

# 線性平衡之有限元素變分佳化分析

王金慶

中正理工學院物理系

(中華民國七十年三月四日收件, 三月十日修正)

## 摘要

本研究應用有限元素法, 以線性平衡方程式為強勁動力約束條件, 進行大氣定壓層的高度場與風場的變分佳化分析, 以測站為三角形元素的節點, 直接佳化每一測站的氣象變數值, 以供爾後數值天氣預報之用。本研究不需要傳統客觀分析的步驟, 可避免因採用傳統客觀分析法可能引進的誤差。個案研究的結果顯示, 佳化後高度場、風場以及渦度場, 其型態及強度與主觀分析的結果大致相同。雖在測站稀少地區與主觀分析的結果稍有出入, 但佳化所得之渦度場及高度場, 與衛星雲圖及降水報告, 頗為吻合。

## 一、前言

以往數值天氣預報都是以有限差分 (finite-difference) 法來處理預報方程式中的空間微分項, 但是測站的分佈不規則, 使得測站並不剛好在等距的網格點上, 因此在使用有限差分法之前, 必須先將各測站的觀測資料內插到等間距的網格點上, 這種過程是為傳統的客觀分析 (objective analysis) (Shuman, 1957; Cressman, 1959; Inman, 1970; Barnes, 1973)。內插的方法是將網格點周圍測站的觀測值經過加權平均後作為網格點的氣象變數值。如此所得到的網格點值, 常因客觀分析方法或處理過程的不同而產生明顯的差異, 更有進者, 由於觀測資料本身的誤差及客觀分析可能引起的失真, 使得客觀分析所得到的分析場與實際的大氣狀況難免會有出入。

大氣中大幅度的運動是準平衡狀態, 在大氣中自然的耗散過程與小幅度的現象通常會導致大氣作迅速的調整, 使大幅度的運動趨向於平衡的狀態。若將與實際的大氣運動有出入的客觀分析場作為數值天氣預報的初始值, 高頻雜波很容易出現在預報場, 因而限制長時間預報的可行性。所以在作預報之前必須先校正原始資料, 使壓力場與風場儘可能接近平衡狀態, 此即初值化 (Initialization) 的

手續。

Sasaki (1958; 1969a, b; 1970a, b, c) 在其變分客觀分析論文中指出, 利用約束條件確能濾除原始資料裏所含有的短波。他的方法能將各種動力的、能量的、甚至統計的或經驗的條件納入一個最佳的分析過程中, 以佳化氣象資料, 使其更能代表大氣中大幅度的運動。由於氣象資料的處理與天氣預報電腦化的需要日趨迫切, Sasaki 的變分客觀分析法不斷地被深入的研究與廣泛的探討。例如 Stephens (1970), Lewis (1972), Sheats (1973a, b), Sasaki (1976), 曾 (1976, 1977) 等用變分最佳分析法處理初始場。這些論文都是以有限差分法為數值方法, 因此必須先用傳統的客觀分析法求得等間距網格點上的氣象變數值, 然後再用變分分析法來佳化。換句話, 觀測資料在用來作數值天氣預報之前, 須先經過傳統的客觀分析與初值化這兩道手續。如果傳統的客觀分析造成觀測資料的失真, 則初值化的效果就要大打折扣, 甚至失掉其意義。因此, 若能跨越傳統的客觀分析這個步驟, 直接把觀測資料作初值化的處理, 其結果將更能反映各種初值化方法的優劣, 使我們知所取捨。

傳統客觀分析是由於使用有限差分法為數值方法所引起的。若欲捨棄傳統客觀分析, 必須另採其

他的數值方法，即要尋求一種不需要用固定間距的數值方法，此種方法必須能用於不規則的網格系統，以適合分佈不規則的測站。在結構學和固體力學上我們可以看到合於此種需要的數值方法，那就是有限元素法（finite - element method），使用有限元素法，沒有網格形狀和固定間距的限制，如能用於氣象學，則可達成測站即是網格點的要求，直接可用觀測值來分析或作預報，故本文研究使用有限元素法為數值方法，跨越傳統的客觀分析，直接處理初始場，以期改善初始場的品質，進而改進數值天氣預報的精確度。

有限元素法為許多數值方法中之一種，在結構工程方面的應用相當成功。研究將有限元素法應用到大氣科學方面是最近幾年的事（Wang et al., 1972; Cullen 1974a, b; Hinsman, 1975; Straniforth et al. 1977）。這些論文都是採用規則形狀的元素（諸如等邊三角形等），作理論上的探討，其缺點在於元素的節點並非測站，因而用於分析的氣象變數值亦非觀測值，仍然無法跨越傳統客觀分析的限制。梁與謝（1980）以準地轉近似為弱勢動力約束條件進行有限元素法的變分最佳分析，以測站為三角形元素的節點，建立不等間距的網格系統，直接佳化每一測站的氣象變數值，其個案研究的結果顯示，有限元素法求得之分析場，與衛星雲圖及雲量分佈，頗為融合。梁與謝（1980）變分分析的結果，可以作為準地轉模式（quasi-geostrophic model）數值天氣預報的初始值。許多試驗中顯示出準地轉模式在中緯度地區的準確度約可達到 80~90%。近年來由於準確度之要求日益增高，此模式已不敷應用。而且，由於數值模擬方法之發展，短波之壓制及時間積分之穩定問題已可初步解決，原始方程式模式（Primitive Equation Model）之數值預報已成為先進國家日常作業的一部份。由於原始方程式模式含有重力波（Gravity wave），與濾過性模式（Filtered models，諸如準地轉模式等）相較，更易受擾動的影響，而使數值計算產生許多困難，亦即利用原始方程式進行數值天氣預報時，質量場和風場兩者之間的初始平衡非常重要。原始方程式模式數值預報的初始值通常由平衡方程式（Balance Equation）求得，因此，本文以平衡方程式為動力約束條件（dynamic constraint）來進行變分

最佳分析，以期提供合乎原始方程式預報模式使用的初始值。

約束條件可分為兩類：一是強勢（Strong）約束條件，另一是弱勢（Weak）約束條件。前者要求佳化值必須“完全滿足”約束條件，而後者僅要求佳化值“盡量滿足”約束條件。以平衡方程式為弱勢動力約束條件的變分分析式為四階偏微分方程式，欲以有限元素法為數值方法來解四階偏微分方程式，必須採用較為繁複的高階元素（high-order element）。我們知道強勢動力約束條件為弱勢動力約束條件之特例，當弱勢動力約束條件的權重為無限大時即為強勢動力約束條件。以平衡方程式為強勢動力約束條件的變分分析式為二階偏微分方程式，以有限元素法為數值方法來解二階偏微分方程式，只需採用最簡單的線性元素。因此，我們第一步先以平衡方程式為“強勢”動力約束條件進行變分佳化分析，以觀其效。若欲再提高初始場的品質，我們第二步將再以平衡方程式為“弱勢”動力約束條件。為了簡化分析式，本文採用“線性”平衡方程式（Linear Balance Equation）為“強勢”動力約束條件。

綜合言之，本研究應用有限元素法，以線性平衡方程式為強勢動力約束條件，進行大氣定壓層之高度場與風場的變分佳化分析，以測站為三角形元素的節點，直接佳化每一測站的氣象變數值，以期提供給原始方程式模式合適的初始值，盼望能對爾後數值天氣預報的精確度有所助益。

## 二、變分分析與動力條件

茲定義函數  $I$  為

$$I \equiv \iint [\tilde{\alpha}(u-\tilde{u})^2 + \tilde{\alpha}(v-\tilde{v})^2 + \tilde{\beta}(z-\tilde{z})^2] dx dy / m^2 \quad (1)$$

式中  $u$  是  $x$  方向的風速分量， $v$  是  $y$  方向的風速分量， $z$  是定壓面的高度，頂碼“ $\sim$ ”代表觀測值，未加頂碼“ $\sim$ ”代表校正以後的佳化值。 $\tilde{\alpha}$ ， $\tilde{\beta}$  分別為風場與高度場的觀測權重， $m$  為地圖投影變形因子（image scale factor）。依變分原則，若欲  $I$  為極小，則

$$\delta I = \delta \iint [\tilde{\alpha}(u-\tilde{u})^2 + \tilde{\alpha}(v-\tilde{v})^2 + \tilde{\beta}(z-\tilde{z})^2] dx dy / m^2 = 0, \quad (2)$$

其中  $\delta$  是變微分運算符，上式的意義是佳化值和觀

測值兩者之差的平方為最小。式中每一個變數並非獨立，而是藉動力條件來互相影響。

本文的動力條件是採用線性平衡方程式

$$gm^2 \nabla^2 z - fm^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x m} - \frac{\partial u}{\partial y m} \right) + mu \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

式中  $g$  是重力加速度， $f$  是科氏力參數， $\nabla^2$  為二維的拉普拉斯 (Laplace) 運算符，

$$\nabla^2 \equiv \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

本文以線性平衡方程式作為強勢動力拘束條件，使各測站佳化後的氣象變數值滿足線性平衡方程式。

加上(3)式的約束條件，(2)式可變為

$$\delta \iint \left\{ \tilde{\alpha} (u - \tilde{u})^2 + \tilde{\alpha} (v - \tilde{v})^2 + \tilde{\beta} (z - \tilde{z})^2 + \lambda \left[ gm^2 \nabla^2 z - fm^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x m} - \frac{\partial u}{\partial y m} \right) + mu \frac{\partial f}{\partial y} \right] \right\} dx dy / m^2 = 0, \quad (4)$$

其中  $\lambda$  是拉氏待定乘數 (Lagrange multiplier)，為了運算方便，(4)式先改寫為

$$\delta \iint \left\{ \tilde{\alpha} \left( \frac{u}{m} - \frac{\tilde{u}}{m} \right)^2 + \tilde{\alpha} \left( \frac{v}{m} - \frac{\tilde{v}}{m} \right)^2 + \frac{\tilde{\beta}}{m^2} (z - \tilde{z})^2 + \lambda \left[ g \nabla^2 z - f \left( \frac{\partial v}{\partial x m} - \frac{\partial u}{\partial y m} \right) + \frac{u}{m} \frac{\partial f}{\partial y} \right] \right\} dx dy = 0, \quad (5)$$

(5)式經過變微分運算以後，可以得到尤勒-拉格蘭芝 (Euler-Lagrange) 方程式：

$$u = \tilde{u} + \frac{1}{2\tilde{\alpha}} fm \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \quad (6)$$

$$v = \tilde{v} - \frac{1}{2\tilde{\alpha}} fm \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \quad (7)$$

$$2\tilde{\beta} (z - \tilde{z}) + gm^2 \nabla^2 z = 0, \quad (8)$$

$$gm^2 \nabla^2 z - fm^2 \left( \frac{\partial v}{\partial x m} - \frac{\partial u}{\partial y m} \right) + mu \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad (9)$$

以及邊界條件：

$$z = \tilde{z}, \quad \text{在邊界上的測站}, \quad (10)$$

$$\lambda = 0, \quad \text{在邊界上的測站}. \quad (11)$$

將(6)，(7)，(8)三式代入(9)式，可得

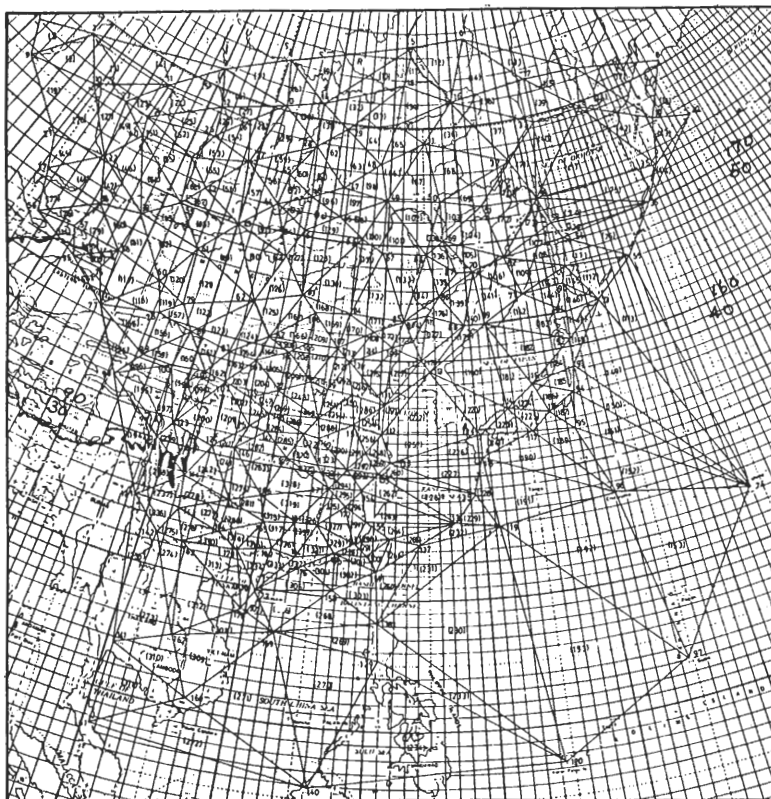


圖 1 有限元素網格系統。數字代表節點號碼，數字加小括號代表元素號碼

$$gm^2 \nabla^2 z - \frac{\tilde{\beta}}{\alpha g} f^2 (z - \tilde{z}) + \frac{1}{\alpha} fm^2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} + m\tilde{u} \frac{\partial f}{\partial y} - fm^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{v}{m} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{u}{m} \right) = 0 \quad (12)$$

(8)與(12)兩式聯立可解出拉氏待定乘數  $\lambda$  及高度場的佳化值  $z$ 。將解出的  $\lambda$  代入(6)、(7)兩式可求得風場的佳化值  $u$  與  $v$ 。

### 三、有限元素法

解(8)與(12)兩式，本文以有限元素法為數值方法，採用最簡單的二維線性三角形元素。首先將研究區域分為許多三角形元素，每一個三角形元素都是以測站為頂點，亦即以測站為三角形元素的節點，作此步驟時應儘可能地避免三角形的形狀太過狹長。然後將每一測站編號，編號的原則是使每一三角形元素三個節點的號碼數的最大差值儘可能減小（如此，在計算時可減少所需的電子計算機記憶）。每一元素也編上一個號碼。本研究區域內有 184 個測站，本文中分為 341 個三角形元素（圖 1）。

在一元素中，任一變數（如  $z$ ）以線性內插多項式表示：

$$z = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y. \quad (13)$$

若已知一元素中三個節點  $i, j, k$  的座標  $(X_i, Y_i), (X_j, Y_j)$  與  $(X_k, Y_k)$ （圖 2）

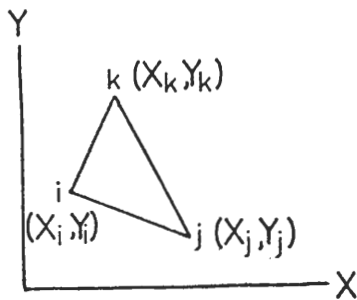


圖 2 二維線性三角形元素

和其上的變數值  $z_i, z_j$  與  $z_k$ 。將之代入(13)式可求得  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ：

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} z_i \\ z_j \\ z_k \end{bmatrix}$$

因此(13)式變為

$$z = N_i z_i + N_j z_j + N_k z_k, \quad (14)$$

其中  $N_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2A$ ,

$$N_j = (a_j + b_j x + c_j y) / 2A,$$

$$N_k = (a_k + b_k x + c_k y) / 2A.$$

而  $a_i = x_j y_k - x_k y_j, b_i = y_j - y_k, c_i = x_k - x_j,$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k, b_j = y_k - y_i, c_j = x_i - x_k,$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i, b_k = y_i - y_j, c_k = x_j - x_i,$$

此處  $A$  為該三角形元素的面積， $N_i, N_j, N_k$  稱為形狀函數 (shape function)。同理，其他的變數也可用節點值和形狀函數表示：

$$f = N_i f_i + N_j f_j + N_k f_k, \quad (15)$$

$$m = N_i m_i + N_j m_j + N_k m_k, \quad (16)$$

$$\lambda = N_i \lambda_i + N_j \lambda_j + N_k \lambda_k, \quad (17)$$

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k, \quad (18)$$

$$v = N_i v_i + N_j v_j + N_k v_k. \quad (19)$$

採用 Galerkin 近似，(8)、(12)兩式可寫為 (Huebner, 1974; Segerlind, 1976)

$$\iint [2\tilde{\beta}(z - \tilde{z}) + gm^2 \nabla^2 \lambda] N_r dx dy = 0, \quad (20)$$

$$r = i, j, k,$$

$$\iint [gm^2 \nabla^2 z - \frac{\tilde{\beta}}{\alpha g} f^2 (z - \tilde{z}) + \frac{1}{\alpha} fm^2 \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} - fm^2 \left( \frac{\partial}{\partial x} \frac{v}{m} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{u}{m} \right) + m\tilde{u} \frac{\partial f}{\partial y}] N_r dx dy = 0$$

$$r = i, j, k. \quad (21)$$

將(14)至(19)等六式代入(20)、(21)兩式，計算出積分式 (Huebner, 1974; Segerlind, 1976)，可以組成一局部有限元素方程式 (local finite element equation)

$$[P] \{ \Phi \} = \{ R \},$$

其中  $\{ \Phi \} = [z_i \lambda_i z_j \lambda_j z_k \lambda_k]^T$ 。

矩陣  $[P]$  的奇數列 (row) 元素由(20)式  $z_i, z_j, z_k$  和  $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$  的係數所組成，而偶數列 (row) 元素由(21)式的  $z_i, z_j, z_k$  和  $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k$  的係數所組成。每一元素都有一局部有限元素方程式，因為兩個方程式 (8)、(12) 聯立求解，假如總共有  $N$  個節點，每個局部有限元素方程式可擴大為  $2N$  元方程式，然後將所有  $2N$  元局部有限元素方程式組合 (assembling) 起來就可以得到全域有限元素方程式 (global finite element equation) (Huebner, 1974; Segerlind

，1976)。全域有限元素方程式具有  $2N$  個聯立代數方程式，解出此聯立方程式就可得到每個節點的  $z$  及  $\lambda$ 。

$2N$  個  $2N$  元聯立代數方程式，其係數矩陣為  $2N \times 2N$  的不對稱方陣，本文  $N = 184$ ，即需  $135K$  ( $368 \times 368$ ) 以上的計算機記憶，但此係數矩陣中非零項很少，且集中在對角線附近，也就是說係數矩陣具有一定的帶寬 (band-width)，其半帶寬的大小等於所有三角形元素三個節點的號碼數的最大差值的最大值，在本文中此值為 26，但因是兩方程式聯立求解，上述係數矩陣的半帶寬為  $(26 + 1) \times 2 - 1 = 53$ ，又因是不對稱方陣，結果約需  $40K$  ( $106 \times 371$ ) 的計算機記憶來容納係數矩陣中的非零項，然後利用已發展良好的高效率副程式 (CDC 電腦)，即可解得答案。

將(8)、(12)兩式聯立解出的  $\lambda$  代入(6)式，用 Galerkin 近似，可以得到下列局部有限元素方程式

$$\frac{A}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \end{pmatrix} = \frac{A}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{u}_i \\ \tilde{u}_j \\ \tilde{u}_k \end{pmatrix} + \frac{A}{2\tilde{\alpha}} (c_i \lambda_i + c_j \lambda_j + c_k \lambda_k) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i \\ f_j \\ f_k \end{pmatrix}$$

其全域有限元素方程式具有  $N$  個聯立代數方程式，其係數矩陣為  $N \times N$  的對稱方陣，半帶寬為 26，解出此聯立方程式就可得到每個節點的  $u$ 。同理由 (7) 式可得到每個節點的  $v$ 。

#### 四、個案研究與討論

##### 1. 佳化特性曲線

本研究的個案資料取自民國 64 年 6 月 10 日格林威治標準時間零時的天氣資料，範圍約在  $10^\circ N$  至  $60^\circ N$ ， $70^\circ E$  至  $160^\circ E$  之間，此區域包括中國大陸、日本、中南半島、菲律賓及西太平洋地區。當時海平面天氣的形勢是副熱帶太平洋高壓與鄂霍次克高壓間的梅雨鋒面自日本向西南延伸，經過琉球、台灣到達華南地區，蒙古高壓位於中國大陸北部 (圖 3)。

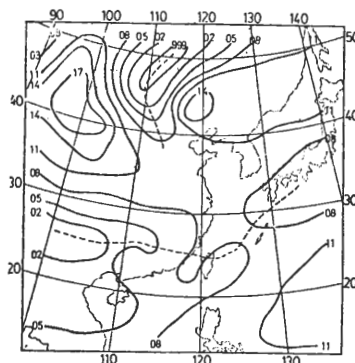


圖 3 1975 年 6 月 10 日 0000Z 主觀分析之海平面氣壓場。虛線代表鋒面

本研究使用 500mb 定壓層的高度、風速與風向資料，以線性平衡方程式為動力約束條件進行有限元素之變分客觀分析，嘗試佳化 500mb 定壓層上的高度場與風場，使其滿足線性平衡方程式。

在進行變分分析求數值解之前，首先必須決定觀測權重  $\tilde{\alpha}$ 、 $\tilde{\beta}$ 。 $\tilde{\alpha}$ 、 $\tilde{\beta}$  代表觀測值的可靠度，若  $(u - \tilde{u})$ 、 $(v - \tilde{v})$ 、 $(z - \tilde{z})$  等項的值愈趨近於零，亦即觀測值與理論值相差很小，則其權重  $\tilde{\alpha}$ 、 $\tilde{\beta}$  應該愈大。本文所使用的變分式並無意使 (1) 式中的每一項皆為最小值，而係考慮使各項差誤之總和為最小值，故權重的調整是必要的，使各項誤差的值與佳化後的分析場皆能合理。

以各種不同的  $\tilde{\alpha}$ 、 $\tilde{\beta}$  值求解分析方程式 (8)、(12) 兩式) 計算佳化值與原觀測值兩者之差的均方根：

$$\begin{aligned} \Delta z_{rms} &= \{ [ \iint (z - \tilde{z})^2 dx dy ] / A_g \}^{1/2} \\ \Delta u_{rms} &= \{ [ \iint (u - \tilde{u})^2 dx dy ] / A_g \}^{1/2} \\ \Delta v_{rms} &= \{ [ \iint (v - \tilde{v})^2 dx dy ] / A_g \}^{1/2} \end{aligned}$$

其中  $A_g$  為研究範圍的全域面積。然後將  $\Delta u_{rms}$  與  $\Delta v_{rms}$  合併為風速誤差值的均方根：

$$\Delta c_{rms} = [ (\Delta u_{rms})^2 + (\Delta v_{rms})^2 ]^{1/2}$$

令觀測權重  $\alpha$ 、 $\beta$  分別等於  $10^{-4}$ ， $10^{-3}$ ， $10^{-2}$ ，……， $10^4$  等九個值，所得之  $\Delta z_{rms}$ ， $\Delta c_{rms}$  分別示於圖 4 (a) 與 4 (b)。

圖 4 (a) 中之橫座標為  $\tilde{\beta} / \tilde{\alpha}$  之比值，縱座標為  $\Delta z_{rms}$  之值。圖 4 (a) 顯示，

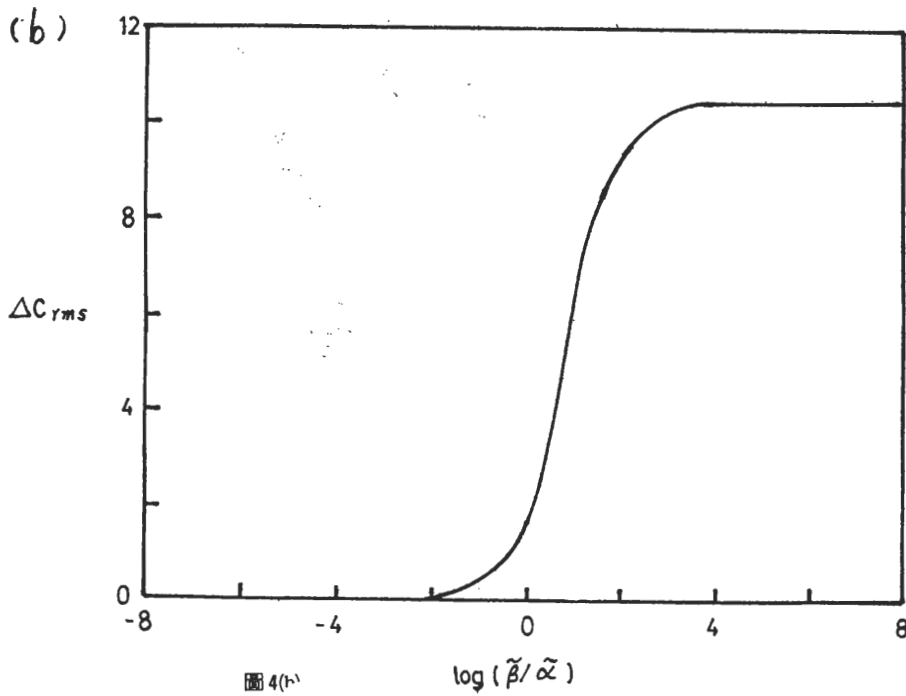
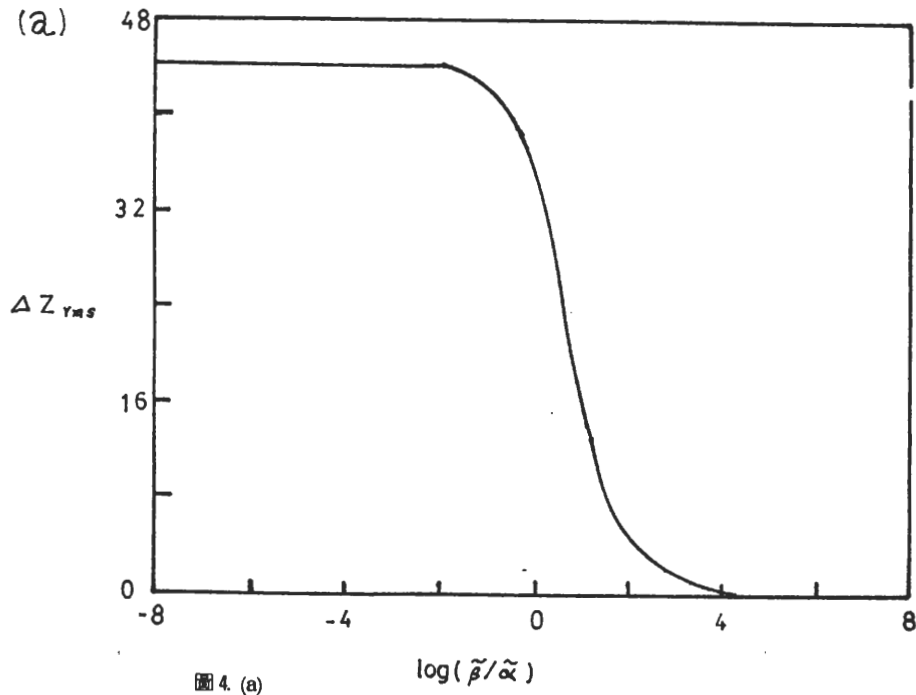


圖 4. 500mb 高度及風速場之差異值對觀測權重比,  $\log(\tilde{\beta}/\tilde{\alpha})$ , 之最佳特性曲線, (a) 高度場差異值  $\Delta Z_{rms}$  (單位: 公尺), (b) 風速場差異值  $\Delta C_{rms}$  (單位: 公尺/秒)

當  $\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$  趨近於零時,  $\Delta z_{r.m.}$  趨近於一定值。這表示當我們要求風場的佳化值很接近其觀測值時, 高度場的佳化值, 則利用線性平衡方程式, 完全由風場的觀測值來決定。一組風場的觀測值利用線性平衡方程式只能決定出一組高度場的佳化值, 此高度場的佳化值與其觀測值兩者間之差異為一定值, 因此  $\Delta z_{r.m.}$  趨近於一定值。當  $\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$  趨近於無限大時,  $\Delta z_{r.m.}$  趨近於零, 這表示當我們要求高度場的佳化值很接近其觀測值時, 高度場僅需要稍微地調整就能滿足線性平衡方程式, 因此  $\Delta z_{r.m.}$  趨近於零, 此外當  $\tilde{\alpha}$  為零時, 不論  $\tilde{\beta}$  為何值 ( $\tilde{\beta} = 0$  除外),  $\Delta z_{r.m.}$  皆等於零。在此種情況下, 完全捨棄風場的觀測值, 高度場不需要調整, 佳化值就等於觀測值, 因此,  $\Delta z_{r.m.}$  為零。

圖 4 (b) 之橫座標為  $\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$  之比值, 縱座標為  $\Delta c_{r.m.}$  之值。圖 4 (b) 顯示, 當  $\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$  趨近於無限大時,  $\Delta c_{r.m.}$  趨近於一定值, 這表示當我們要求高度場的佳化值很接近其觀測值時, 風場的佳化值, 則用高度場的觀測值由線性平衡方程式來決定, 一組高度場的觀測值由線性平衡方程式只能求出一組風場的佳化值, 此風場的佳化值與其觀測值兩者間之差異值為一定值, 因此  $\Delta c_{r.m.}$  趨近於一定值。當  $\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$  趨近於零時,  $\Delta c_{r.m.}$  趨近於零, 這表示當我們要求風場的佳化值很接近其觀測值時, 風場僅需要稍微地調整就能滿足線性平衡方程式, 因此  $\Delta c_{r.m.}$  趨近於零。此外, 當  $\tilde{\beta}$  等於零時, 不論  $\tilde{\alpha}$  為何值 ( $\tilde{\alpha} = 0$  除外),  $\Delta c_{r.m.}$  皆為零, 在此種情況下, 完全捨棄高度場的觀測值, 風場不需要調整, 佳化值就等於觀測值, 因此  $\Delta c_{r.m.}$  等於零。

圖 4 (a) 及 4 (b) 顯示當觀測權重  $\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$  之比值在 1 與 10 之間時,  $\Delta z_{r.m.}$  (35 ~ 17.5 m) 及  $\Delta c_{r.m.}$  (1.6 ~ 5.7 m/sec) 兩者同時有較合理的值, 為進一步研究各誤差值在觀測權重調整時如何移轉變化, 將此範圍再細分, 重新求取各種不同權重時  $\Delta z_{r.m.}$ ,  $\Delta c_{r.m.}$  之值, 所得之結果示於圖 5 (a) 與 5 (b), 並分析佳化後的高度場、風場、及用佳化後的風場所計算出的渦度場, 並與主觀分析, Cressman 客觀分析及梁與謝 (1980) 的變分分析比較, 期在此中能找到一組較適合之權重。圖 5 (a) 及 5 (b) 之橫座標皆為  $\tilde{\beta}$  之值, 而縱座標分別為  $\Delta z_{r.m.}$  及  $\Delta c_{r.m.}$  之值, 圖中為  $\tilde{\alpha} = 1, 2, 5, 9$  的四條曲線, 分別表示  $\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$  之比值在 1 ~ 9, 0.5 ~ 4.5, 0.2 ~ 1.8

, 0.1 ~ 1 之間  $\Delta z_{r.m.}$  及  $\Delta c_{r.m.}$  之變化情形。由圖 5 (a) 及 5 (b) 可知在上述各段  $\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$  之間  $\Delta z_{r.m.}$  皆隨  $\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$  之增大而逐漸減小, 而  $\Delta c_{r.m.}$  皆隨  $\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$  之增大而逐漸增大。 $\alpha = 1$  之曲線代表  $\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$  之比值在比較大範圍 (1 ~ 9) 的情形, 而  $\tilde{\alpha} = 9$  之曲線代表  $\tilde{\beta}/\tilde{\alpha}$  之比值在比較小範圍 (0.1 ~ 1) 的情形, 因此  $\tilde{\alpha} = 1$  的曲線變化比較大, 而  $\tilde{\alpha} = 9$  的曲線變化比較小。

## 2 佳化結果與討論

圖 6, 7, 8, 9 分別為 500mb 之高度場、風速之 x 方向分量場, 風速之 y 方向分量場及渦度場, 其中 (a) 為主觀分析, (b) 為 Cressman 客觀分析, (c) 為梁與謝 (1980) 之變分客觀分析, (d) 為本研究的變分佳化分析。圖 6 (d) 顯示在日本海有一截斷低壓 (cut-off low), 東亞主槽 (main trough) 由此低壓中心向西南延伸到台灣東北部, 在朝鮮半島有一副槽 (secondary trough) 存在, 中緯槽 (the mid-latitude trough) 位於蒙古地區, 在我國東北有一高壓脊, 斜壓區位於 30° N 以北, 這是一個標準型式的冷低壓 (槽) 暖高壓 (脊) 的高空形勢。當時海平面天氣的形勢是蒙古高壓位於中國大陸北部, 鄂霍次克高壓脊由鄂霍次克海向西南延伸一直到我國東北, 在這兩個高壓系統之間有低壓區及鋒, 副熱帶太平洋高壓伸入西南太平洋, 與鄂霍次克高壓間有一個半滯留 (semi-stationary) 鋒即梅雨鋒, 此鋒由日本的東南方向西南延伸, 經過琉球、台灣一直到達華南地區, 500mb 上的東亞主槽即對應於此梅雨鋒。

圖 9 (d) 顯示 500mb 有兩個較大的氣旋渦度中心, 一個位於蒙古地區, 其值為  $6 \times 10^{-5}$  秒<sup>-1</sup>。另一個位於日本島, 其值為  $5 \times 10^{-5}$  秒<sup>-1</sup>。最大的反氣旋渦度中心位於中國大陸的東北, 其值為  $-5 \times 10^{-5}$  秒<sup>-1</sup>。對應於中緯槽的氣旋渦度場較對應於東亞主槽的氣旋渦度場為強。在東亞主槽的前方渦度平流是正的, 在主槽後方是負的。在朝鮮副槽的前方渦度平流是負的, 在後方是正的。

圖 10 是 NOAA-4 人造衛星所拍攝的紅外線照片, 照片上的亮度代表黑體輻射的溫度, 圖上白色部份直接表示該區域溫度低, 也間接地表示雲層的高度及厚度。圖中顯示有一個連續的雲帶, 由日本向西南延伸, 經過台灣一直到中國大陸東南, 在台灣北部有厚雲層, 另一連續的雲帶由蒙古一直延伸到中國大陸的西南地區。前一連續的雲帶對應於東亞主槽及梅雨鋒, 而後一連續的雲帶對應於中緯

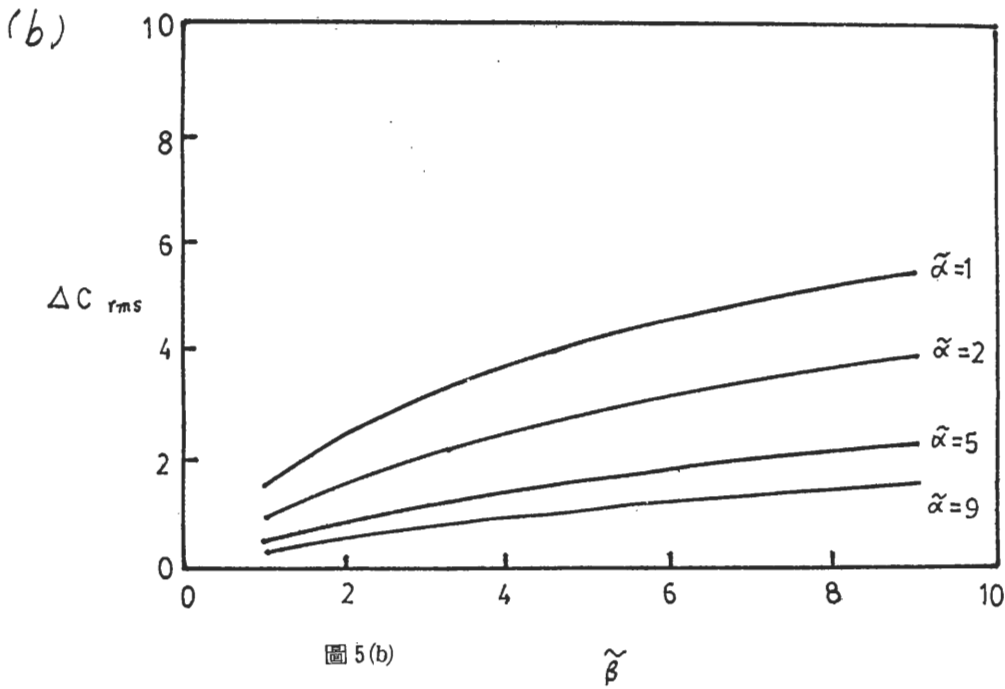
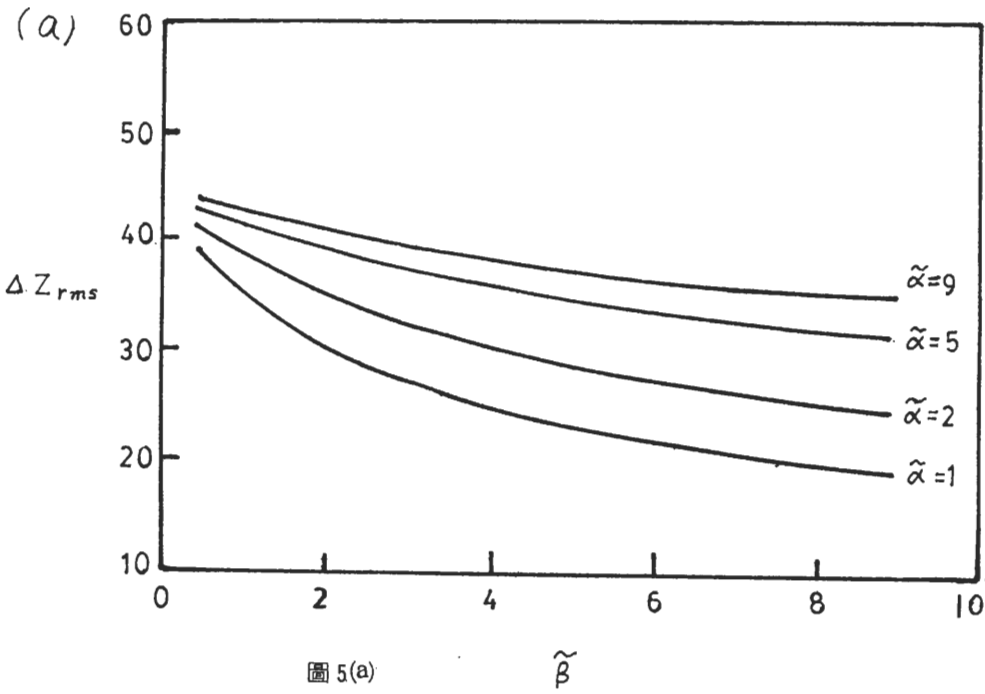


圖 5. 500mb 高度及風速場之差異值對觀測權重， $\tilde{\beta}$ ，之佳化特性曲線，(a)高度場差異值  $\Delta Z_{rms}$  (單位：公尺)，(b)風速場差異值  $\Delta C_{rms}$  (單位：公尺/秒)



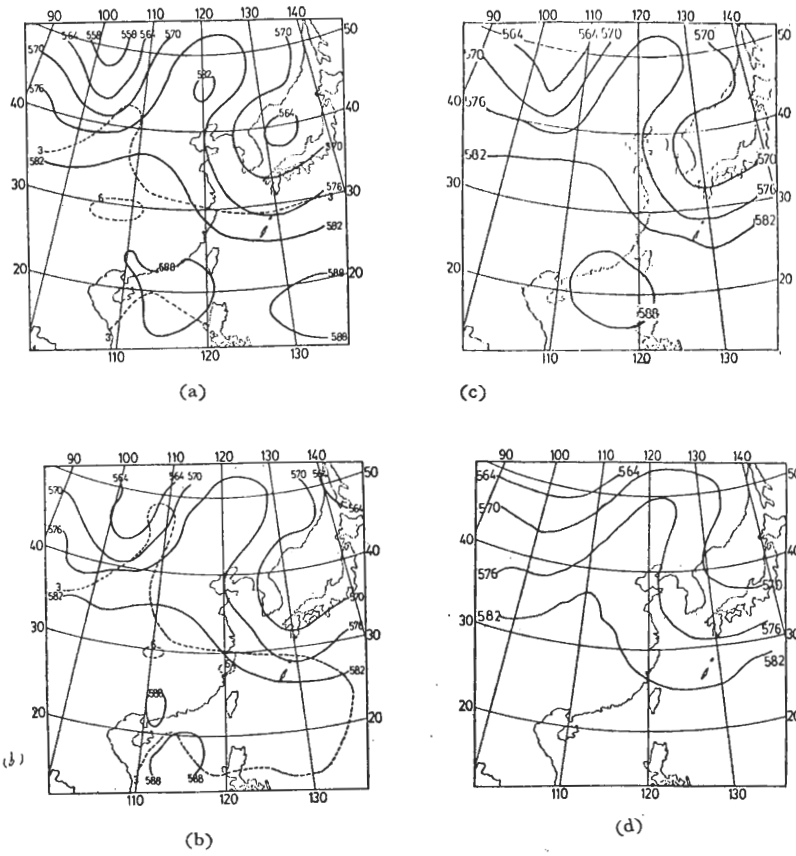
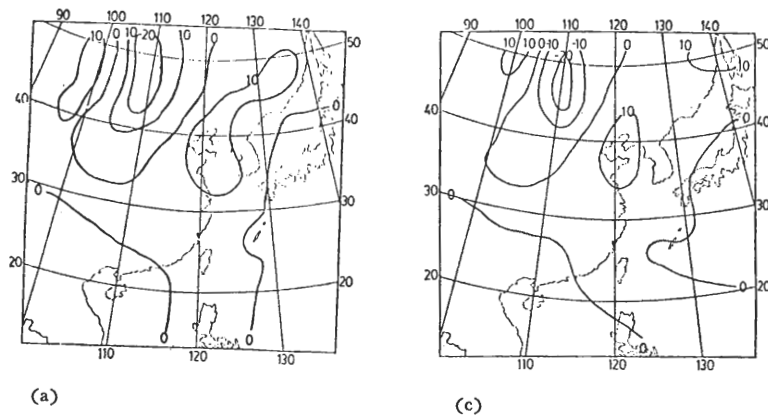


圖 6.

圖 6. 500mb 高度場分析圖 (單位:  $\times 10$  公尺)  
 (a) 為主觀分析, (b) 為 Cressman 客觀分析, (c) 為梁與謝的變分分析, (d) 為本文的分析結果



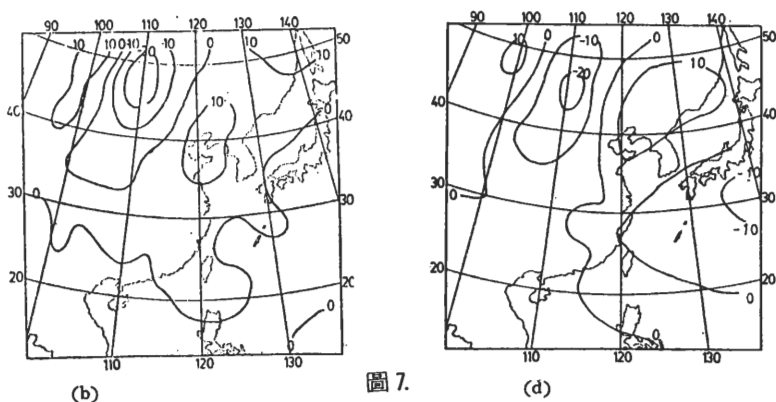


圖7. 500mb X分量風速場(單位:公尺/秒)  
 , (a)為主觀分析, (b)為Cressman客觀分析  
 , (c)為梁與謝的變分分析, (d)為本文的分析  
 結果

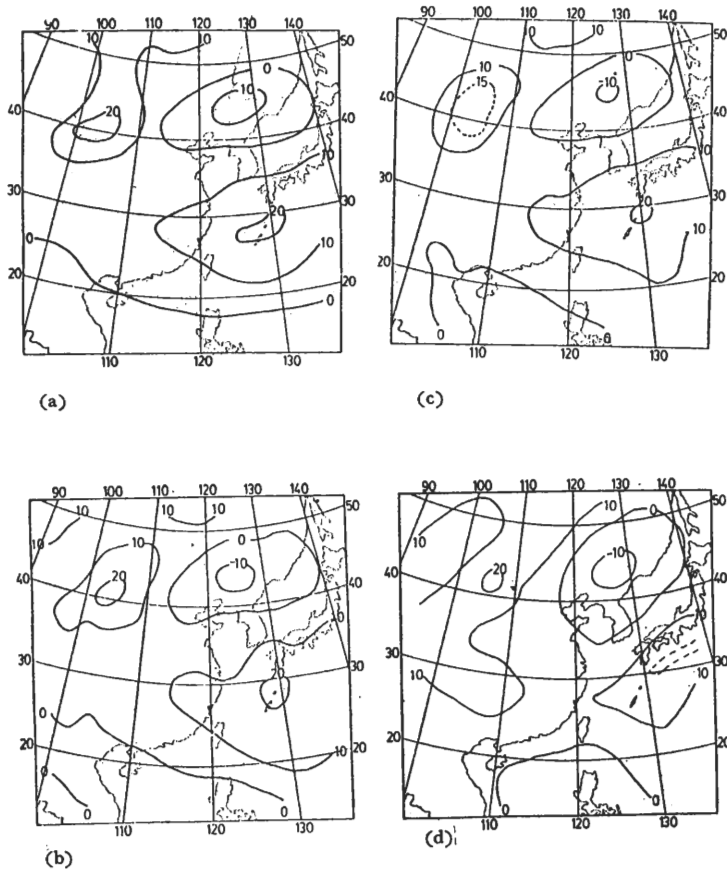


圖8. 500mb Y分量風速場(單位:公尺/秒)  
 , (a)為主觀分析, (b)為Cressman客觀分析  
 , (c)為梁與謝的變分分析, (d)為本研究的分析  
 結果

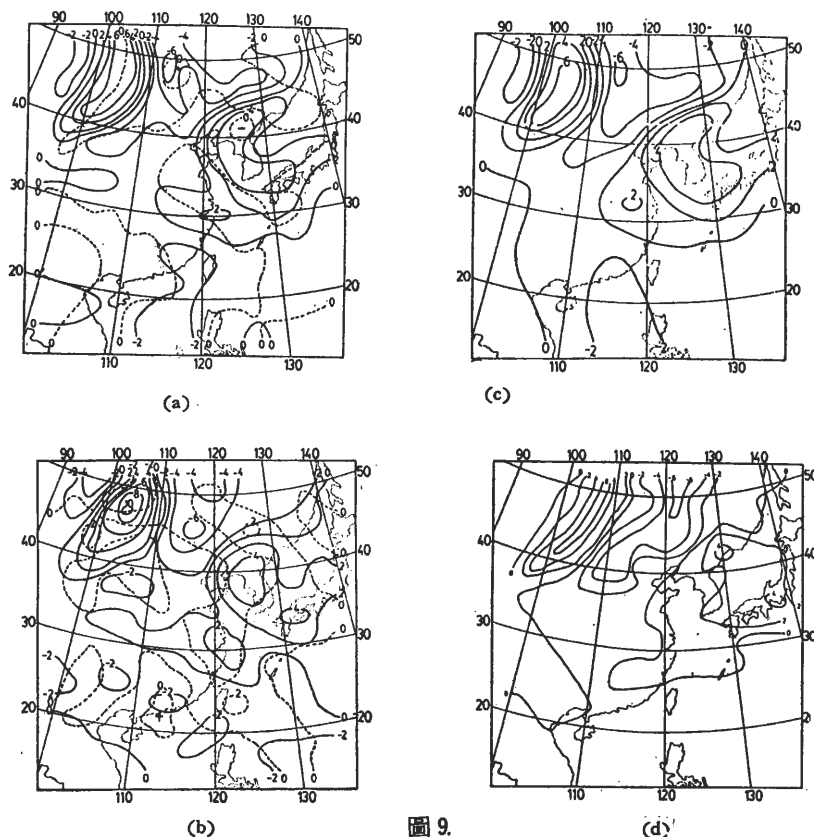


圖 9.

圖 9. 500mb 渦度場 (單位:  $\times 10^{-5}$  秒 $^{-1}$ ), (a)為主觀分析, (b)為 Cressman 客觀分析, (c)為梁與謝的變分分析, (d)為本文的分析結果。點線代表輻散量 (單位:  $10^{-5}$  秒 $^{-1}$ )。

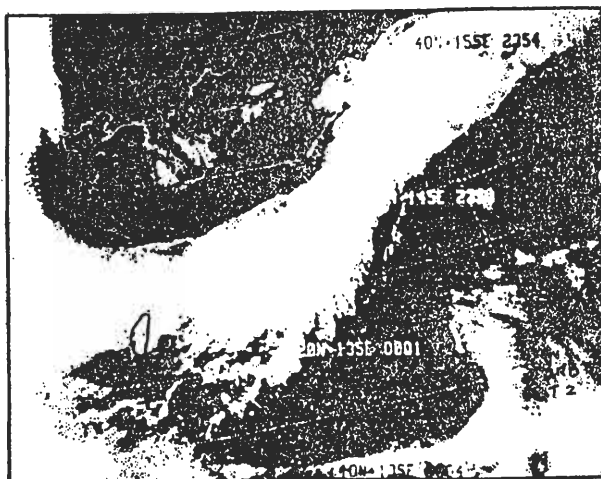


圖 10.

圖 10. NOAA-4 紅外光衛星照片 (1975 年 6 月 10), 白色虛線表示經緯度以及海岸線, 臺灣的位置用實線表示。

槽及海平面上位於蒙古高壓與鄂霍次克高壓間的低壓區及鋒面。在東北、黃海等地區是晴朗無雲的天氣，這是因為東北地區有高壓脊而黃海地區正好在東亞主槽的後方，該等地區有旺盛的下降氣流。

根據陳與蔡（1977）的梅雨報告，在東海及日本附近地區，相對濕度的梯度最大，相對濕度大於90%的濕空氣位於台灣北部，在蒙古地區也發現有濕空氣，相對濕度小於10%的乾空氣位於東海及華東地區。因此，本研究的分析場與衛星雲圖及陳與蔡的梅雨報告頗為配合。

茲比較四種分析的結果如下：

(1)高度場：在型態上，四種分析的高度場大致相似，但在強度上，本研究、梁與謝的變分分析及Cressman客觀分析的結果皆與主觀分析有些差異。在蒙古地區的高壓中心，主觀分析的結果較其他三種分析為高，在日本海上的低壓中心主觀分析的結果低於其他三種分析，然而高低壓中心的位置，四種分析皆相同。中緯槽及東亞主槽，其位置四種分析也都相同。

(2)風場：在中緯度，風場的型態及強風的位置，四種分析的結果大致相同，風速的x方向分量最大值都為20公尺/秒，其位置都在（110°E，45°N）。風速的y方向分量最大值亦都為20公尺/秒，其位置都在（105°E，40°N）。在西太平洋地區，風速的x方向分量的零線，本研究與梁與謝的分析較相似。在低緯度地區，四種分析的結果都稍微有些差異。

(3)渦度場：對應於中緯槽的氣旋渦度場，在強度上，本研究與主觀分析及梁與謝的變分分析相同，而Cressman客觀分析的強度較大，但是位置四種分析都相同，而在型態上四種分析彼此相似。對應於東亞主槽的氣旋渦度場的零線，本研究與主觀分析很近似，而Cressman客觀分析與主觀分析的差異較大。在低緯度地區，本研究與其他三種分析相似，亦即幾為反氣旋渦度場所涵蓋。

綜合上面的比較，四種方法的分析場，彼此非常相似，然而在西太平洋、雲貴高原及中南半島等地區，分析場的型態及強度，四種方法彼此稍有出入，這是由於這些地區測站比較稀少，資料缺乏，不易得到較肯定的分析結果。

## 五、結論與建議

本研究應用有限元素法，以線性平衡方程式為強勁動力約束條件，進行大氣定壓層的高度場與風場的變分佳化分析，以測站為三角形元素的節點，直接佳化每一測站的氣象變數值。本研究省掉傳統的客觀分析法，可節省計算時間，且可避免因採用傳統的客觀分析法而可能引進的誤差。個案研究的結果顯示，佳化後的高度場，風場以及用佳化後的風場所計算出來的渦度場，其型態及強度與主觀分析的結果大致相同，雖在測站稀少地區與主觀分析的結果稍有出入。佳化所得之渦度場及高度場，以衛星雲圖及陳與蔡的梅雨報告來印證，頗為融合。

然而，本研究的佳化值與觀測值兩者間之差異值稍大於通常可能的觀測誤差值，本文以線性平衡方程式為“強勁”動力約束條件，使高度場與風場的佳化值滿足線性平衡方程式，可是大氣中大尺度的運動是準平衡狀態，並不完全滿足線性平衡方程式，以線性平衡方程式為“弱勢”動力約束條件僅要求高度場與風場的佳化值“盡量滿足”線性平衡方程式，比較符合大氣中大尺度的運動情形或可縮小佳化值與觀測值兩者間之差異。更有進者，以線性平衡方程式為弱勢動力約束條件，進行有限元素法的變分佳化分析，將所得的分析值作為原始方程式模式的初始值，調整線性平衡方程式的權重，當可找出原始方程式模式對其初始值不滿足線性平衡方程式的容忍程度，換句話說，我們將會發現線性平衡方程式的權重大於何值時，所得到的分析值可以作為原始方程式模式的初始值。

然而，以線性平衡方程式為弱勢動力約束條件，經由變微分法所得到的尤勒-拉格蘭芝方程式為四階偏微分方程式，欲以有限元素法為數值方法來解四階偏微分方程式，則需採用較繁複的高階元素，即在一元素中，每一變數皆需用三次或三次以上的內插多項式來表示，其運算過程頗為繁難，這將是我們第二階段研究的主题。

本文僅以線性平衡方程式為動力約束條件來處理初值化的問題，如此所得的分析場僅是風場的旋轉部份（rotational part）與高度場達到平衡狀態。若要求更精確的分析場，可考慮將風的發散部份（divergent part）納入分析，使整個風場與高度場達到平衡狀態。其次可考慮加入溫度的分析，因為溫度場可以代表高度場在垂直方向上的梯度，加入分析可使所得到的分析場在水平和垂直方向上

均能滿足原始方程式。

若考慮將每一元素中的氣象變數提高為三次或三次以上的多項函數，以及將風的發散部份與溫度納入分析，將使問題變得相當繁複，但是我們寧可在初值化的手續上多下一些工夫，以期擁有較滿意的原始方程式預報模式的初始值，因為分析所得，每一氣象變數皆為函數形式，可算出每一元素中任意一點的氣象變數值，因此可適當地增加節點與元素的個數，使每一新元素的形狀及面積均能適中，就可在任一縮小的元素中，以線性多項式來近似任一氣象變數，將來以有限元素法作數值天氣預報時則只需用最簡單的線性元素，可節省相當多的數值預報所需的計算時間，更適於成為氣象作業單位例行的日常作業。

利用有限元素法作為數值方法來處理大氣科學的問題，其優點是以測站為節點，不必再構置有限差分法所需的等間距網格系統，以後的分析與預報都可直接使用測站上的觀測資料，所得到的分析與預報結果也都是在測站上，可直接與觀測值作比較。而有限差分法則必須先將測站的觀測資料轉換成等間距網格點上的資料，然後在網格點上作分析、預報與比較，這種間接方法難免失真，而難以判斷各種分析法與預報模式的優劣，因此，若以氣象資料的來源而言，用有限元素法處理氣象學上的問題，甚為自然。此外，三角形的二維元素能與不規則的邊界密切吻合，對不規則邊界的問題用有限元素法來處理比較恰當。

進行有限元素分析時，需要解龐大的聯立方程式，所需的計算機容量和計算時間都很大，有限元素法剛發展出來時，一般的計算機都無法處理，但是經過工程學者和應用數學家的多年研究，有限元素法現已高度的發展，研究結果已能大量的節省計算機記憶和計算時間。此外，由於每一元素中的變數值都用節點上的值來內插（此不同於傳統客觀分析法的內插），因此，所得到的結果也可以內插到等間距的網格點上，以便利計算機印出結果和繪出等值線。

綜上所述，用有限元素法處理氣象學上的問題有許多優點，具有極高的發展潛力，很值得我們繼續深入研究。

## 誌 謝

本研究承蒙梁文傑博士提供很多寶貴的建議，曾忠一博士、謝全生先生提供許多有價值的討論，台大土木工程系林聰悟先生提供高效率的解聯立方程式的電子計算機副程式，中正理工學院電子計算機中心陳端堉主任協助上機，余祥雲主任與簡來成博士的鼓勵，在此特表謝意。

## 參 考 文 獻

- 曾忠一，1976：東亞地區天氣資料變分客觀分析之研究。中央研究院物理研究所集刊，6，161-178。
- 曾忠一，1977：利用原始方程式進行變分客觀分析之研究。中央研究院物理研究所集刊，7，77-92。
- 梁文傑與謝全生，1980：有限元素法之變分客觀分析。中央研究院物理研究所集刊，10，211-239。
- Barnes, S.L., 1973: Mesoscale objective map analysis using weighted time series observations. NOAA Tech. Memo. ERL NSSL-62, 60pp.
- Chen, G.T.J. and C.Y. Tsay, 1977: A detailed analysis of a case of Mei-Yu system in the vicinity of Taiwan. Tech. Rep. No. Mei-Yu-001, Dep. Atmos. Sci., Nat. Taiwan Univ., 249 pp.
- Cressman, G.P., 1959: An operational objective analysis scheme. Mon. Wea. Rev., 87, 367-374.
- Cullen, M.J.P., 1974a: A finite element method for a nonlinear initial value problem. J. Inst. Math. Appl., 13, 233-247.
- Cullen, M.J.P., 1974b: Integrations of the primitive equations on a sphere using the finite element method. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 100, 555-562.
- Hinsman, D.E., 1975: Application of a finite element method to the barotropic primitive equations.

- M.S. Thesis, Naval Postgraduate School, Monterey, California, 80pp.
- Huebner, K.H., 1974 : The finite element method for engineers. John Wiley, New York, 500pp.
- Inman, R.L., 1970 : Papers on operational objective analysis schemes at NSSFC, NOAA Tech. Memo, ERL NSSL-51, 91pp.
- Lewis, J.M., 1972 : An operational upper air analysis using the variational method, *Tellus*, 24, 514-530.
- Sasaki, Y., 1958 : An objective analysis based on the variational method. *J. Meteor. Soc. Japan*, 36, 77-88.
- Sasaki, Y., 1969a : Numerical variational method of analysis and prediction. Proc. WNO/IUGG Symposium on Numerical Weather Prediction, Tokyo, Japan, Nov. 26-Dec. 4, 1968, Japan Meteor. Agency, Tokyo, VII 25-33.
- Sasaki, Y., 1969b : Proposed inclusion of time variation terms, observational and theoretical, in numerical variational objective analysis. *J. Meteor. Soc. Japan*, 47, 115-124.
- Sasaki, Y., 1970a : Some basic formalisms in numerical variational analysis. *Mon. Wea. Rev.*, 98, 875-883.
- Sasaki, Y., 1970b : Numerical variational analysis formulated under the constraints as determined by long wave equations and a low pass filter. *Mon. Wea. Rev.*, 98, 884-898.
- Sasaki, Y., 1970c : Numerical variational analysis with weak constraints and application to surface analysis of severe storm gust. *Mon. Wea. Rev.*, 98, 899-910.
- Sasaki, Y., 1976 : Variational design of finite difference scheme for initial value problem of an integral constraint. *J. Comp. Phys.*, 21, 270-278.
- Sheets, R.C., 1973a : Analysis of Hurricane Debbie modification results using the variational optimization approach. *Mon. Wea. Rev.*, 101, 663-684.
- Sheets, R.C., 1973b : Analysis of stormfury data using the variational optimization approach. NOAA Tech. Rept. ERL-264 WMPO-1, 92pp.
- Shuman, F.G., 1957 : Numerical method in weather prediction : II. Smoothing and filtering. *Mon. Wea. Rev.*, 85, 357-361.
- Staniforth, A.N., and R. W. Daley, 1977 : A finite element formulation for the vertical discretization of sigma-coordinate primitive equation models. *Mon. Wea. Rev.*, 105, 1108-1118.
- Staniforth, A.N., and H. L. Mitchell, 1977 : A semi-implicit finite element barotropic model. *Mon. Wea. Rev.*, 105, 154-169.
- Stephens, J.J., 1970 : Variational initialization with the balance equation. *J. Appl. Meteor.*, 9, 732-739.
- Wang, H.H., P Halpern, J. Douglas and T. Dupont, 1972 : Numerical solutions of the one-dimensional primitive equation using Galerkin approximations with localized basis functions. *Mon. Wea. Rev.*, 100, 738-746.

OBJECTIVE ANALYSIS BASED ON FINITE ELEMENT METHOD  
— USING THE LINEAR BALANCE EQUATION  
AS A DYNAMIC STRONG CONSTRAINT

Chin-Ching Wang

Department of Physics, Chung Cheng Institute of Technology

## ABSTRACT

An objective analysis in an inequally spaced grid system is developed using variational approach. The scheme is performed to minimize the differences between the observational and the optimized height and wind fields subject to some constraints. In this study, the linear balance equation is employed as a dynamic strong constraint. The observational stations are chosen a grid points and the triangular element system is constructed on them for the finite element analysis. The real data during Mei-Yu season in East Asia are utilized to investigate the applicability of the scheme.

The computational results show that the magnitudes and the general patterns of height, velocity and vorticity fields are in good agreement with the synoptic weather system and the NOAA-4 satellite pictures. Also, the comparison with the subjective and Cressman objective analysis is performed and discussed.

The finite element scheme is quite general. It may be applied to various weather systems with various constraints. Several progressive and possible extensions are also discussed.