

四種限制可預測度的誤差來源 及其交互作用

林 和

國立台灣大學大氣科學系

(中華民國七十七年七月十日收稿;八月三十一日定稿)

摘 要

傳統可預測度的研究偏重系統中初始場隨機誤差的非線性指數成長，這裡假設系統的完美形式已知，並且能被正確預測，但是現實世界中很難達到如此要求。我們對系統的認知不但有限而且訊息時常受到預測工具的隨機性侵蝕，甚至大氣本身（對我們而言）即包括隨機因素在內。面對這情況，我們必須釐清誤差來源。除非能正確掌握導致誤差的機制，我們的預測錯誤將難以累積成下次改進的經驗。

本文將誤差分為自然、系統、氣候與隨機四類，經過簡單的動力系統，我們模擬這四種誤差的成長行為。它們的交互作用及在誤差成長曲線的特徵將予以詳細分析，希望其結果能指示客觀或主觀預報的極限。由此量度預報可改進的空間。

關鍵詞：可預測度，平均開方誤差，隨機誤差，初始誤差，系統誤差。

一、前言

從動力系統（e.g.; Guckenheimer & Holmes, 1985）的研究顯示，有限次元、非線性、耗散系統（finite dimensional、nonlinear、dissipative system）往往在相空間（phase space）內環繞著奇異吸子（Strange attractor），沿著奇異吸子盆地 Basin 的軌跡加以密度平均，相當於氣候，若吸子不止為一，則各種“短”氣候狀態的平均形成“長”氣候。）旋轉，沿軌跡每一點皆處於不穩定狀態（相當於天氣振動），圖 1 為很好的示意例子。而軌跡的去向，對初始值極端敏感，所謂“差之毫厘，失之千里”。如果我們觀

察許多相鄰兩點的發展，其距離就平均而言，會漸漸呈指數型擴張。初始值所包含的有限訊息（finite information）將逐漸受到侵蝕（初始值永遠不能完全準確，finite accuracy），所以可預測度的長短，代表系統與生俱來的特質。

傳統可預測度的計算，經過實際大氣或數值模式或紊流理論，比較兩組開始類似而其後分歧的演進過程（Lorenz, 1969），由 MSE（mean squared error）的時間函數決定系統的預報極限。這裡假設預報過程為完美（perfect）的，所有的誤差皆由初始值所引致，而初始誤差為隨機變數，這兩點假設當然與實際狀況不合。地球大氣受洋流、太陽輻射、水相變化影響，天文及邊界因

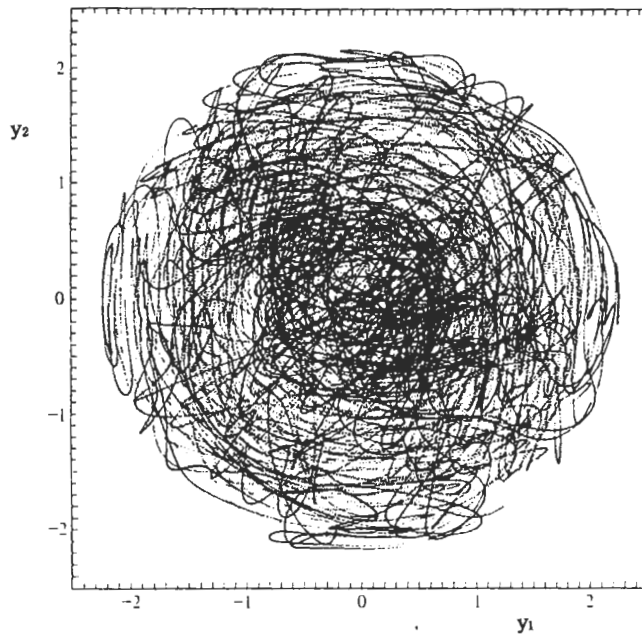


圖 1 本圖為動力方程式

$$\frac{dy_i}{dt} = y_{i+1}y_{i+2} + y_{i-1}y_{i-2} - 2y_{i+1}y_{i-1}, \quad i=1, 2, \dots, 5$$

在相空間投射於 (y_1, y_2) 平面上的軌跡圖，此即所謂的 C-系統 (Bender and Orszag, 1978)，其動能 $\sum_{i=1}^5 y_i^2$ 為一守恆量，所以軌跡偏限在等能量圓球的曲面上，當 $t \rightarrow \infty$ 時，軌跡仍然不會趨近一定點，微觀之，每一瞬間系統皆處於不穩定狀態 (天氣)，但從巨觀觀之，軌跡長期的統計性質 (例如單位面積上軌跡的密度，即氣候) 漸漸接近定值。

素並非常數。人為的模式，對積雲，次網格紊流等過程只能用參數化處理，很難寄望其完美，模式本身的誤差更會和初始值誤差交互作用 (林和, 1987)。此外，初始值的觀測不但包括隨機性誤差，往往同時包括了儀器、測站、人為之類系統性的誤差，廣義的可預測度，其實應該包括四種不同的誤差來源，本文將嘗試釐清這觀點。

數值模式經過長期積分後，預報能力逐漸喪失，剩下惟一有用的訊息為氣候，但一般模式的氣候往往與真實氣候相左 (climate drift)，以致於長期平均後，產生氣候性誤差，這種誤差最容易辨認的來源是不正確的參數，例如 eddy vis-

cosity 或 cumulus drag 所設的數值欠妥，numerical scheme 或方程式本身的偏差，都可能導致不同的氣候狀態。

實際預報過程只能在有限次元內進行，以數值模擬為例，所有可解尺度 (resolved scale) 內的運動為決定型 (deterministic)，而不可解尺度 (unresolved scale) 的運動雖然在更精細的模式可以用顯式計算，但對粗網格式者而言，即可歸類進隨機型，例如邊界層的熱泡、海面重力波、積雨雲或晴空亂流，需要用參數化手段解決，甚至一些尺度雖大但數學極度複雜的物理過程如輻射等，我們也會加以簡化，因而引進非決定型

的隨機因素。如果預報過程為經驗或統計預報，這類“模式”原本即包含了隨機成分在內，尤其在高頻波段，可預測度的損害最大。

初始值的誤差如果細分，亦可分為隨機及系統性誤差兩部份，一般而言，觀測時的隨機誤差永遠存在，隨後和其他誤差交互影響而呈指數型擴張，也就是傳統可預測度研究的對象，我們在此稱之為自然誤差，以表明這是非線性系統天生的特性，與人為努力無關。至於觀測時的系統性誤差，多半因儀器或測站位置的不妥招致，也可能經過模式的初始化產生，系統性誤差可以由詳細校驗後除去，為害程度較遜於自然誤差。

我們如果將“初始值隨機誤差”視為第一種誤差，即自然誤差，“初始值系統誤差”視為第二種誤差，簡稱系統誤差。模式的“氣候誤差”稱之為第三種誤差，模式或大氣本身的隨機外力為第四種誤差，可稱為“隨機誤差”。而以上四種誤差雖然來源迥異。但結果相混。例言之：倘若初始值“完美”，但模式放進錯誤的參數，對下一個 time step 而言，第三、四種誤差將會被視為初始值誤差而反饋系統，所以自然誤差永遠會凸顯而出，成為MSE成長的主要原因。另外，高頻隨機外力經過共振作用而得到氣候反應（response, Hasselman, 1976），隨機誤差將改變低頻或氣候的平均值，於是隨機誤差將導致氣候誤差，這情形對展期預報（二週以上，月平均值）而言相當重要（Egger & Schilling, 1983）。

本文將分析這四種誤差在MSE 曲線上呈現的特性（signatures），使用簡單 finite difference 模式，模擬這四種誤差不同的行為，我們希望本文的模式能抓住這四類誤差的基本精神，以決定天氣預報失靈的時刻，到底是老天還是人為的責任。

二、誤差來源

(a) 初始值自然誤差

預報過程以下式

$$du/dt = f(u) \tag{1}$$

進行，其中 u 為運動變數， f 為運動方程式，經過適當的邊界條件，初始場 $u(t_0)$ 可積分至 $u(t_1)$ ，即預報 $t_1 > t_0$ 的變化。但初始值不可能完全正確，通常：

$$u(t_0) = \bar{u}(t_0) + \delta u(t_0)$$

式中觀測值 u 為真實值 \bar{u} 再疊加誤差 δu ，假設初始時 $|\delta u(t_0)| \ll |u(t_0)|$ ，實際預報過程相當於：

$$d(\bar{u} + \delta u)/dt = f(\bar{u} + \delta u) = f(\bar{u}) + \partial f / \partial \bar{u} |_{t_0} \delta u + O(\delta u^2) \tag{2}$$

由(1),(2)式求得誤差成長的方程式：

$$d\delta u/dt \approx \partial f / \partial \bar{u} |_{t_0} \delta u \tag{3}$$

(3)式中誤差成長視 $\partial f / \partial \bar{u} |_{t_0}$ 的狀態決定，假設 $\delta u(t_0)$ 從所有可能的隨機集中選取，符號 $\langle \rangle$ 代表 ensemble average, $\delta \epsilon$ 為誤差能量 $\delta \epsilon = 1/2 \langle \delta u^2 \rangle$ ，則(3)式可寫成：

$$d\delta \epsilon/dt = \langle \partial f / \partial \bar{u} \cdot (\delta u^2) \rangle = 2 \langle \partial f / \partial \bar{u} \cdot \delta \epsilon \rangle \tag{4}$$

(4)式中 $\langle \partial f / \partial \bar{u} \cdot (\delta u^2) \rangle$ 將獨立於任一特定的初始時間，上式最主要的假設是 $\langle \partial f / \partial \bar{u} \cdot (\delta u^2) \rangle \approx \langle \partial f / \partial \bar{u} \rangle \langle \delta u^2 \rangle$ ，式中 $\partial f / \partial \bar{u}$ ， δu^2 是否統計獨立，端視系統本身 phase mixing 的能力而定。如果假設成立，我們可以定義 statistically sharp 的函數 $G = \langle \partial f / \partial \bar{u} \rangle$ ，則MSE的曲線為

$$\delta \epsilon(t) = \delta \epsilon(0) e^{2 \int_0^t G(t') dt'} \tag{5}$$

$2 \int_0^t G dt'$ 相當於 Characteristic exponent (u 可以輕易推廣到多值向量空間，由 $\partial f / \partial \bar{u}$ 構成的矩陣求得最大的特徵數 eigen value。當時間趨近無限大時，可以推算出 Liapunov number λ ，這是類似線性分析中成長率的系統性質。) (5)式告訴我們，誤差從系統非線性隨機化 (randomization) 過程中，不斷取得能量而自我擴大，由(3)式亦可看出誤差具備正回饋 (positive feedback, 假設 $\langle \partial f / \partial \bar{u} \rangle > 0$ ，這假設亦可視為某族群動力系統的特徵) 的機制，意

思是誤差值愈大，誤差成長亦愈快，所以在初始時間不論多麼小心的降低觀測錯誤，但誤差仍舊能從 infinitesimal perturbation 迅速成長，構成預報的命傷。

(b) 初始值系統錯誤

當初始值錯誤分成系統與隨機兩項：

$$\delta u(t_0) = \delta \hat{u}'(t_0) + \delta u'(t_0) \quad (6)$$

其中 $\langle \delta \hat{u}(t_0) \rangle \neq 0$, $\langle \delta u'(t_0) \rangle = 0$

則誤差能量 $\delta \epsilon$ 亦可分成：

$$\delta \epsilon = 1/2 \{ \langle \delta \hat{u}^2 \rangle + \langle \delta u'^2 \rangle \} = \delta \hat{\epsilon} + \delta \epsilon' \quad (7)$$

即系統性誤差能量與隨機性誤差能量，將(7)式代入(5)式，結果為 trivial，如此可知，初始值誤差在模式完美時，並不需要詳細區分。但若有模式誤差存在時，則 $\langle \delta \hat{u} \rangle \neq 0$ 的性質將會和其他誤差來源交互影響，我們在第三章會予以說明。

(c) 氣候誤差

實際預報程序不可能完全依照大氣運動過程進行，(1)式中的 f 必須疊加錯誤的預報方法 δf ，所以

$$du/dt = f(u) + \delta f(u) \quad (8)$$

初始值的誤差絕對擺脫不去，以致於實際預報按照

$$d(\bar{u} + \delta u)/dt = f(\bar{u} + \delta u) + \delta f(\bar{u} + \delta u) \quad (9)$$

進行。假設預報方法的謬誤 $\delta f(u)$ 與 δu 的大小相當，上式線性化後的近似式為

$$d\delta u/dt \approx \partial f / \partial \bar{u} |_{t_0} \delta u + \delta f(\bar{u}) \quad (10)$$

如果假設(10)式中含 \bar{u} 的部份不隨 δu 而變（這假設只有在取套集合後才有機會實現，這裡為了運算的簡化，暫時設此），則定義 $\partial f / \partial \bar{u} = g$ ，

$\delta f(\bar{u}) = s$ 為常數，(10)式的解如下：

$$\delta u(t) = (\delta u(t_0) + (s/g)) e^{gt} - (s/g) \quad (11)$$

則對應的MSE 成長公式（參考Lorenz,1985）為：

$$\delta \epsilon(t) = (\delta \epsilon(t_0) + (S^2/2G^2)) e^{2gt} - (S^2/G^2) e^{Gt} + (S^2/2G^2) \quad (12)$$

(12)式的解在 $t \rightarrow \infty$ 時趨近由 closure 技巧 (Leith, 1978) 導出的結果，式中 $G = \langle g \rangle$, $S = \langle s \rangle$ 。G 量度系統的初始值可預測度，即自然限制，應該完全與預測方法無關 (universal)，但 S 值指示預測技巧的優劣。S = 0 時預測技巧為完美，S 值由大漸縮小，即表示預報技巧越來越進步，也就是針對某特殊現象或氣象變數，預報能力所能改進的空間。

(d) 隨機誤差

大氣預報的對象，並非大氣運動的整體，我們能掌握的，只是空間及時間波譜中一部分波段，在這波段以外更高頻的次系統 (subsystem)，往往以隨機外力的方式出現 (Moritz and Sutera, 1981)，此外，在主觀或統計預報過程中，隨機性質更加明顯，這種過程用最簡單的方式模擬，我們假設(8)式中的方法誤差分為確定 (deterministic) 與隨機兩部分：

$$\delta f = \delta \hat{f} + \delta f' \quad (13)$$

$\delta \hat{f}$ 為預報模式中的系統性偏差， $\delta f'$ 為隨機變數，定義 $\langle \delta f' \rangle = 0$ ， $\delta f'$ 由單位時間 ΔT 內之隨機 step function 所組成：

$$\delta f'(t) = \begin{cases} w' & t_1 - (\Delta t / 2) < t < t_1 + (\Delta t / 2) \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

w' 是從方差為 σ ，平均為零的高斯分佈揀取的隨機變數，所以：

$$\langle \delta f'(t) \delta f'(t') \rangle = \begin{cases} \sigma & |t-t'| < \Delta t \\ 0 & |t-t'| > \Delta t \end{cases} \quad (14)$$

圖 2 (a) 顯示 $\delta f'$ 在時間序列上大致形狀，2 (b) 為相關 $R(t-t')$ (correlation) 的函數圖形，這裡我們只考慮隨機誤差的演進，(8)式將可寫成：

$$(d\delta u/dt) = g\delta u + \delta f' \quad (15)$$

(15)的解在找出 homogeneous 部分的 Green function 即可完成，式中：

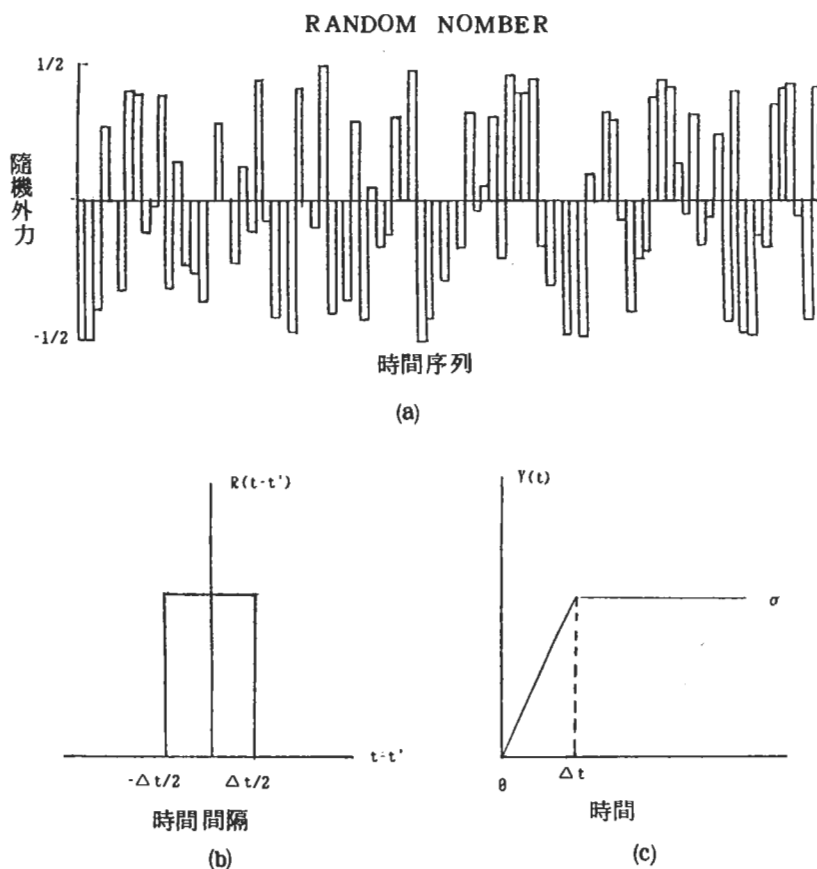


圖 2 (a)隨機外力 $\delta f'(t)$ 的時間序列，在單位時間內設為階梯函數。
 (b) $\delta f'(t)$ 的相關 $R(t-t')$ 。
 (c) (18) 式中的 $Y(t)$ ， t 漸大時， $Y(t)$ 很快的成為常數。

$$\delta u(t) = \delta u(t_0) e^{Gt} + \int_0^t e^{G(t-\tau)} [\delta f'(\tau)] d\tau \quad (16)$$

(16)式本身為空洞解，因 $\delta f'$ 尚未確定。誤差能量方程式經過套集合計算：

$$\begin{aligned} \langle \delta u^2(t) \rangle &= \langle \delta u^2(t_0) \rangle e^{2Gt} \\ &+ \langle \int_0^t e^{G(t-\tau)} \delta f'(\tau') d\tau' \int_0^t e^{G(t-\tau'')} \delta f'(\tau'') d\tau'' \rangle \\ &= \langle \delta u^2(t) \rangle e^{2Gt} + e^{2Gt} \int_0^t d\tau' \int_0^t d\tau'' e^{-(\tau'+\tau'')} R(\tau'-\tau'') \end{aligned} \quad (17)$$

(17)式中右側的雙重積分經過積分變數的轉換：

$$\tau' - \tau'' = \phi, \tau' + \tau'' = \Phi$$

我們可以定義 $R(t-t')$ 的 cumulative

distribution function $Y(t)$:

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t R(\Phi) d\Phi \quad (18)$$

$Y(t)$ 的函數圖形即為圖 2(c)，從圖上很容易看出 $Y(t)$ 趨近一定值 $\sigma \Delta t$ 當 $t > \Delta t$ ，由此雙重積分可導出：

$$\begin{aligned} \int_0^t d\tau' \int_0^t d\tau'' e^{-G\phi} R(\Phi) &= (1/2) \int_0^t d\phi e^{-G\phi} Y(\phi) \\ &+ (1/2) \int_t^{2t} d\phi e^{-G\phi} Y(2t-\phi) \\ &\approx \sigma \Delta t (1 - e^{-2Gt}) / 2G \end{aligned} \quad (19)$$

代入(17)，則：

$$\langle \delta u^2(t) \rangle = \langle \delta u^2(t_0) \rangle e^{2Gt} + (\sigma \Delta t / 2G) (e^{2Gt} - 1) \quad (20)$$

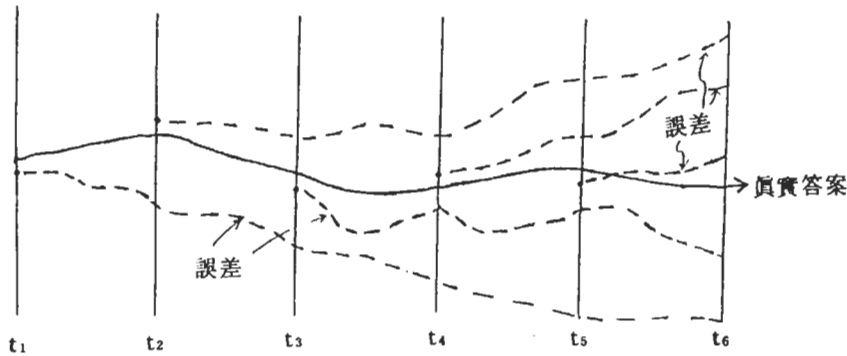


圖3 Lagged Average Method流程，先設定“真實”答案的演化程序，然後將“真實”答案的每一點當做初始值，疊加小擾動或使用誤差方程式，予以積分，計算“分枝”後結果與對應之“真實”答案的歧異，收集各點的套集合。

$\sigma \Delta t$ 可以想像成單位時間內的隨機外力密度，若 Δt 設定為 1 time unit (這裡的吊詭是一方面假設 Δt 為 infinitesimal, 一方面假設 Δt 為“單位”時間)，則 $\sigma \Delta t = \sigma$ ，但現在 σ 的物理因次已經比(4)式的定義多加一個 [T]，由(2)式我們理解隨機外力與氣候誤差扮演的角色類似，當自然誤差成長緩慢時 (G 微弱)，則第三，第四種誤差相形重要，但 $\delta \hat{f}$ 與 $\delta f'$ 本質上僅僅增加自然誤差的振幅，屬於非指數型誤差來源。

三、誤差之間的交互作用

四種誤差中，自然誤差最顯著而且不可避免，系統誤差也許能藉統計方法訂正。數值模式 (決定型) 雖然表面上免於隨機誤差感染，但其模擬對象——大氣本身即具備強烈隨機性質，相形之下，幾乎所有的預報過程都應該包括了以上四種誤差來源。

分析誤差之間的交互作用，我們將(3)式寫成最普及的形式：

$$\begin{aligned} (\delta \hat{u} + \delta u') / \partial t &= (\partial f / \partial \hat{u} | t) \\ (\delta \hat{u} + \delta u') + \delta \hat{f} + \delta f' & \end{aligned} \quad (2)$$

上式符號遵循前章定義，誤差能量隨時間的變化可推導如下：

$$\langle \delta u^2(t) \rangle = \langle \delta u'^2(t_0) \rangle e^{2Gt} \quad (1)$$

$$+ \langle \delta \hat{u}^2(t_0) \rangle e^{2Gt} + (S^2 / G^2) e^{2Gt} \quad (2) \quad (3)$$

$$+ (2S / G) \langle \delta \hat{u}(t_0) \rangle e^{2Gt} \quad (4)$$

$$+ (\sigma / 2G) e^{2Gt} - (2S^2 / G^2) e^{Gt} \quad (5) \quad (6)$$

$$- (2S / G) \langle \delta u_0 \rangle e^{Gt} + (S^2 / G^2) \quad (7) \quad (8)$$

$$- \sigma \Delta t / 2G \quad (9)$$

(2)式中當時間 $t > (1 / 2G)$ 時，右側(1)至(5)項凸顯而出，其分別代表的物理意義即是：

- 第(1)項：初始值自然誤差
- 第(2)項：初始值系統誤差
- 第(3)項：氣候誤差與初始誤差合併效應
- 第(4)項：氣候誤差與系統誤差合併效應
- 第(5)項：隨機誤差與初始誤差合併效應

其中(3)(4)(5)項都不能獨立於初始誤差存在，除了第四項外，所有的誤差都會使誤差能量逐漸擴大，第(4)項的符號由初始值及預報方程式中的系統誤差 $\delta \hat{u}(t_0)$ ， $\delta \hat{f}$ 之相關決定，如果 $\delta \hat{u}(t_0)$ ， $\delta \hat{f}$ 符號相反，代表初始值的系統錯誤恰好與方

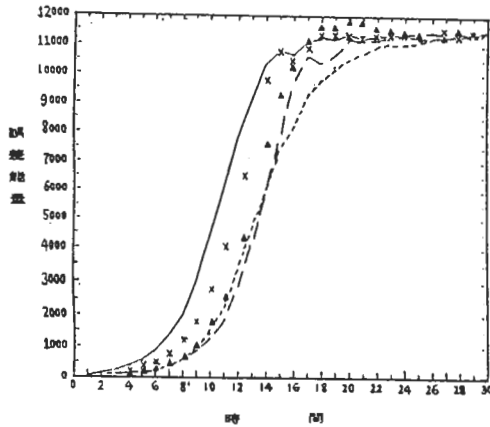


圖 4 誤差能量隨時間的成長曲線。即 (23) 式數值模擬的結果，其中 A 線 (---) 代表自然誤差 ($\partial u' = 0.005, \partial \hat{u} = 0, \partial \hat{c} = 0, \partial c' = 0$)，B 線 (***) 代表系統誤差 ($\partial u' = 0, \partial \hat{u} = 0.005, \partial \hat{c} = 0, \partial c' = 0$)，C 線 ($\Delta\Delta\Delta$) 代表氣候誤差 ($\partial u' = 0, \partial \hat{u} = 0, \partial \hat{c} = 0.005, \partial c' = 0$)，D 線 (.....) 代表隨機誤差 ($\partial u' = 0, \partial \hat{u} = 0, \partial \hat{c} = 0, \partial c' = 0.005$)，E 線 (——) 綜合所有四種誤差來源 ($\partial u' = 0.005, \partial \hat{u} = 0.005, \partial \hat{c} = 0.005, \partial c' = 0.005$)。

程式的系統錯誤抵消，“負負得正”，反而減輕了預報的限制。

第(5)項中隨機外力將會不斷增加誤差能量，這是很典型的布朗運動擴散行為，對於可預測度短促 (G 很大) 的動力系統，隨機誤差比系統誤差具備更大的殺傷力。

從(2)式我們可以毫不費力的指認出可預測度問題中的關鍵，當時間增大時，

$$\langle \delta u^2(t) \rangle \approx e^{2Gt}$$

所以確定自然誤差的 G 值應該是計算可預測度的首要任務。至於由 MSE 曲線回溯四種誤差來源，並不是一件容易的工作 (林和 1987)，比較實際可行的，恐怕是利用數值模式一一模擬不同的誤

差狀況，如此我們可得到概括的定量分析，下章將舉例說明之。

四、誤差的數值模擬

為了計算方便，這裡採取簡單的二次非線性差分方程式：

$$u_{n+1} = u_n^2 - c \tag{23}$$

上式中給定初始值 u 。參與數 c ，則 u_1, u_2, u_3, \dots 可以次第代入求得，本式屬膾炙人口的一系列生態/經濟方程式 (May, 1976)，經過充份的數學分析 (Collet and Eckmann, 1980)，已知當 c 值改變時， u 值會出現 stable point, limit cycle 與 chaos 等不同性質。Lorenz (1985) 即常常使用上述系統做為可預測度範例。

我們感興趣的參數範圍約在 $C > 1.5$ 以上， u 呈現混沌狀態，設定 $C = 1.6, u_0 = 0.5$ ，將(23)式積

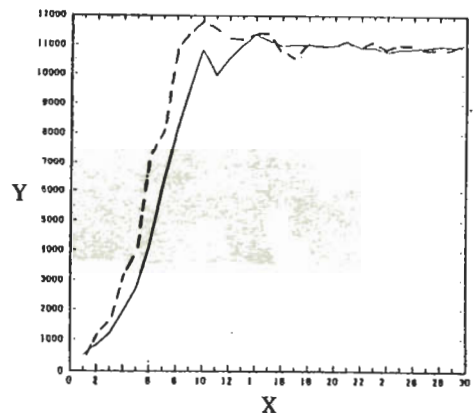
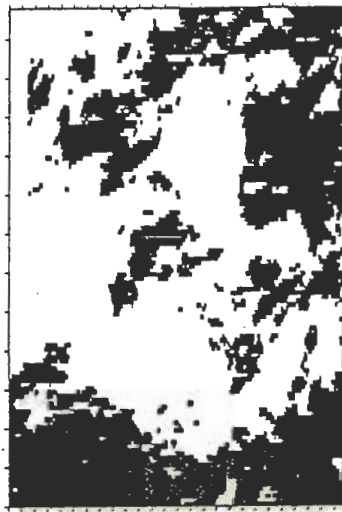
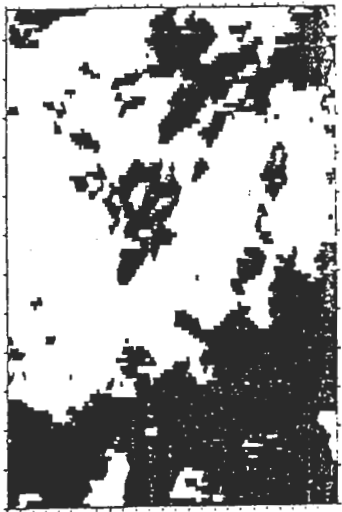


圖 5 系統誤差與氣候誤差交互作用，因此影響誤差成長的速率，實 (——) 曲線為 $\partial \hat{u} = 0.05, \partial \hat{c} = 0.05$ ，虛 (---) 曲線為 $\partial \hat{u} = 0.05, \partial \hat{c} = -0.05$ ，即初始值系統誤差與模式系統誤差符號相同及符號相異兩種狀況，誤差成長顯示相當大的區別。



(a)



(b)

圖 6 GMS-3 紅外線空照圖，時間為 1985 年 4 月 16 日太平洋上空 (18° E, 13° N, 15° W, 13° S) ITCZ 區域，其中每一光點解析度為 2 公里 × 5 公里。左圖(a)黑點代表雲頂溫度高於 -10°C 的區域，右圖(b)為左圖右下側 1/4 區放大，可以看出左、右兩圖從碎形 (fractal) 觀點幾乎具有同樣的統計性質，此即自我摹仿 (self Similarity) 的概念，證明大氣中永遠存在次網格點的隨機外力。

分 10,000 次，這是真實答案，然後我們積分下式：

$$V_{n+1,t} = V_{n,t}^2 - (C + \delta \hat{C} + \delta C') \quad (24)$$

$V_{n,t}$ 是採取 u_i 當初始條件，疊加初始擾動 $\delta \hat{u} + \delta u'$ ，再積分 30 次：

$$V_{0,t} = u_i + \delta \hat{u} + \delta u' \quad (25)$$

誤差能量義為：

$$\delta \epsilon(n) = \sum_{i=0}^{10,000} (V_{n,t} - u_{i+n})^2 \quad (26)$$

以上流程將以示意圖 3 表示。這種收集套集合樣本的方法屬於蒙地卡羅預測的一種變形，Hoffman et al (Hoffman and Kalnay, 1983) 稱之 Lagged Average Method, Roads (1988) 也曾經使用這種方法在大氣模式的可預測度實驗上。

根據 (24) - (26) 式的程序，(23) 式動力系統誤差能量成長的曲線見圖四，曲線 A, B, C, D 分別代表自然、系統、氣候、隨機四種誤差來源，我們可以確定不論何種誤差來源， $\delta \epsilon$ 的指數成長部份皆具有相同的成長率，($\delta \epsilon \sim e^{2Gt}$)。各類誤差的區別僅僅出現在非指數部份，這種區別性在初期會顯得相當重要，例如 A, B, C, D 誤差由 1 增長到 500 倍時，分別需 (7.7, 5.6, 5.1, 7.2) 次運算，而由 3000 倍增長到 8000 倍時則各種誤差僅需要 (3.0, 3.1, 3.0, 4.1) 次運算，其差別性不大。曲線 E 綜合所有四種誤差來源，所以誤差增長也最快速。由圖 4 可知，不論誤差由何種來源產生，相當時間後皆會到達飽和狀態，即誤差能量增大，透過本身的非線性作拐，使得訊息與雜訊混合成氣候狀態，系統的可預測度即到達極限。

我們將初始值的系統誤差與模式的誤差用不同正負符號代入實驗，圖五見到誤差能量成長有顯著的差異，可見得這兩種誤差有時會彼此抵消而抑制誤差能量的成長。如果要改進預報，需要長期統計這兩種誤差的大小與相關性。

隨機誤差的影響，雖然在圖四不明顯，但在實際大氣中，可能會強烈的縮短可預測度，從 (23) 式中

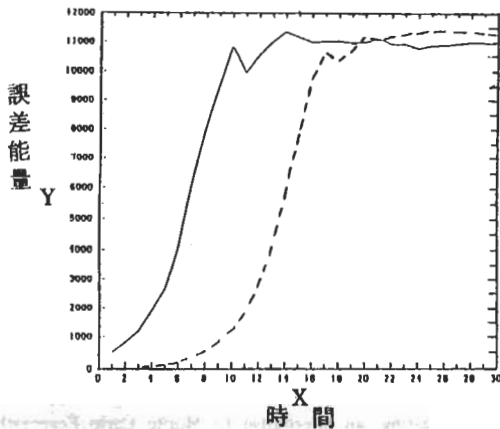


圖 7 假設隨機誤差 (實線, $\delta c' = 0.05$) 為自然誤差 (虛線, $\delta u' = 0.005$) 之 10 倍時, 誤差能量成長的曲線相互比較。

比較右邊第一項第五項, 可知自然誤差源到初始值 $\langle \delta u'^2(t) \rangle$ 的觀測錯誤, 第五項中隨機誤差的振幅 ($\sigma / 2G$) 在此解釋為: 可預測容許的時間 ($1 / 2G$) 內, 隨機外力 (例, 次網格點小尺度運動) 的機率強度。以溫度為例, 目前儀器上限, 在地面及高空的觀察精確度皆為 $\pm 1^\circ\text{C}$ (Bengtsson, 1975)。Yano 與 Takeuchi (1987) 計算 ITCZ 雲頂溫度, 發現不論在任何網格解析度內, 雲塊皆會以更瑣碎的形狀充塞次網格空間 (見圖六), 一般來說, 積雲內部到雲頂的溫度, 可以與週圍相差到 5°C 至 10°C , 即 $\sigma / 2G$ 項可能比 u'^2 項大 25 ~ 100 倍, 在這種情形下, 預測度誤差來源主要係來自隨機外力, 而不是初始誤差, 圖七顯示當自然誤差 ($\delta u' = 0.005$, $\delta c' = 0.0$) 還小於隨機誤差 ($\delta u' = 0.0$, $\delta c' = 0.05$) 時兩種狀況比較, 誤差能量的成長呈現非指數性的巨大差異, 即隨機誤差亦可能凌駕自然誤差的成長。

五、結論

體認到天氣系統的預測極限, 似乎是每位氣象

學家的痛苦經驗。Lorenz (1963) 終於發現大氣及類似系統的可預測度為系統內部的天性, 從此可預測度成為後牛頓時期 (Post-Newtonian era) 的標誌, 可預測度在非線性力學上佔據的地位, 不下於波速之於波動理論或成長率之於不穩定理論, 這兩者在線性力學上所佔的樞紐地位。

雖然如此, 大部分可預測度研究 (很諷刺的) 強調系統的決定 (deterministic) 性質, 我們考慮初始值極端接近的兩組預測過程, 量度其後分歧的速率, 雖可得證: 縱使我們已知確實的運動方程式, 但在非線性作用下, 預測誤差永遠會從初始的微小值擴大到不可忍受的程度。但這樣的實驗違逆了所有的實際狀況。除了在電腦執行的數值預報是絕對的 deterministic 程序外, 大氣中的隨機性並不只是從初始誤差產生, (Van Kampen, 1983, 曾詳細將隨機微分方程式分類, 他甚至認為由初始值引進隨機性的系統嚴格說不應該視為隨機系統), 預測方法即包含了決定或隨機兩種偏差, 這些偏差雖然不能獨立於初始誤差單獨成長, 但是這些誤差的區分及認定, 不但有助於改善預報, 而且是 Lorenz 概念的有效推廣。

本文將誤差來源重新分成自然、系統、氣候、隨機四類, 它們的解析解與數值模擬分別在前章說明。其中, 動力過程中的隨機誤差可能最有潛力啓發今後的研究, 我們認為, 真實大氣中充滿了持續不斷的隨機擾動, 所以我們應該以隨機方法 (主觀或機率預報) 來預測大氣這系統。若以決定方法 (數值天氣預報) 來預測, 驗證的時候, 則心目中要存著真實大氣具備隨機性這種體認。無論如何, 總免不了要考慮系統運動中的隨機成分。

至於可預測度的重要性及對今後氣象學發展的影響, 恐怕沒有人會比荷蘭皇家氣象局局長, 著名的紊流專家 Tennekes 表達得更清晰。1986 年 10 月 Tennekes 在瑞索 (Risø) 的一次演講中, 很明確的宣稱可預測度時代即將來臨, 他相信氣象學家面臨預測極限的困擾, 正好開啓了一種全新的物理觀, (全文已翻譯竣, 將於一九八八年九月的氣象學會會刊刊出) 我們在此引用數句以茲結束: 「

……就像我剛剛所說的，氣象碰到了可預測度的限制，非線性系統的混亂動力理論使我們無法避免，我們必須去面對這個冷酷的科學事實：天氣預報的品質要比其他科技的產物還要差，即使有無限的資源供我們利用，我們也只是能使限制的邊緣變得好一點而已。事實上，我懷疑我們正朝著投資落空的地方發展，持續地想改進我們的成果並沒有辦法解決問題，如果我們能用一種完全不同的想法來研究可預測度的限制，我們的問題才有可能解決。

我要和你們一起分享的未來展望是氣象成爲第一個後牛頓科學。在牛頓以後勞倫茲到來，而物理世界整個改變了，發展的軌跡相當受到注目，本來是平常的行爲變成規律，而現在甚至混亂的行爲也變得平常。我們目前了解得更多，它的目的在全然的控制。如果它願意的話，氣象就變成第一個非線性的科學，氣象在非線性科學強調不可預測的程度是走在這類遊戲的前頭，仔細想想這件事情，我們應該有什麼樣的改變？」

誌謝

本研究在國科會專題研究計劃NSC 77-0202-M 002-04 支持下完成，特此致謝。

參考文獻

林和，1987：TAMEX後有關可預測度的探討。

氣象預報與分析, 113, 69-72。

Bengtsson L., 1975: 4-dimensional assimilation of meteorological observations, GARP Publication Series No. 15.

- Collet P. & Eckmann J. P., 1980: Iterated maps on the interval as dynamical systems. Birkhauser Boston.
- Egger J. & Schilling H. D., 1984: Predictability of atmospheric low-frequency motion. AIP Conference Proceedings No. 106, 149-168.
- Guckenheimer P. H. & Holmes P., 1985: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Applied Mathematical Sciences 42.
- Hasselmann K., 1976: Stochastic climate models. part I theory. *Tellus*, 28, 473-484.
- Hoffmann, R. N. & Kalnay E., 1983: Lagged average forecasting, an alternative to Monte Carlo Forecasting. *Tellus*, 35A, 100-118.
- Leith C. E., 1978: Objective Methods for Weather Prediction. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 10, 107-128.
- Lorenz E. N., 1963: Deterministic Nonperiodic flow. *J. Atmos. Sci.*, 20, 130-141.
- 1969: Three approaches to atmospheric predictability. *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, 50, 345-349.
- 1985: The growth of errors in prediction. part I: General aspects of error growth. Turbulence and predictability in geophysical fluid dynamics and climate dynamics. North-Holland.
- May R. M., 1976: Review article: Simple mathematical models with very complicated dynamics. *Nature* 261, 459-467.
- Moritz R. E. & Sutera A., 1981: The predictability problem: effects of stochastic perturbations in multiequilibrium. *Advances in Geophys.*, 23, 345-383.
- Roads J. O., 1988: Lagged average predictions in a predictability experiment. *J. Atmos. Sci.*, 45, 2, 147-162.
- Van Kampen, N.G., 1983: Stochastic processes in physics and chemistry. North-Holland Publishing Company.
- Yano J.I. & Takeuchi Y., 1987: The self-similarity of horizontal cloud pattern in the intertropical convergence zone. *J. Meteor. Soc. Japan*, 65, 4, 661-667.

4 ERROR SOURCES TO LIMIT PREDICTABILITY AND THEIR INTERACTIONS

LinHo

Department of Atmospheric Sciences
National Taiwan University

(manuscript received July 10, 1988; in final form August 31, 1988)

ABSTRACT

The traditional predictability studies concentrated on the exponential growth of initial random errors in the system. Here the presumption was that the governing equations of the system were perfectly known and the prediction process was precise. Yet in reality these requirements can never be met. Our limited knowledge to the system would be further eroded by the stochasticity embedded in prediction tools. To make it worse, the atmosphere itself tends to act like a chaotic system (to our perception). Therefore it is necessary for us to distinguish the sources of errors. Otherwise we cannot learn from our prediction failures.

This study will classify the errors into four categories: natural, systematic, climatic and stochastic errors. Using a simple dynamical system, we try to simulate these errors numerically. The interaction between them and the signature from different error sources left on the error growth curve will be analyzed. The results can be used to find out the limitations of subjective or objective forecasting.

Key words: predictability, mean squared Error MSE, random error, initial error, systematic error.