

# 單調半拉格朗日方案在對流雲模擬上的應用

曾忠一 王旌榮

1. 中央研究院物理研究所
2. 國立台灣大學大氣科學研究所

## 摘要

由於半拉格朗日法相對於尤拉方案可增加時間步長而且不影響穩定性，因此模式積分較有效率但不失準確性。在使用半拉格朗日法時需要用到內插法來預測下一個時刻的值，但這些內插法常會造成預報值的過量 (overshoot) 或不足 (undershoot)，尤其是在梯度很大或不連續的地方更容易如此。以水汽場來說，內插後得到的預報值可能會過飽和或是負值，以致造成微物理過程參數化的困擾。解決這種問題的許多方法被提出來，最重要的是形狀保持方案 (shape preserving) 或單調方案 (monotone)。

本研究使用的方案有準單調方案 (QMSL; quasi-monotone semi-Lagrangian)、線性約束方案 (LCSL; linear constraint semi-Lagrangian) 和五次內插多項式法。QMSL 利用高階和低階內插法的組合以建立的一個單調方案，LCSL 則是利用出發點鄰近的格點來判斷是否需要加入線性約束條件來達到單調性。使用五次內插多項式配合形狀保持性質的導數估計值，以做為半拉格朗日法的高階內插公式，同樣的也具有單調的性質。

本研究探討二維無輻散旋轉流場、一維水汽平流凝結過程和二維暖雲模式中上述各種單調方案的特性。

## 一、前言

由於大氣問題的數值模擬中數值解與真解有所不同，多年來學者們致力於改善數值誤差，如 Boris and Book (1973, 1976) 等。大氣模擬中的一個重要部份是處理平流項，也就是對平流項做數值近似，其中一個常用的方法是半拉格朗日 (semi-Lagrangian) 平流法。這是一種有效率而準確的平流方案 (Bates 1985; Rasch and Williamson 1990; Smolarkiewicz and Pudykiewicz 1992; Priestley 1993)。半拉格朗日法是由某一格點沿風場特徵線回溯到上一時刻的出發點，然後以內插法求出預報值。這種平流方案的優點，除了可在規則格點上進行計算外，還可使用較大的時間步長，因此在計算上

比尤拉 (Euler) 方案更有效率。以往在尤拉方案中，令人困擾的是時間步長受到穩定性的限制。半拉格朗日法，則不受穩定性的限制，只須考慮空間的截斷誤差。Robert (1981) 使用三時間層半隱式 (semi-implicit) 半拉格朗日法的淺水方程模式，研究結果顯示，穩定的時間步長比尤拉方案大 6 倍。Bermejo (1990) 指出，在無輻散流場中使用半拉格朗日法，並以三次樣條函數 (cubic spline) 進行內插時，質量是守恆的，這是到目前為止具有質量守恆性質的半拉格朗日平流法。

使用半拉格朗日法時需用到內插法來求得預報值，但是在內插出發點處物理場量，會因內插方案的

特性而產生非物理性的負值或振盪，尤其在強梯度或不連續處更容易發生。當這種情形發生在水汽時，會產生負值的混合比和過大的水汽混合比，因而導致微物理參數化上的困擾。為了使內插值正確的表達初始物理場，內插方案必須是正定的 (positive definite) 甚至是單調的。

Boris and Book (1973, 1976), Zalesak (1979) 提出一種在有限差分方案中對通量項做非線性修正的方法，稱為 FCT (flux-corrected transport) 方案。Carpenter *et al.* (1990) 的 PPM (piecewise parabolic method) 方案也是一種保持物理場單調性的方法。Williamson and Rasch (1989) 指出，使用不同的內插法也可達到物理場的單調性。Bermejo and Staniforth (1992) 在內插方案中加入簡單的約束條件，大量的減少數值振盪，防止不合理的負值物理場發生，來維持物理場的單調性。

當方程中沒有強迫項時，單調方案可適當的維持物理場的單調性。Grabowski and Smolarkiewicz (1990) 指出，在多個方程間有強迫項的交互作用時，使用單調平流方案還是不足以防止非物理性的數值振盪發生，這是由於強迫項與守恆方程之間的非線性相互作用所造成的影響。Pellerin *et al.* (1995) 指出，即使不使用單調方案的半拉格朗日法，在不連續處的數值振盪也比使用單調方案的尤拉法要小。

本研究的內容分成 6 個部分，第 2 節中將介紹本研究使用的三種單調方案，分別是 QMSL 方案、LCSL 方案和五次內插多項式法。第 3 節是單調半拉格朗日方案的數值實驗，將一缺口圓柱體放在二

維無輻散旋轉流場內，將它平流六圈後，來看缺口圓柱體的形狀保持性。第 4 節是一維平流凝結實驗，使用一組有相互作用的方程組，探討在有強迫項的情況下平流後物理量場的單調性。第 5 節是將單調方案應用在二維雲模式中，比較各個單調方案間的差異。最後一節則是結論。

## 二、單調方案

在半拉格朗日平流法的計算中，必須用到許多內插的計算，由於出發點處純量場的內插和規則網格，以致在強梯度附近常出現非物理性的負值或是假波 (spurious ripples)，因此內插算符必須是正定的或是單調的，而且內插算符的數值耗散性要減到最小。下面簡介 3 種單調方案。

(a) 五次內插多項式法：Holnicki (1995) 使用五次內插多項式與具有形狀保持性質的導數估計值做為內插算符。這是一個 4 點內插的方案，需要使用到 4 點上的值以及中間兩點的導數估計值，這樣建構了一個五次內插多項式法。他也提到內插算符的單調性與所選用的導數估計值有關。詳細的方法請參考 Holnicki (1995)。

(b) QMSL：這是由 Bermejo and Staniforth (1992) 提出的準單調方案 QMSL (quasi-monotone semi-Lagrangian)。他們的構想主要來自於 Boris and Book (1973) 及 Zalesak (1979) 的 FCT 方案，這個單調方案本質上是混合了高階與低階內插，並且在低階內插中加入修正項。這個修正項在物理場足夠連續的區域使內插值等於高階內插值，在物理場不夠平滑的區域將內插值由原本的高階內插轉換成由修正過後的低階內插來近似。

(c) LCSL：這是 Pellerin *et al.* (1995) 提出的，與準單調 QMSL 方案類似，這

個方案不同於 QMSL 方案的是，當高階內插值大於 (小於) 出發點鄰近的局部最大值 (最小值) 時，就改用低階線性內插值做為新的預報值。他們提出的線性約束 LCSL 方案同樣的也有 FCT 方案的精神，也就是混合了高階與低階內插來達成物理場的單調性。

## 三、二維無輻散旋轉流場實驗

為了解半拉格朗日法加入單調方案後的特性，我們利用線性平流方程平流一個物理量，不計及強迫項的作用。考慮以風場  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  平流一物理量場  $c(\mathbf{x}, t)$ ，其中  $\mathbf{x}$  為位置向量， $t$  為時間，則線性平流方程為

$$\frac{dc}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = 0 \quad (1)$$

根據半拉格朗日平流法，(1) 式在任一時刻  $t$  的解為

$$c(\mathbf{x}, t + \Delta t) = c(\mathbf{x} - \boldsymbol{\alpha}, t) \quad (2)$$

其中  $\Delta t$  代表時間步長， $\boldsymbol{\alpha}$  為在  $\Delta t$  時間內物理量場的位移，

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)$$

實驗中所用的速度場  $\mathbf{u}$  為無輻散風場，具有下面的形式：

$$\mathbf{u} = [-\omega(x - x_0), \omega(y - y_0)]$$

其中角速度  $\omega = 0.3636 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$  不隨時間改變。 $(x_0, y_0)$  為旋轉場中心，放在積分範圍的中央。積分範圍為 100 單位乘以 100 單位，格距為 1 單位。時間步長取 1800 秒，物理量場旋轉一圈需 96 個時步。在這個實

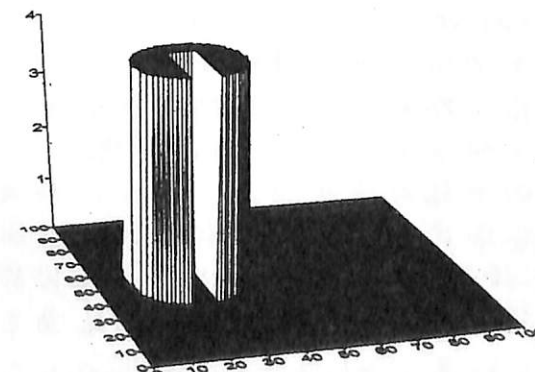


圖 1. 缺口圓柱體的初始場。

驗中，使用的初始物理量場為一個缺口圓柱體，高度 4 個格距，半徑 15 個格距。缺口部分的寬度與長度分別為 6 和 22 個格距。為了計算各個單調方案的誤差，我們採用 Takacs (1985) 的方法，將總誤差以均方差表示，它是耗散誤差與頻散誤差的和：

$$E_{\text{total}} = \|c - C\|^2 = E_{\text{diss}} + E_{\text{disp}}$$

表 1. 二維無輻散流場實驗結果比較。

方案	mass	Ener.	max	min	$E_{\text{total}}$
真解	1.000	1.000	4.000	0.000	0.000
SL	1.001	0.889	4.699	-0.743	0.074
Hol.	1.004	0.782	3.910	0.000	0.088
QMSL	1.011	0.786	3.994	0.000	0.088
LCSL	1.005	0.745	3.831	0.000	0.095

我們將初始的缺口圓柱體平流 6 圈之後比較這些單調方案之間的差異。圖 1 為缺口圓柱體的初始場，這也是轉了 6 圈以後的解析解。使用五次內插多項式法、QMSL 方案及 LCSL 方案等單調方案後，缺口圓柱體大致都能維持它的形狀，為節省篇幅起見沒有圖示 4 個方案的結果，但由表 1 可得知其優劣。由表 1 中可知，(三次樣條函數進行內插的) 傳統半拉格朗日法，質量近乎守恆，能量 (即二次矩量) 隨時間減小，缺口圓柱體的最大值與最小值都有過量及不足的現象，總誤差主要來自於頻散誤差。在使用 3 個單調方案以後，最大值以 QMSL 方案最接近初始場，其次為五次內插多項式法，最後為 LCSL 方案；最小值在各方案中都一樣為零，也就是說每種單調方案對於物理場過量與不足的產生都能有效地抑制。在質量守恆性方面，各個方案都呈現質量成長現象，增加的幅度以 QMSL 方案最多，約 1.12%；LCSL 方案次之，約 0.52%；五次內

插多項式法最少，約 0.37%。能量

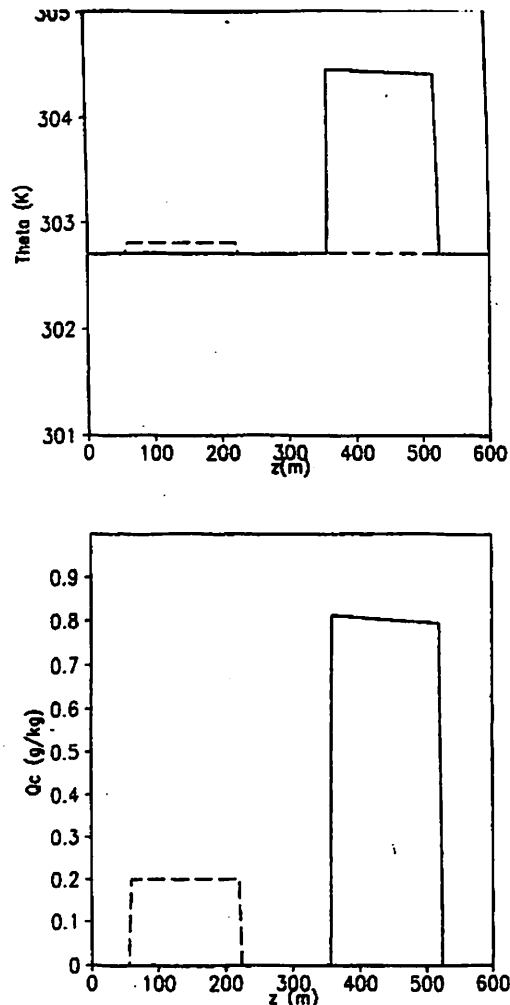


圖 2. 一維平流凝結實驗的解析解，虛線與實線分別代表平流前後的值。上圖和下圖分別為位溫和雲滴混合比。

在各單調方案之間都是減少的。傳統半拉格朗日法的誤差大多是由頻散誤差而來，而加入單調方案之後耗散誤差都會大幅地增加，甚至大於頻散誤差。在花費的計算時間方面，單調方案雖然都比傳統半拉格朗日法稍大，但差距並不多，大致在 1000 s 左右。因此使用單調方案的半拉格朗日法可以有效率的維持物理量的單調性。

#### 四、一維平流凝結實驗

Grabowski and Smolarkiewicz

(1990) 指出，在有外力強迫項的情況下，即使單調方案還是會產生因數值方法引起的假波 (spurious ripples)，這是由於強迫項與守恆方程之間的非線性作用而導致的。為了探討這個問題，我們使用一個包括有熱力方程及水汽與雲滴的轉換方程的方程組，假設氣塊以等速垂直上升。在整個平流過程中，水汽可因過飽和而凝結成雲滴並釋放潛熱，在雲區裡的雲滴因未飽和而蒸發冷卻。在這個實驗中所用到的方程組為：

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{L\theta_0}{c_p T_0} C_d \quad \frac{dq_v}{dt} = -C_d \quad \frac{dq_c}{dt} = +C_d$$

(3)

其中  $\theta$  為位溫， $q_v$  為水汽混合比， $q_c$  為雲滴含量， $T$  為溫度， $c_p$  為定壓比熱， $L$  為蒸發凝結潛熱，而  $C_d$  為凝結率。當過飽和時水汽凝結成雲滴，此時凝結率  $C_d > 0$ ；未飽和且雲滴存在時，雲滴蒸發成水汽，則凝結率  $C_d < 0$ 。

(3) 式可用分步法 (process-splitting, fractional time step) 法求解。第一步先計算絕熱的平流過程，使用二時間時間層的半拉格朗日平流法，如 (2) 式所示。第二步則是凝結過程與飽和調節過程。

位移  $\alpha$  的值需要用疊代法求出，但在此上升速度為常數，因而不必使用疊代法，故此時位移  $\alpha = w \cdot \Delta t$ 。到達點  $x$  的值等於出發點  $x - \alpha$  的值，而出發點  $x - \alpha$  的值則是由出發點鄰近格點內插得到的。

給定初始條件及速度場，(3) 式的解就可決定出來。環境場設為等位溫  $\theta = 302.7$  K，相對溼度為 30%。擾動場深度 160 m，其位溫比環境場多 0.1 K，水汽混合比  $q_v$  為飽和，雲滴含量  $q_c = 0.2$  g kg<sup>-1</sup>。整個平

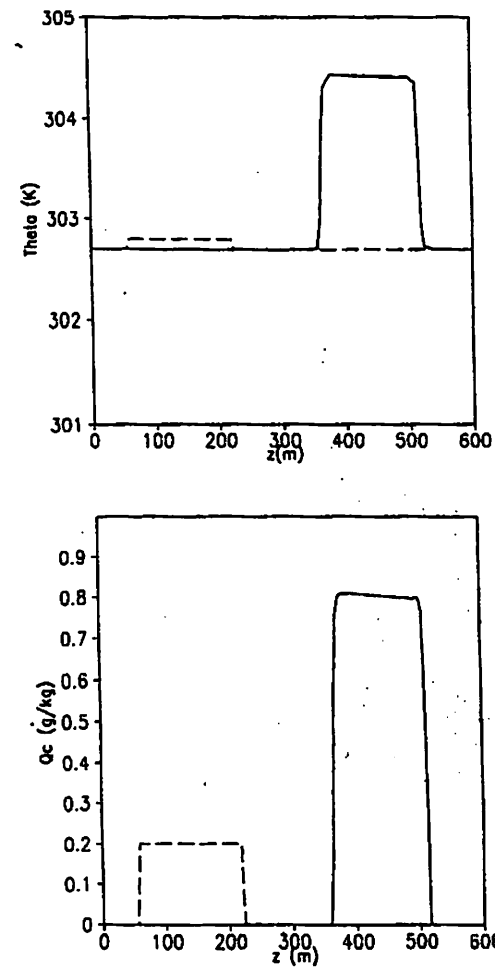


圖 4. 同圖 2，但為 QMSL 單調方案加 NLSL 方案平流後的結果。

流過程為等速  $w = 2$  ms<sup>-1</sup> 上升，歷時 150 s，格距  $\Delta z = 4$  m，時間層有 58 層，因此每個時步  $\Delta t \approx 2.586$  s，相應的 Courant 數  $w\Delta t/\Delta z$  約為 1.3。

圖 2 為平流後位溫和水汽混合比的解析解，可以看到平流後的水汽場還是呈飽和狀態，雲滴則增加為 0.8 g kg<sup>-1</sup>，相應的因水汽凝結成雲滴釋放潛熱，使得位溫上升了 1.8 K。使用三次樣條函數做為內插公式進行平流後，在未加入單調方案之前，在各物理場不連續的地方都有過量及不足的情形發生。而使用了 QMSL (圖 3) 或 LCSL 單調方案 (未顯示) 之後，水汽及雲滴的過

量和不足的現象都不見了，但位溫場邊緣的不連續處仍有蒸發冷卻的情形，不過平流過程後的物理場大致上仍有單調性。使用五次內插多項式法配合形狀保持的導數估計值做為內插公式時，整個單調性並沒有 QMSL 或 LCSL 單調方案那麼好，在不連續的地方比較圓滑，同樣的在位溫場也還是有不足的現象發生。

關於位溫場經單調半拉格朗日方案平流之後在邊緣處仍有蒸發冷卻的現象，Pellerin *et al.* (1995) 提出下面的想法：在雲的邊緣處是由  $q_c = 0$  及  $q_v < q_{vs}$  的晴空格點和  $q_c > 0$  及  $q_v = q_{vs}$  的雲區格點這兩種格點內插得到的，因此內插後的結果為  $q_c > 0$  及  $q_v < q_{vs}$ ，以致雲滴蒸發，造成在邊緣處的蒸發冷卻。針對這樣的問題，他們提出了一種方法稱為非線性約束條件 (NLSL) 方案。也就是說當內插後仍存有雲滴，而且在出發點鄰近的格點沒有雲滴存在，並且內插後相應的水汽處於未飽和狀態時，此時到達點的雲滴是內插方案所產生的，可將它去除。

在原有的單調方案中再加入 NLSL 方案之後，用 QMSL 單調方案 (圖 4) 加上 NLSL 方案的結果，其單調性頗為理想，而且位溫場的蒸發冷卻去除了。至於五次內插多項式法及 NLSL 方案後的結果，同樣的在位溫場的不足消失了，但是整個耗散性比三次樣條內插法來得大。

#### 五、二維非靜力雲模式

接著使用二維非靜力可壓縮暖雲模式，由於可壓縮模式中聲波重

力波的影響，時間步長的選取不能太大，為此採用半隱式方案以增進模式的效率。在這個模式中，平流過程採用二時間層半拉格朗日法，隱式方案則採用梯形方案，關於各種數值方案的特性，在曾（1993）書中都有詳盡的說明。為了探討單調方案在雲模式中的特性，在此不考慮複雜的冰相結構，而用較簡單的暖雲結構。

模式中所使用的控制方程包括三個動力方程、熱力方程、水汽方程、雲滴方程和雨滴方程等7個，下面是這7個控制方程。水質方程和熱力方程分別為

$$\frac{dq'_v}{dt} + w \frac{\partial \bar{q}_v}{\partial z} = P_v + D_{q_v} \quad (4)$$

$$\frac{dq'_c}{dt} = P_c + D_{q_c} \quad (5)$$

$$\frac{dq'_r}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\rho} V_r q_r) + P_r + D_{q_r} \quad (6)$$

$$\frac{d\theta'}{dt} + w \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = \frac{L_v}{c_p \bar{\pi}} P_\theta + D_\theta \quad (7)$$

其中  $q$  是水質的混合比，下標  $v$  代表水汽， $c$  代表雲滴， $r$  代表雨滴，而  $q'_v = q_v - \bar{q}_v$  為水汽偏差， $\theta' = \theta - \bar{\theta}$  為位溫偏差， $V_r$  為雨滴的終端速度， $P$  為水質產生項， $D$  為次網格擴散項。3個動力方程是

$$\frac{du}{dt} + c_p \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi'}{\partial x} = -c_p \theta'_v \frac{\partial \pi'}{\partial x} + F_x \quad (8)$$

$$\frac{dw}{dt} + c_p \bar{\theta}_v \frac{\partial \pi'}{\partial z} - B = -c_p \theta'_v \frac{\partial \pi'}{\partial z} + F_z \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\pi'}{dt} + w \frac{\partial \bar{\pi}}{\partial z} + \frac{R_d}{c_v} \bar{\pi} D \\ = \frac{R_d}{c_v} \frac{\pi}{\theta_v} \frac{d\theta_v}{dt} - \frac{R_d}{c_v} \pi' D \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $u$  和  $w$  分別為  $x$  和  $z$  方向的風速， $\pi = (p/p_0)^{R_d/c_p}$  為無因次氣壓，

$\pi' = \pi - \bar{\pi}$  為氣壓偏差，其中  $p_0 = 1000$  hPa， $c_v$  為乾空氣的定容比熱， $\theta_v$  為虛位溫， $F_x$  和  $F_z$  為擴散項。此外， $D \equiv \partial u / \partial x + \partial w / \partial z$  表示散度。 $B \equiv g(\theta' / \bar{\theta} + 0.61 q'_v - q_c - q_r)$  示浮力。

我們使用半隱式半拉格朗日法對(4)到(10)式進行積分，全導數項 ( $d/dt$ ) 採用半拉格朗日平流法，聲波重力波項採用隱式的梯形方案。剩餘項、非絕熱項及非聲波重力波項則採用顯式的向前時間差分方案。由於使用隱式方案，因此必須求解  $\pi'$  的 Helmholtz 方程，這裡使用 Gauss-Seidel 疊代法求解，大約疊代 40 次就可收斂。

水質方程(4)到(6)式和熱力方程(7)式中的生成項  $P$  與雲微物理有關，分別代表各水質的生成或耗散，這裡使用 Kessler (1969) 的微物理參數化法。

模式中的各類水質經過平流、擴散、微物理等的過程中，水汽會發生過飽和或未飽和的情形，在此使用飽和調整技術，使得水汽不致於有過飽和的現象。也就是假設當有雲滴存在時，水汽要維持飽和，當過飽和時水汽凝結成雲滴，而在未飽和時雲滴馬上蒸發成水汽，若仍未飽和，則雨滴繼續蒸發，以維持飽和。這裡使用的飽和調整技術採用 Soong and Ogura (1973) 的方法，這方法不需用疊代法。

本研究採用熱帶標準大氣的溫度和溼度做為模式的環境條件。地面溫度為 25 °C，從地面向上到雲底溫度按乾絕熱遞減率減少，雲底以上的溫度遞減率為 6 °C km<sup>-1</sup>，雲底假定為 0.8 公里。地面相對溼度為 70%，從地面到雲底，相對溼度線性增加，到雲底時為 90%。雲

$$\theta' = \theta_0 \{1 - [(z_0 - z)/(z_0 - \Delta z/2)]^2\} (1 - r^2/r_0^2) \quad (11)$$

其中  $\theta_0 = 0.5$  K 為位溫的最大偏差量，熱胞中心位於  $z_0$  處的中心軸上， $r_0 = 1.2$  km， $z_0 = 1$  km，位溫偏差最大值的高度位於緊靠雲底上方的網格中央。在雲底上方正位

溫偏差區和區域上方與兩邊向外一個網格範圍內，相對溼度設為 100%。

在下邊界和上邊界為剛體，即邊界上所有的變數都維持不變。在區域模式中使用半拉格朗日法時，出發點有時會位於積域之外，此時則用邊界與軌跡的交點做為出發

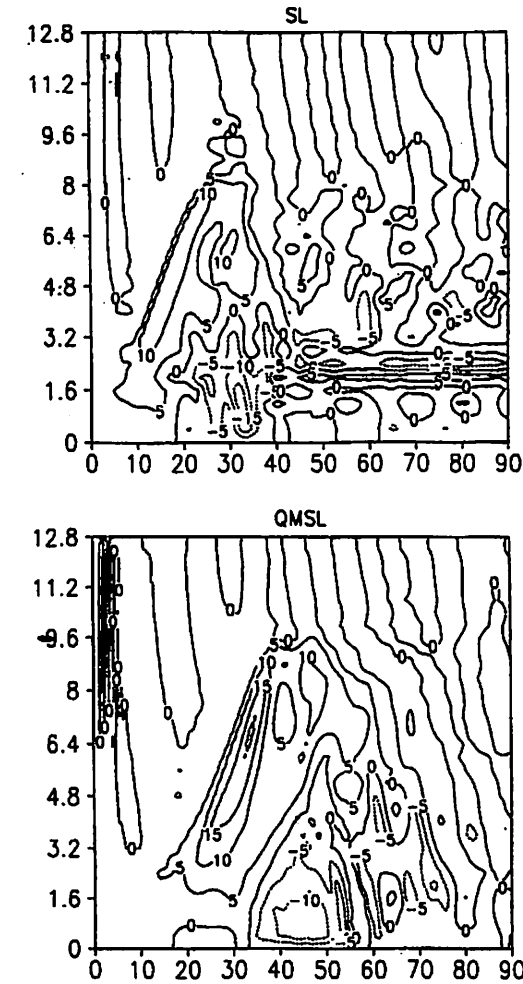


圖 5. 暖雲模式垂直速度  $w$  在中心軸的時間變化，(ms<sup>-1</sup>，間距 5 ms<sup>-1</sup>)。橫軸為時間 (min)，縱軸為高度 (km)。

底以上的相對溼度以 7.5 % km<sup>-1</sup> 的速率向上遞減，在更高的高度上相對溼度至少維持在 30%。這種溫溼分布表示，在大約 5 公里以下是條件不穩定的。模式中的環境風場假設為靜止狀態。

為了使雲對流發展起來，在模式中心軸靠近地面處放置一個熱胞做為初始擾動，這個熱胞與環境條件一起組合成了初始條件。熱胞的大小和位溫偏差量如下式所示：

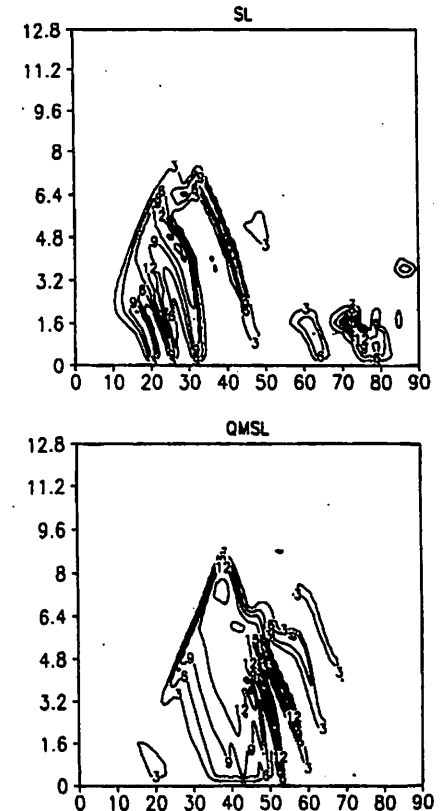


圖 6. 同圖 5，但為雨滴混合比  $q_r$  (g kg<sup>-1</sup>，間距 3 g kg<sup>-1</sup>) 在中心軸的時間變化。



點。

模式的積分範圍為 12.8 km×12.8 km，格距 $\Delta x=\Delta z=400$  m，時間步長 $\Delta t=20$  s。平流項使用二時間層的半拉格朗日法，聲波重力波項則使用隱式方案，動量場的內插公式使用三次樣條函數，也就是不使用單調方案，而位溫場和水質場的內插公式分別使用 QMSL 方案、LCSL 方案和 Holnicki (1995) 的五次內插多項式法等 3 種單調方案，並且以三次樣條函數內插法來做為比較的基準。

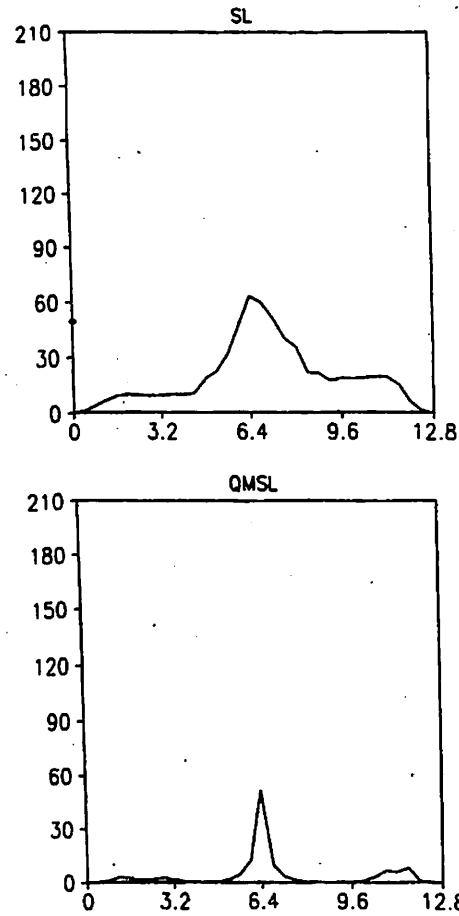


圖 7. 暖雲模式於第 90 分鐘時在地面累積降水的空間分布圖。橫軸為地表 (km)，縱軸為累積降水 ( $g g^{-1}$ )。

來得短，SL 的第一個最大上升速度約在 20 分鐘時出現在 5.6 公里，第二個最大上升速度在 46 分鐘時出現在 5.6 公里。Holnicki 法的上升速度持續較久，垂直範圍也較大，第一次的最大上升速度在 35 分鐘時出現在 6.4 公里，第二次最大上升速度在 42 分鐘時出現在 7.2 公里，而且比第一次強。QMSL 法的最大上升速度在 35 分鐘時出現在 6.8 公里，在 55 分鐘時又有另一個最大上升速度出現在 5.2 公里處。LCSL 法垂直速度的分布型態和 QMSL 法相似，最大上升速度在 35 分鐘時出現在 7.2 公里，在 55 分鐘時也有另一個最大上升速度位於 6 公里處。SL 法的下沉氣流在 18 分鐘出現，

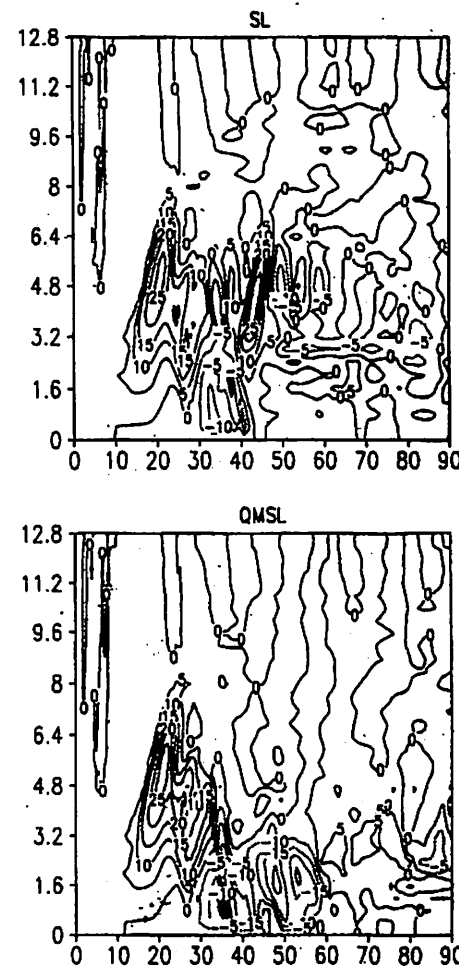


圖 8. 同圖 5，但為個案模擬。

我們對傳統半拉格朗日法(以下簡稱傳統半拉格朗日法為 SL)、QMSL 單調方案、Holnicki (1995) 五次內插多項式法(以下簡稱為 Holnicki)以及 LCSL 單調方案這四種方案的雲模式各積分 90 分鐘，為節省篇幅起見後二者的結果未以圖顯示出來。圖 5 為模式中心軸垂直速度  $w$  隨時間的變化，其值可視為對流雲強度的指標。由圖中可看出，垂直速度  $w$  隨時間緩慢上升，在雲頂上呈現一種有規則的振盪形式。此種振盪是由於雲頂上方的未飽和空氣上升絕熱冷卻所產生，因為空氣未飽和所以不易產生雲。在這 4 種方案中，傳統半拉格朗日法的生命期比加入單調方案的生命期

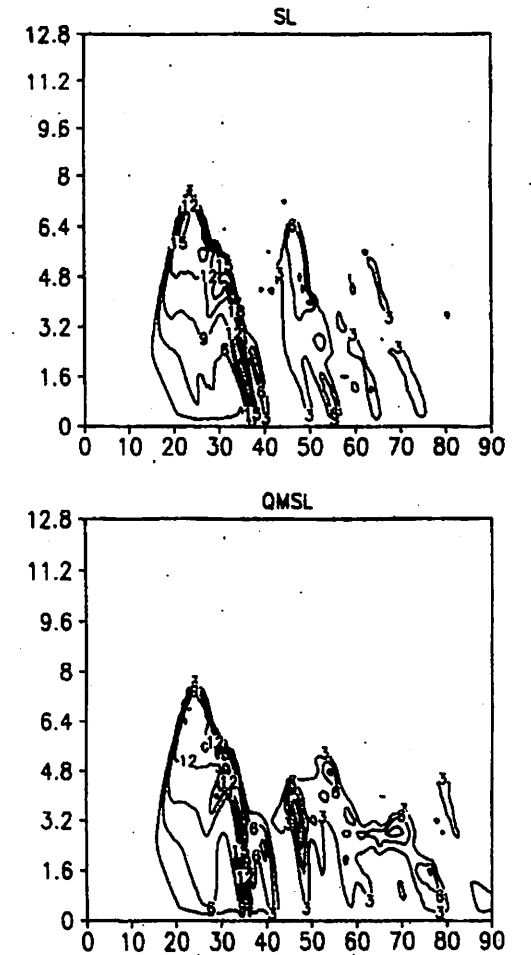


圖 9. 同圖 6，但為個案模擬。

持續了約 20 分鐘。Holnicki 的下沉氣流由 16 分鐘一直到 90 分鐘都出現在底層，QMSL 的下沉氣流在 18 分鐘時就出現，但主要是發生在 32-57 分鐘之間。LCSL 法的下沉氣流則發生在 18-81 分鐘之間。SL 法下沉氣流的高度約在 3.2 公里以下，Holnicki 約 2 公里以下，QMSL 和 LCSL 法都約在 4 公里以下。

雲滴混合比  $q_c$  的分布型態大致位於 3.2km 以下，也就是大於 0 °C 的地方，之後隨著對流雲上升在雲頂凝結成雲滴。對流雲達最高點後，4 種方案的雲滴則都存在於 5 公里以上的高度，而 SL 在 40 分鐘後於 5 公里之下暖溼地區有雲滴存在，使得此處的位溫偏差值偏大。

圖 6 為雨滴混合比  $q_r$  於中心軸隨時間的變化，單位為  $g\ kg^{-1}$ ，SL 的雨滴最早出現，約在 10 分鐘時出現，SL 的雨滴混合比出現高度最低，約 8 公里，其他單調方案的高度都在 9.6 公里，這與雲滴混合比在地的出現時間從 20 分鐘到 50 分鐘，而 60 分鐘到 85 分鐘的地面雨滴混合比則是由先前暖溼地區的雲滴形成。QMSL 法的雨滴混合比出現時間在 15 分鐘到 60 分鐘之間。LCSL 法的雨滴混合比出現時間在 15 分鐘到 65 分鐘之間。Holnicki 法的雨滴混合比出現時間分布最長，從 15 分鐘一直持續到 85 分鐘。

圖 7 為模式在第 90 分鐘時的地面累積降水量空間分布圖，SL 的降水分布型態較廣，最大值約為 63 mm，而使用單調方案的降水分布都較集中在中心窄區，以 Holnicki 法的地面累積降水量較大，最大值約為 195 mm，QMSL 法和 LCSL 法地面累積降水量的最大值則分別為

52 mm 和 64 mm。

上面的分析顯示，使用和未使用單調方案的對流雲都可以發展起來，但對流的時間尺度則以單調方案的對流雲較長，無單調方案的對流雲較短。在對流開始的時刻方面，以使用單調方案的對流雲較晚出現，未使用單調方案的對流雲其對流較早發生。使用單調方案的上升氣流強度較大，同時雲頂高度也較高，而下沉氣流則以未使用單調方案的較強。使用單調方案的下沉氣流稍弱。地面降水方面，使用單調方案的地面累積降水都比較集中模式中心窄區，未使用單調方案的降水分布則較廣。

任何大氣模式最好的驗證就是和它所模擬的實際觀測現象做比較，然後由比較的結果得到某些結論來做為模式改進的依據或是提供模擬資料以支持實驗的進行。因此在這個個案模擬實驗當中，我們選取了 1998 年 4 月 13 日 1200Z 台北測站的探空資料做為對流雲發生時的大氣環境條件來模擬對流雲的發展過程，以探討模式對實際大氣的模擬能力，進而做為今後改進模式缺點的參考。

圖 8 為垂直速度  $w$  隨時間的變化，單位為  $ms^{-1}$ 。與圖 5 不同的是上升氣流的強度明顯地較強。與前面不同的是，不管有沒有使用單調方案其上升氣流強度、分布型態都相似，但以 Holnicki 的雲頂高度最高。在下沉氣流方面以 Holnicki 出現的時間較晚，約晚了 10 分鐘。至於位溫偏差值  $\theta'$  隨時間的變化，同樣地其分布型態也都分別與垂直速度  $w$  的分布型態相似。最大值出現時間都差不多，但未使用單調方

案的稍微早些出現。雲滴混合比  $q_c$  隨時間的變化，單位為  $g\ kg^{-1}$ ，四種方案都隨對流雲上升而出現在雲頂附近。圖 9 為雨滴混合比  $q_r$  隨時間的變化，單位為  $g\ kg^{-1}$ 。可以看到雲滴轉變成雨滴之後隨時間落至地面，而到達地面的時間大約在第 20 分鐘時開始，持續到第 40 分鐘，但 Holnicki 法持續較久到第 47 分鐘。因此在實際的個案模擬當中也可以看到單調方案的生命期較長，尤其是 Holnicki 五次內插多項式法。圖 10 為個案模擬在第 90 分鐘時的地面累積降水量空間分布圖，SL 法的降水分布在中心軸兩側的分布較廣，最大值約為 54 mm，同樣地，使用單調方案的降水分布都

較集中在中心窄區，這應是單調方案在對流雲邊緣處減少過量或不足現象後的結果，Holnicki 法地面累積降水量的最大值約為 57 mm，QMSL 法和 LCSL 法地面累積降水量的最大值約為 58 mm 和 44 mm。台北測站觀測到的逐時累計雨量於 1200Z 為 14.5 mm，1300Z 為 28.5 mm，由此看來模式所模擬到的降水都比實際觀測到的稍微大些。

## 六、結論

本文為了探討單調方案的半隱式半拉格朗日法在雲模式中的應用，曾先後對半拉格朗日方案在不同情形下加以討論，包括二維無輻散流場實驗、水汽平流凝結實驗和二維暖雲模式。由上面的討論中可得到下列幾項結論：

- 傳統半拉格朗日法使用三次樣條函數做進行內插時，在不連續處明顯的有過量和不足的現象。單調方案 QMSL, LCSL 及 Holnicki (1995) 五次內插多項式法後會使平流後的物理場有單調性。
- 在二維無輻散旋轉流場實驗中，半拉格朗日法的過量及不足現象約 15%，使用單調方案後都能維持單調性。各種單調方案總質量的變動都在 1% 以內，而能量都是耗散的。
- 在平流凝結實驗中，傳統半拉格朗日法在物理場不連續處有過量及不足的現象，而使用單調方案後具有形狀保持性。QMSL 方案和 LCSL 方案的單調性比 Holnicki 的五次內插多項式法好。在單調方案中加入額外的 NLSL 方案後可去除邊緣的假蒸發冷卻現象，但可能會影響雲邊緣處的混合過程。在實際應用時，QMSL 單調方案、LCSL 單調方案及 Holnicki (1995) 五次內

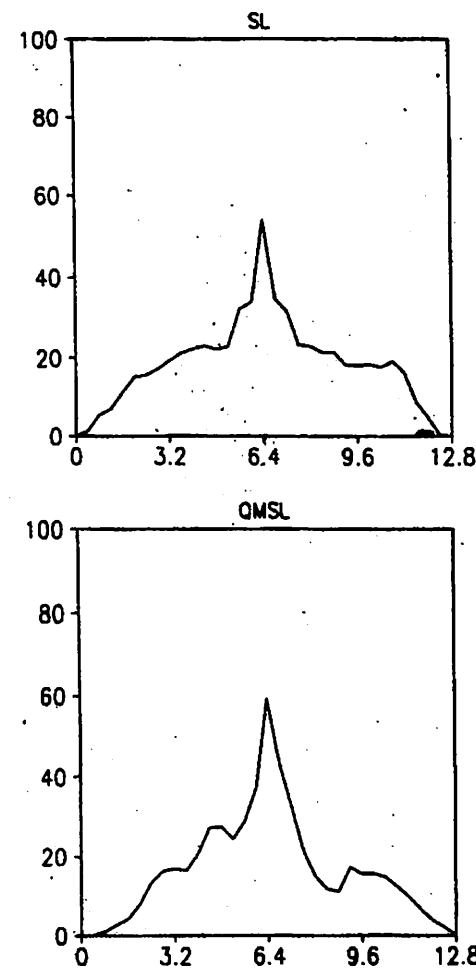


圖 10. 同圖 7，但為個案模擬。

插多項式法就足以防止過量及不足的現象發生。

(d)在二維暖雲模式中，傳統半拉格朗日的生命期最短，QMSL方案及LCSL方案的生命期稍長，Holnicki的五次內插多項式法的生命期最長，而且垂直速度較大。在地面降水量方面，傳統半拉格朗日法的地面降水較廣，Holnicki的五次內插多項式法的地面降水量大而且多分布在模式中心軸的窄區內。

#### 致謝

本論文得以順利完成，要感謝張博雄和曹立德的協助。

#### 參考文獻

- 曾忠一，1993：大氣模式的數值方法。渤海堂，台北市，695頁。
- Bates, J. R., 1985: Semi-Lagrangian advective schemes and their use in meteorological modeling. *Lect. Notes Appl. Math.*, **22**, 1-29.
- Bermejo, R., 1990: On the equivalence of semi-Lagrangian and particle-in-cell finite-element methods. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 979-987.
- Bermejo, R., and A. Staniforth, 1992: The conversion of semi-Lagrangian advection schemes to quasi-monotone schemes. *Mon. Wea. Rev.*, **120**, 2622-2632.
- Boris, J. P., and D. L. Book, 1973: Flux-corrected transport I: SHASTA: A fluid transport algorithm that works. *J. Comput. Phys.*, **11**, 38-69.
- Boris, J. P., and D. L. Book, 1976: Flux-corrected transport III: Minimal-error FCT algorithm. *J. Comput. Phys.*, **20**, 398-431.
- Carpenter, Jr. *et al.*, 1990: Application of the piecewise parabolic method (PPM) to meteorological modeling. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 586-612.
- Grabowski, W. W., and P. K. Smolarkiewicz, 1990: Monotone finite-difference approximations to the advection-condensation problem. *Mon. Wea. Rev.*, **118**, 2082-2097.
- Holnicki, P., 1995: A sharp-preserving interpolation: Applications to semi-Lagrangian advection. *Mon. Wea. Rev.*, **123**, 862-870.
- Kessler, E., 1969: *Meteor. Monogr.*, **10**, No. 32, Amer. Meteor. Soc.
- Pellerin, P. *et al.*, 1995: The performance of a semi-Lagrangian transport scheme for the advection-condensation problem. *Mon. Wea. Rev.*, **123**, 3318-3330.
- Priestley, A., 1993: A quasi-conservative version of the semi-Lagrangian advection scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **121**, 621-629.
- Rasch, P. J., and D. L. Williamson, 1990: On shape-preserving interpolation and semi-Lagrangian transport. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, **11**, 656-686.
- Robert, A., 1981: A stable numerical integration scheme for the primitive meteorological equations. *Atmos. Ocean*, **19**, 35-36.
- Smolarkiewicz, P. K., and J. A. Pudykiewicz, 1992: A class of semi-Lagrangian approximations for fluids. *J. Atmos. Sci.*, **49**, 2082-2096.
- Soong, S.-T., and Y. Ogura, 1973: A comparison between axisymmetric and slab-symmetric cumulus cloud models. *J. Atmos. Sci.*, **30**, 879-893.
- Takacs, L. L., 1985: A two-step scheme for the advection equation with minimized dissipation and dispersion errors. *Mon. Wea. Rev.*, **113**, 1050-1065.

Williamson, D. L., and P. J. Rasch, 1989: Two-dimensional semi-Lagrangian transport with shape-preserving interpolation. *Mon. Wea. Rev.*, **117**, 102-129.

Zalesak, S. T., 1979: Fully multi-dimensional flux-corrected transport algorithms for fluids. *J. Comput. Phys.*, **31**, 335-362.

# Application of Monotone Semi-Lagrangian Schemes in Convective Cloud Modeling

Chung-yi Tseng<sup>1,2</sup> and Ching-ying Wang<sup>2</sup>

1. Academia Sinica, Taipei, Taiwan

2. National Taiwan University, Taipei, Taiwan

## ABSTRACT

The semi-Lagrangian advection scheme uses longer time step without affecting stability during the integration of numerical models for simulating the atmospheric phenomena. It is more efficient and accurate than Euler scheme. In the semi-Lagrangian scheme we need to use interpolations to obtain the value of next time step. But these interpolations often result in the overshoot or undershoot, especially at the vicinity of strong gradients or discontinuities. If this happened to water vapor, it might be supersaturated or be of negative value, so as to inducing serious troubles for parameterizations of microphysical processes. Many schemes have been proposed to solve this problem. One of these strategies is the so-called monotone scheme, or shape-preserving scheme.

The monotone schemes as described in this paper are the QMSL (quasi-monotone semi-Lagrangian) scheme, the LCSL (linear constraint semi-Lagrangian) scheme and the fifth interpolation polynomial scheme. The QMSL scheme combines high-order and low-order interpolations to construct a monotone scheme. The LCSL scheme utilizes the immediate surrounding grid points at the departure point to judge whether to apply linear constraints in order to achieve monotonicity. The last monotone scheme uses the fifth interpolation polynomial coupled with shape-preserving derivative estimates.

Results of the above monotone schemes are presented and conclusions are made for a two dimensional non-divergent rotational flow, a one dimensional advection and condensation process and finally a two dimensional warm cloud model.