨近8個測站內插之客觀分析結果，在計算(23)式中網格點之平均值係經Barnes客觀分析法將78個測站資料內插到網格點上而獲得網格點初始猜測場。比較兩者的天氣型態，發現其型態相配合，而槽線位置則後者稍落後，至於右邊界之槽線，係因計算邊界所造成之不連續現象。

這個章節，我們以內插後之分析值與觀測值的結果做根均方差分析，以做為內插分析過程準確度的量測基準。由於某一地理位置的探空資料，本身就具備儀器誤差及人為操作上之誤差，此外大氣小尺度的變化，有時亦難掌握。因此這種根均方差的度量，事實上是一種相對性的比較，而非絕對性的，此一觀點是在計算分析值與觀測值根均方差分析時必須瞭解的。

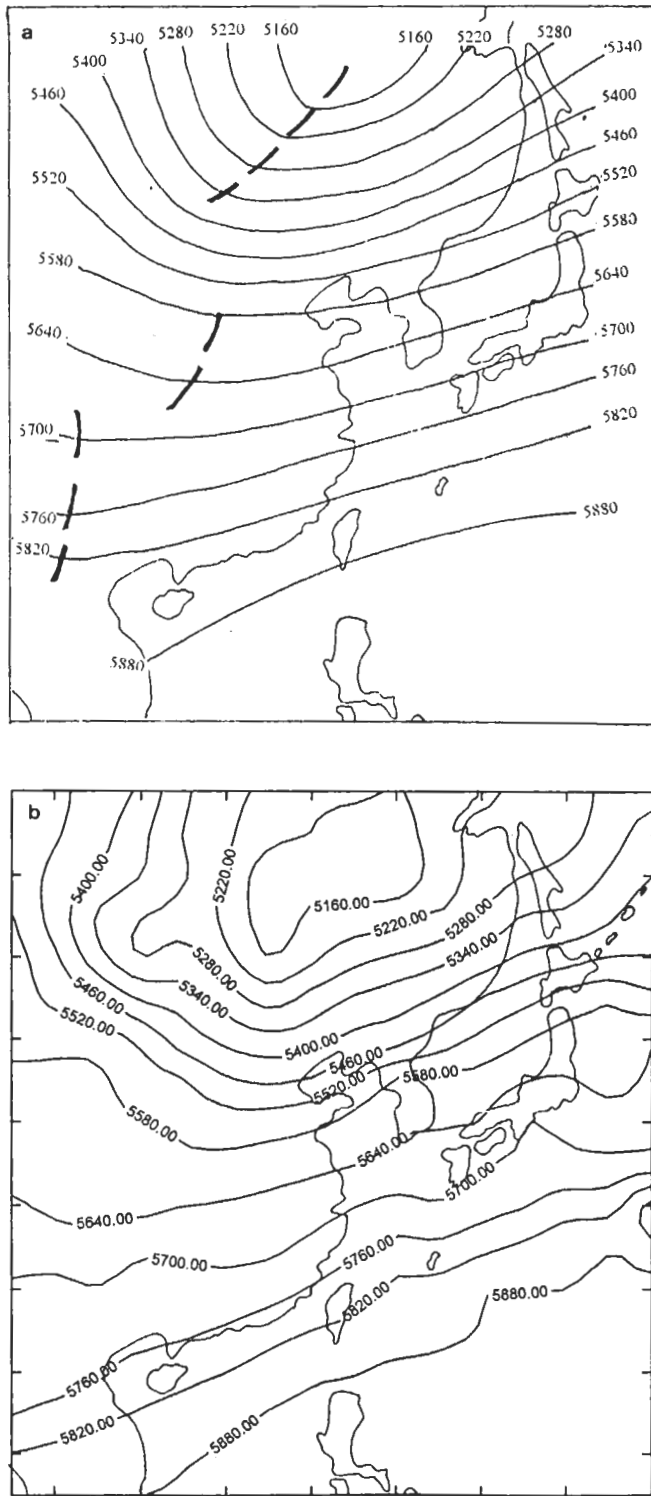


圖10 1983年1月6日500 mb高度場分析圖。(a)主觀分析，(b)客觀分析。

四、結論

由以上計算及驗證結果，可以獲得以下結論：

- (1) 由高度場自相關函數與其相對應之測站距離配對數的圖形(圖3)，可以發現此一高度場所推導之統計量，確實呈指數函數型態分布，其數值隨著測站間距加大，而逐漸減小，其斜率亦隨之而減緩，與指數函數型態相配合。
- (2) 高度場自相關函數為零的測站距離，大約在三千三百公里位置，超過此一距離，負的自相關係數陸續出現，這種不同地理區域顯現的統計特性顯然與其它緯度所獲得的統計結構不盡相同。事實上，這是本研究所希望獲得的中、低緯度地區高度場統計場結構。
- (3) 本研究中利用中低緯度地區，透過實際觀測資料計算三個變數的相關函數，(這些相關函數是相對於台北而令其他測站變動，來計算這些測站與台北的高度場、風場的相關係數)，在數值預報初始場建立時非常有用，至於藉由地轉風關係推導的九個複變量相關模式，可當作一個重要參考指標。
- (4) 在計算高度場自相關模式時，我們所提出的模式，藉著增加其幕次，理論上在追蹤較細微統計結構的能力較強，尤其在中低緯度地區，測站相隔數千公里，有較正確統計模式，希望能對客觀分析內插過程有實質之助益。

誌謝

感謝審查者所提供之寶貴意見，這些意見對本文有重大幫助。此外，台灣大學林和博士、柯文雄博士、李清勝博士、許晃雄博士、郭鴻基博士；中央大學張隆男博士、林松錦博士、劉振榮博士、王作臺博士；中央氣象局許明典博士；中正理工學院呂芳川博士、王金慶博士，在此一併表達心裡謝意。

參考文獻

- Achtemeier, G.L., 1989 : Modification of a Successive Correction Objective Analysis for Improved Derivative Calculations. *Mon. Wea. Rev.*, **117**,79-86.
- Allishouse, J.C. et al, 1967 : A discussion of empirical orthogonal function and their applications to vertical temperature profiles, *Tellus*, **19**, 477-482.
- Baker, W.E., 1983 : Objective analysis and assimilation of observation data from FGGE. *Mon. Wea. Rev.*, **112**,1544-1561.
- Balgovind, R., A. Dalcher, M. Ghil and E. Kalnay, 1983 : A stochastic-dynamic model for the spatial structure of forecast error statistics. *Mon. Wea. Rev.*, **111**, 701-722.
- Belousov, S.L., L.S. Gandin and S.A. Mashkovich, 1968 : Computer Processing of Meteorological Data. Israel Program for Statistical Translation, 210 pp.
- Bengtsson, L.,and N. Gustavsson, 1972 : Assimilation of non-synoptic observation, *Tellus*, **24**, 383-399.

- Bengtsson, L., 1975 : 4-Dimensional assimilation of meteorological observations. GARP Publ. Ser., No. 15, 76 pp. [Available from WMO, Case Postale No.5, CH 1211, Geneva 20, Switzerland.]
- Bengtsson, L., 1976 : Initial Data and Some Practical Aspects of Weather Forecasting and Forecasts, Models, Problems and Systems, Vol. 1, National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colorado.
- Bergman, K. H., 1979 : Multivariate analysis of temperatures and wind fields using optimum interpolation. *Mon. Wea. Rev.*, **107**, 1423-1444.
- Bergthorsson, P., and Doos, B. (1955). "Numerical Weather map analysis," *Tellus*, **7**, 329-40.
- Bouttier, F., 1994 : A Dynamical Estimation of Forecast Error Covariances in an Assimilation. *Mon. Wea. Rev.*, **122**, 2376-2390.
- Buell, C.E., 1958 : The correlation between wind and height on isobaric surface. *J. Meteor.*, **15**, 502-512.
- Eddy, A., 1967 : The statistical objective analysis of scalar data fields. *J. Appl. Meteor.*, **6**, 597-609.
- Eddy, A., 1973 : The objective analysis of atmospheric structure. *J. Meteor. Soc. Japan*, **51**, 450-457.
- Eliassen, A., 1954 : Provisional report on calculation of spatial covariance and autocorrelation of the pressure field. Videnskaps-Akademiets Institutt for Vaerog Klimaforskning, Report No.5, 11pp.
- Gandin, L.S., 1963 : Objective Analysis of meteorological Fields Gidrometeorologicheskoe Izatel'stvo, Leningrad. Translated from Russian, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1965 242pp. 1964: On the optimum interpolation of vector fields. *Trudy Glavnoi Geofizicheskoi observatorii (GGO)*, *Imeni A.I. Voeikova, Leningrad*, No. **165**, 47-49.
- Gilchrist, B., and Cressman, G. (1954). "An experiment in objective analysis," *Tellus*, **6**, 309-18.
- Haltiner, G.J. and Williams, R.T., 1980 : Numerical Prediction and Dynamic Meteorology, John-Wiley, New York, 477pp.
- Hagenson, P.L., 1983 : Review and evaluation of methods for objective analysis of meteorological variables, *Papers Meteor Res.*, **5**, 113-133.
- Hildebrand, F. B., 1965 : Methods of Applied Mathematics. Prentice-Hall, Englewood, N.J., 362PP.
- Inman, R.L., 1970 : Papers on Operational Objective Analysis Scheme at NSSFC. NOAA Tech. Memo. ERL NSSL-51, 91pp.
- Lorenc, A., 1979 : Meteorological Data Analysis Lecture Note No. 3 European Centre for Medium Range Weather Forecasting, Reading, England, 68pp.
- Lonnberg, P., and Hollingsworth, A. (1986) : "The statistical structure of short-range forecast errors as determined from radiosonde data. Part II : The covariance of height and wind errors," *Tellus*, **38A**, 137-161.
- Lorenc, A., 1979 : Meteorological Data Analysis Lecture Note No. 3 European Centre for Medium Range Weather Forecasting, Reading, England, 68pp.
- Lorenc, A., 1981 : "A global three-dimensional multivariate statistical interpolation scheme," *Mon. Wea. Rev.*, **109**, 701-721
- Lorenc, A., 1988a : "A practical approximation to optimal four-dimensional data assimilation," *Mon. Wea. Rev.*, **116**, 730-745.
- Lorenc, A., 1988b : "Optimal nonlinear objective analysis," *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **114**, 205-240.
- Mitchell, H.L., 1990 : Comment on "Monitoring of Observation and Analysis Quality by a Data Assimilation System" *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 1927-1928.

- Nuss, W. A., and Titley, D. W. (1993) : Use of Multiquadric Interpolation for Meteorological Objective Analysis. *Mon. Wea. Rev.*, **122**, 1611-1631.
- Ooyama. K. V., 1987 : Scale-Controlled Objective Analysis. *Mon. Wea. Rev.*, **115**, 2479-2506.
- Perrie, W., and Toulany. B. 1989 : Correlations of Sea Level Pressure Fields for Objective Analysis. *Mon. Wea. Rev.*, **117**, 1965-1974.
- Ramamurthy. M. K., and Carr. F. H. 1987 : Four-Dimensional Data Assimilation in the Monsoon Region. Part I: Experiments with Wind Data. *Mon. Wea. Rev.*, **115**, 1678-1706.
- S. C. Onn, K. H. Wang, G. L. Chang, and C. Y. Tseng, 1992 : Numerical simulation of the correlations with the general polynomial and exponential forms for the climatic statistical structure, The 40th Summer Computer Simulation Conference, July 27-30, Reno, Nevada, U.S.A.
- S. C. Onn, K. H. Wang, C. Y. Tseng, 1993 : A computational method for constructing the missing data of some observational stations using the climatic statistical structure, The 8th Conference on Applied Climatology p.116-121., The 73rd Annual Meeting of the American Meteorological Society.
- S. C. Onn, K. H. Wang, C. Y. Tseng, 1994 : Numerical simulation for the climatic statistical structure with the new correlation functions of the extended polynomial form and the extended exponential form, *Adv Space Res.*, Vol. **14**. No 9. (9)77-(9)81. COSPAR.
- Schlatter, T.W., 1975 : Some experiments with a multivariate statistical objective analysis scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **103**, 246-257.
- Twomey, S., 1970 : Information content and indirect sensing measurements. *J. Atmos. Sci.*, **27**, 515-518.
- Weber, R. O., and Talkner. P. (1993) : Some Remarks on Spatial Correlation Function Models. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 2611-2617.
- Uden, P., 1989 : Tropical Data Assimilation and Analysis of Divergence. *Mon. Wea. Rev.*, 2495-2517.

The Statistical Structure of Meteorological Fields in the Mid- and Low Latitudinal Regions and its Applications in Objective Analysis

Kuang-Horng Wang ¹ Chung-Yi Tseng ^{2 3}

Shing-Chung Onn ¹ Tai-Hwa Hor ¹ Liu Cheng ¹

¹Chung Cheng Institute of Technology

²Academia Sinica, Taiwan, R.O.C.

³National Taiwan University

ABSTRACT

An univariate statistical scheme for the analysis of the geopotential height fields has been developed based upon Optimum Interpolation. The data archived from a set of subjective analysis were used to compute the required correlation functions. The computed height autocorrelation functions were fitted by an appropriate function which would definitely reflect the characteristics of the statistical structure in the low latitudinal regions. Rather than representing the model by the negative squared exponential form proposed by Gandin (1963), we use a representation consisting a polynomial exponential function to fully trace the finer structure of the statistical quantities. Under the geostrophic approximation, the other eight correlations are also derived from the h-h autocorrelation model. The analyzed geopotential height deviation fields can be obtained through the computation of the relative distances among the grid and the surrounding stations.

The scheme has been tested at some target stations to compute the root mean squares between the analysed data and those obtained from radiosonde data as a measure of accuracy. The applicability of the scheme to the objective analysis over the low latitudinal regions is briefly mentioned.

Key words : Statistical structure, Correlation function, Optimum interpolation, Numerical weather prediction.