

部份雲量條件下輻射加熱率之參數化

馮 欽 賜

中央氣象局科技中心

(中華民國八十九年十一月二十九日收稿；中華民國九十年四月九日定稿)

摘 要

從氣候模式之應用而言，二向法格式不僅普遍運用於短波輻射的計算，近來也逐漸在長波輻射的計算上被採用。然而，傳統二向法對長波輻射的計算卻有精確性不足的問題，Fu et al. 依據 Toon et al. 之源函數技巧建構有二向法經濟性但能達到四向法精確性的二向/四向法格式，改進了這方面的問題。本研究的目的乃希望利用二向法為基礎系統性地建立一個解決部份雲量下輻射計算的方法。處理部份雲量的作法乃是沿續 Geleyn and Hollingsworth 提出的概念，過去 Geleyn and Hollingsworth 處理部份雲量的作法只建構在傳統二向法的應用範圍，在此我們進一步推導將其應用於具有源函數技巧內涵的二向法中，使二向/四向法格式能成功地結合此部份雲量條件下的計算架構。這使得無論短波或長波輻射模式，都可以使用二向運算結構與一致的雲疊合條件，以兼具效率且精確的方式處理部份雲量的計算問題。從氣候模式的應用而言，本研究所建立的方法是相當適用的。

關鍵詞：輻射、二向法、部份雲量

一、前 言

驅動大氣環流與海洋洋流的根本能量來自太陽，毫無疑問地輻射能量的收支平衡在決定地球的氣候特性上扮演關鍵性的角色。這意謂以瞭解氣候問題為取向的任何大氣（或偶合）環流模式，都應慎重地處理輻射收支的計算問題。不過，精確的輻射計算相當費時，在一般數值模式中它往往佔據極為顯注的電腦時間，

這使得在氣候模式對於輻射參數化的設計，不得不在考慮精確性的同時也需兼顧效率性的要求（Stephen 1984；Fu et al. 1997）。

在輻射參數化模式之中，大體上最普遍採用的計算格式類型在短波和長波方面分別屬於二向（two-stream）法以及忽略散射效應之通量放射（emissivity）法兩種。然而，由於二向法經濟且能包含散射效應，也有在長波計算上逐

漸採用的傾向(Toon et al. 1989; Ritter and Geleyn 1992; Fu et al. 1997)，如此作法的優點不僅可使短波和長波的輻射計算具備一致的運算架構，也能避免因忽略長波散射效應所產生的系統性誤差。近來一些研究對於忽略雲的長波散射效應的進一步評估，已指出此舉有時會造成長波輻射計算上相當大的誤差(Fu et al. 1997; Chou et al. 1999)。此外，從計算時間隨垂直解析度增加的遞增比例上，長波輻射模式使用二向法也顯然比使用通量放射法來得有利，這是因為前者的運算時間是以線性比例增加而後者卻是以平方倍方式變化。

不過，二向法應用於長波輻射計算上另有精確性問題需要進一步考量。Toon et al. (1989) 指出一般二向法中所常見的 Eddington 和離散 (discrete-ordinates) 近似，遭遇各向均勻放射 (isotropic) 屬性的介質時，對於長波輻射的估算會暴露其近似假設中所隱含的物理性誤差。為避免這個問題，Toon et al. 建議以修正後的半球平均 (hemispheric mean) 近似應用於長波二向法。其次，為了更提升二向法在長波計算的精確性，他們提出所謂的「源函數技巧 (source function technique)」，基本原理乃在於利用二向法近似結果，解開長波輻射傳遞方程之積分解中關鍵的源函數項，再以此積分解作為計算長波輻射通量的基礎。這種方法僅須在原二向法中增加少許運算量，但能改善二向法應用於散射性質極微 (幾近無) 之介質時的精確性。沿續源函數技巧，Fu et al. (1997) 則發現若從長波輻射傳遞方程之積分解中，利用雙高斯離散分布 (double Gauss quadrature) 之四向輻射強度 (intensity) 估計輻射通量 (flux)，可獲得幾乎與真正四向法相同精確的結果。換言之，此法運用了二向法運算結構的經濟性達到四向

法的精確程度，非常適用於一般數值模式，Fu et al. 稱其為二向\四向混合法。

另一方面，從氣候模式的應用而言，輻射模式尚必須考量如何以較合理且經濟的方式處理部份雲量下的計算問題。當然，其中最直接的方法是根據雲疊合條件將區域切割成許多次區域，使次區域的雲量非零即全滿的方式計算每小塊區域的輻射收支，再權重面積比率，但此法可能產生過多次區域個數而非常耗時。為了節省計算負擔，因此出現一些替代方法。最簡單的想法是將部份雲遮抹滿視雲量為 100%，但將該層的雲光程厚度依雲量作尺度化 (scaling) 調整 (例如 Kiehl et al. 1994)，不過這可能過分簡化雲量及疊合因素影響輻射收支的複雜過程。Chou et al. (1998) 提出折衷方法，基本上他們設定雲層疊合屬於最大化和隨機疊合之混合型態，藉以降低區域切割個數，並僅對最大化疊合範圍的雲光程厚度作尺度化調整，儘量減少因尺度化方法引起的誤差。

採取不同方法，Geleyn and Hollingsworth (1979) (以下簡稱 GH) 利用垂直任一層之外逸輻射通量與入射輻射通量依存的物理關係，來表達二向法下輻射傳遞方程的通解，再依此架構處理部份雲量的計算問題。他們使用兩組分別代表無雲和有雲部份的變數，以及根據與鄰層之間的雲疊合假設，建立部份雲量下的二向法通解型式。基本上，這種方法有兩個優點。第一它容許不同的雲疊合假設，可依實際的雲疊合條件處理。第二它因建立部份雲量之計算架構所增多的運算時間並不明顯，而且不隨疊合方式變動。因此，對於二向法下部份雲量的計算問題，GH 方法提供一個相當便利且直接的解決之道。

不過，GH 的工作是建構在傳統的二向法上。如前面所討論的，在長波輻射上傳統二向法有精確性問題，相對地，二向/四向混合法提供一個既經濟且精確的選擇。因而，若能將此計算格式結合 GH 處理部份雲量的概念，將可以大大改善原 GH 方法估算長波輻射的精確性。如此，對於氣候模式的應用，將可以從短波至長波輻射，使用一致的二向運算結構，以既經濟且精確的方式處理部份雲量的計算問題。本篇論文將從這樣的想法出發，以二向法為基礎系統性地建立一個解決部份雲量下輻射計算的方案，更甚於 GH 的工作，我們進一步在此架構中引入 Toon et al. (1989) 源函數技巧的應用，成功地運用 Fu et al. (1997) 的二向/四向混合法取代一般二向法以改善長波輻射的計算結果。第二節及第三節是關於整個推導過程的說明，第四節則簡單說明如何進行輻射加熱率的計算，最後一節我們利用這個計算方法進行一些個案的測試和討論，並作總結。

二、部份雲量條件下一般二向法的通解

表一 針對一般常用二向法，整理 (2.1) 式中所對應係數 (γ_i) 及生成源項 (S^\pm) 的定義。表中使用之標記分別是指， $\tilde{\omega}$ 單次散射反照率， g 非對稱參數， μ_0 天頂角餘弦， S_0 大氣層頂的入射太陽輻射通量， τ_a 從大氣層頂至某一層頂處的垂直總光程厚度， τ 光程變數其介於 $0 \leq \tau \leq \Delta\tau$ ， $\Delta\tau$ 某一層的垂直光程厚度， $B(\tau)$ 隨光程變化的蒲朗克函數。下表忽略下標 k 。

	γ_1	γ_2	γ_3	μ_1/D	S^\pm
<i>Solar radiation</i>					
Eddington	$[7 - \tilde{\omega}(4 + 3g)]/4$	$-[1 - \tilde{\omega}(4 - 3g)]/4$	$1 - 3g\mu_1\mu_0$	$1/2$	$S^+(\tau) = \gamma_3 S_0 \tilde{\omega} e^{-(\tau, \tau^*)/\mu_0}$ $S^-(\tau) = (1 - \gamma_3) S_0 \tilde{\omega} e^{-(\tau, \tau^*)/\mu_0}$
Quadrature	$\sqrt{3}[2 - \tilde{\omega}(1 + g)]/2$	$\sqrt{3}\tilde{\omega}(1 - g)/2$	$1 - 3g\mu_1\mu_0$	$1/\sqrt{3}$	
<i>Infrared radiation</i>					
Hemispheric mean	$D[1 - \tilde{\omega}(1 + g)/2]$	$D[\tilde{\omega}(1 - g)/2]$		2	$S^+(\tau) = D\pi(1 - \tilde{\omega})B(\tau)$

附註：Eddington 法為波譜二向法，Quadrature 法為離散二向法，Hemispheric mean 法為半球平均法。

在二向近似結構下對於水平平均與大氣的某一層 (k)，它的向上及向下漫射輻射通量 (diffuse flux, F^\pm) 可表達為下列通式 (Meador and Weaver 1980; Liou 1992)：

$$\frac{\partial F_k^+}{\partial \tau} = \gamma_{1k} F_k^+ - \gamma_{2k} F_k^- - S_k^+ \quad (2.1a)$$

$$\frac{\partial F_k^-}{\partial \tau} = \gamma_{2k} F_k^+ - \gamma_{1k} F_k^- + S_k^-, \quad (2.1b)$$

其中， S^\pm 是向上 (下) 漫射輻射通量的生成源項，它可產生自內部長波放射或外部太陽入射的作用，係數 $\gamma_{1,2}$ 隨不同二向格式而變化。表一根據常見之各種二向格式詳細整理 S^\pm 及 γ_i 的對應值。在長波輻射方面，我們使用 Toon et al. (1989) 所提的半球平均法，它可減低其他二向法可能遭遇的物理性誤差。Fu et al (1997) 則將其中的參數 D 修正為 1.66，他們認為此值對應所謂的散射因子 (diffusivity factor)，應可獲致更佳的结果。

在確定 S^\pm 的型式，即可具體地解出上述方程式得到二向法的通解：

$$F_k^+(\tau) = q_{1k} e^{-\lambda_k(\Delta\tau_k - \tau)} + q_{2k} \Gamma_k e^{-\lambda_k \tau} + J_k^+ \quad (2.2a)$$

係可以表達如下：

$$F_k^-(\tau) = q_{1k} \Gamma_k e^{-\lambda_k(\Delta\tau_k - \tau)} + q_{2k} e^{-\lambda_k \tau} + J_k^-, \quad (2.2b)$$

$$\begin{bmatrix} F_b^- \\ F_t^+ \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} t & r \\ r & t \end{bmatrix}_k \cdot \begin{bmatrix} F_t^- \\ F_b^+ \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} Z^- \\ Z^+ \end{bmatrix}_k, \quad (2.3)$$

其中， $\Delta\tau$ 代表該層的垂直向光程厚度，而 τ 變數介於 $0 \leq \tau \leq \Delta\tau$ ， $\lambda = (\gamma_1^2 - \gamma_2^2)^{1/2}$ 以及 $\Gamma = (\gamma_1 - \lambda) / \gamma_2$ 。生成源項 J^\pm 的定義陳列於表二，長波的生成源項與如何假設蒲朗克 (Planck) 函數的垂直分布有密切關係，表中所列包括線性函數分布和指數函數分布兩種型態。通解中係數 $q_{1,2}$ 在給定上下層處之邊界條件後可解得。

從 (2.2) 式的二向法通解，可以在先忽略生成源項的情形下，求出垂直大氣任一層介質對漫射輻射的透射率 (t) 及反射率 (r)。根據這些輻射特性，對於任一層大氣上 (下) 邊界的外逸輻射通量與入射輻射通量之間的物理關

式中下標 $t(b)$ 代表該層上 (下) 邊界處，即 $\tau = 0$ ($\tau = \Delta\tau$) 的位置。對於下邊界的外逸輻射通量 (F_b^-) 而言，它來自上邊界之入射輻射通量 (F_t^-) 透射、下邊界之入射輻射通量 (F_b^+) 反射和生成源三方的貢獻，同理對於上邊界的外逸輻射通量 (F_t^+) 亦可類推。關於生成源項 (Z^\pm) 可從假設邊界入射輻射通量為零的條件，由 (2.2) 式與 (2.3) 式的對應關係上獲得。在附錄中具體詳列 Z^\pm 以及 t, r 這些參數的定義。一旦加入大氣層頂及地表的邊界條件，我們即可由 (2.3) 式組成閉合的聯立方程式，求得均勻大氣下垂直各層邊界處的輻射通量分布。

表二 沿續表一，整理 (2.5) 式中生成源項 $J^\pm(\tau)$ 的定義。在長波輻射方面， $J^\pm(\tau)$ 因不同的蒲朗克函數分布而有變化。表中 $B_{t,b}$ 代表某一層頂 (底) 處的蒲朗克函數值。

Solar radiation	Infrared radiation
$J^+(\tau) = \frac{\tilde{\omega} S_0 e^{-(\tau_b + \tau)/\mu_0} [(\gamma_1 - 1/\mu_0)\gamma_3 + (1 - \gamma_3)\gamma_2]}{(\lambda^2 - 1/\mu_0^2)}$	<p style="text-align: center;"><u>Linear-in-optical-depth:</u></p> $B(\tau) = B_t + \left(\frac{B_b - B_t}{\Delta\tau}\right) \cdot \tau$ $J^\pm(\tau) = (2\pi/D) \left[B(\tau) \pm \frac{B_b - B_t}{(\gamma_1 + \gamma_2)\Delta\tau} \right]$
$J^-(\tau) = \frac{\tilde{\omega} S_0 e^{-(\tau_b + \tau)/\mu_0} [(\gamma_1 + 1/\mu_0)(1 - \gamma_3) + \gamma_2\gamma_3]}{(\lambda^2 - 1/\mu_0^2)}$	<p style="text-align: center;"><u>Exponential-in-optical-depth:</u></p> $B(\tau) = B_t e^{-\beta\tau}$, with $\beta = \exp\left[\frac{1}{\Delta\tau} \ln \frac{B_t}{B_b}\right]$ $J^\pm(\tau) = \frac{D\pi(1 - \tilde{\omega})B(\tau)}{\lambda^2 - \beta^2} (\gamma_1 \pm \beta + \gamma_2)$

基本上，(2.3)式正是GH所表達的二向法解。在此架構之下，即可按照GH的作法處理部份雲量的計算問題。作法上，是由引入兩組分別對應各層無雲(上標f)和有雲區(上標c)介質的光學特性常數($\tilde{\omega}$, g 和 τ)，並依據雲疊合假設，利用類似表達(2.3)式所運用的物理關係，建立部份雲量下二向法聯立方程式。為了較清楚說明這個概念，讓我們以圖1為例，圖中緊鄰的三層各具有 C_{k-1} 、 C_k 和 C_{k+1} 的雲量而且 $C_{k-1} < C_k < C_{k+1}$ 。對其中的 k 層而言，在上(下)邊界處可分出四種輻

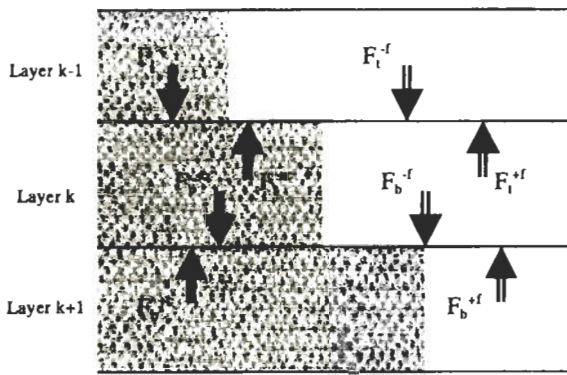


圖1 某 k 層之外逸輻射通量與來自鄰層之入射輻射通量的相互間關係之示意圖。

射通量，分別是來自鄰層無雲(有雲)區的外逸輻射通量以及從己層無雲(有雲)區出去的外逸輻射通量。因此，無論是無雲或有雲區的外逸輻射通量，都可以從上(下)邊界各區入射輻射通量和生成源的可能貢獻，建立彼此的物理關係。簡單起見先忽略生成源，對於下邊界雲區的外逸輻射通量即可表達為：

$$F_b^{-c} = t^c \cdot (1 - b_1) \cdot F_i^{-f} + r^c \cdot (1 - b_2) \cdot F_b^{+f} + t^c \cdot b_3 \cdot F_i^{-c} + r^c \cdot b_4 \cdot F_b^{+c} \quad (2.4)$$

右手邊各項都是來自入射輻射的可能貢獻，而係數 b_i 反映各項的權重，它需由雲量分布以及己層與鄰層之間雲的疊合條件來決定。倘若雲層疊合屬於隨機的，那麼 $b_{1,2} = 1 - C_k$ 且 $b_{3,4} = C_k$ 。相對地若是屬於最大化疊合，則可導出 $b_1 = (1 - C_k)/(1 - C_{k-1})$ 、 $b_{2,3} = 1$ 和 $b_4 = C_k/C_{k+1}$ 。事實上對於最大化疊合，可仿照GH提出的一個通式表達如下

$$b_{1k} = \frac{1 - \max(C_k, C_{k-1})}{1 - C_{k-1}}, \quad (2.5a)$$

$$b_{2k} = \frac{1 - \max(C_k, C_{k+1})}{1 - C_{k+1}}, \quad (2.5b)$$

$$b_{3k} = \frac{\min(C_k, C_{k-1})}{C_{k-1}}, \quad (2.5c)$$

$$b_{4k} = \frac{\min(C_k, C_{k+1})}{C_{k+1}}, \quad (2.5d)$$

不過需注意的是，這個通式僅假設緊鄰的兩層雲會採最大化疊合，一旦上下層雲中間夾雜無雲大氣時，上下層雲在這個通式條件下則會變成隨機疊合而非維持最大化疊合。因此，這個通式可稱為最大化-隨機疊合假設。

將(2.4)式進一步擴展，得到一個部份雲量下以二向法為基礎的線性聯立方程組：

$$\begin{bmatrix} F_b^{-} \\ F_i^{+} \end{bmatrix}_k^f = \begin{bmatrix} t & r \\ r & t \end{bmatrix}_k^f \begin{bmatrix} b_1 F_i^{-f} + (1 - b_3) F_i^{-c} \\ b_2 F_b^{+f} + (1 - b_4) F_b^{+c} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \tilde{Z}^{-} \\ \tilde{Z}^{+} \end{bmatrix}_k, \quad (2.6a)$$

$$\begin{bmatrix} F_b^{-} \\ F_i^{+} \end{bmatrix}_k^c = \begin{bmatrix} t & r \\ r & t \end{bmatrix}_k^c \begin{bmatrix} (1 - b_1) F_i^{-f} + b_3 F_i^{-c} \\ (1 - b_2) F_b^{+f} + b_4 F_b^{+c} \end{bmatrix}_k + \begin{bmatrix} \tilde{Z}^{-} \\ \tilde{Z}^{+} \end{bmatrix}_k, \quad (2.6b)$$

其中，生成源項 $\tilde{Z}^{\pm f}$ ($\tilde{Z}^{\pm c}$)定義在附錄中。

同理，在加入大氣層頂及地表的邊界條件

之後，(2.6) 聯立方程組即閉合可解。雖然相較於 (2.3) 式，伴隨 (2.6) 聯立方程的矩陣擴增為四倍，但由於它屬於條狀矩陣，善用這個特性可相當程度減化求解過程節省計算時間（見表四的討論）。

三、部份雲量下加入源函數技巧

在這一節中，我們將逐步地說明如何沿續前一節部份雲量下的二向計算架構加入源函數技巧，它將能進一步改善長波輻射方面的精確度。首先，讓我們從方位無關 (azimuth-averaged) 輻射傳遞方程沿某一均勻層（光程厚度是 $\Delta\tau$ ）積分後的型式著手，它為：（ $\mu > 0$ ）

$$I_1^+(\mu) = I_b^+(\mu)e^{-\Delta\tau/\mu} + \int_0^{\Delta\tau} M^+(\tau', \mu)e^{-\tau'/\mu} d\tau'/\mu, \quad (3.1a)$$

$$I_1^-(-\mu) = I_1^-(-\mu)e^{-\Delta\tau/\mu} + \int_0^{\Delta\tau} M^-(\tau', -\mu)e^{-(\Delta\tau-\tau')/\mu} d\tau'/\mu, \quad (3.1b)$$

其中，左手邊的 $I_{1,b}^\pm$ 是指該層上（下）邊界處向上（下）的漫射輻射強度，即屬於該層外逸漫射輻射強度，相對地右手邊第一項 $I_{b,1}^\pm$ 則為該層入射漫射輻射強度。對於長波輻射的範圍，上式源函數（ M ）若同時包含長波放射及散射效應，可寫成：

$$M^\pm(\tau, \pm\mu) = \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') P(\pm\mu, \mu') d\mu' - (1 - \tilde{\omega})B(\tau), \quad (3.2)$$

其中， P 為方位無關散射相位函數。求解源函數 (3.2) 式最簡單的作法，便是利用二向法下輻射強度以及散射相位函數的分布代入，這步驟即是 Toon et al. (1989) 所謂的源函數技巧。於半球平均二向近似下，輻射強度與輻射通量的關係為 $I(\tau, \pm 1/D) = F^\pm(\tau)/\pi$ ，而 $F^\pm(\tau)$ 如 (2.2) 式，其次散射相位函數則是 $P(\pm\mu, \mu') = 1 \pm g$ 。一旦 (3.1) 式確定源函數的解之後，即被具體地解析。利用此式可從大氣層頂逐次往下至地表求得各層向下輻射強度，再藉由地表條件由下逐次往上求得各層向上輻射強度。

接續前節處理部份雲量所建立的計算結構，我們其實可以將上述利用源函數技巧求解各層輻射強度的概念予以擴展，分別應用在求解部份雲量下各層無雲和有雲區的輻射強度上。第一步，修正 (3.1) 式為：

$$I_{1,k}^{+*}(\mu) = \bar{I}_{b,k}^{+*}(\mu)e^{-\Delta\tau_k/\mu} + \int_0^{\Delta\tau_k} M^{+*}(\tau', \mu)e^{-\tau'/\mu} d\tau'/\mu, \quad (3.3a)$$

$$I_{b,k}^{-*}(-\mu) = \bar{I}_{1,k}^{-*}(-\mu)e^{-\Delta\tau_k/\mu} + \int_0^{\Delta\tau_k} M^{-*}(\tau', -\mu)e^{-(\Delta\tau_k-\tau')/\mu} d\tau'/\mu, \quad (3.3b)$$

其中，上標星號可以是 f 代表該層的無雲部份或者是 c 代表有雲部份。相較 (3.1) 式，(3.3) 式最大的差異在於修正其中關於入射輻射強度的部份，在此它應如同 (2.6) 式中考慮入射輻射的來源一般，須同時包含來自鄰層無雲和有雲兩部份的組合，如下所列：

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_b^{+f} \\ \bar{I}_t^{-f} \\ \bar{I}_b^{+c} \\ \bar{I}_t^{-c} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} b_2 I_b^{+f} + (1-b_4) I_b^{+c} \\ b_1 I_t^{-f} + (1-b_3) I_t^{-c} \\ (1-b_2) I_b^{+f} + b_4 I_b^{+c} \\ (1-b_1) I_t^{-f} + b_3 I_t^{-c} \end{bmatrix}_k, \quad (3.4)$$

$$I_{b,k}^{-*}(-\mu) = \bar{I}_{t,k}^{-*} e^{-\Delta\tau_k^*/\mu} + G_{1k}^{+*} \Gamma_k^* \left(1 - e^{-\Delta\tau_k^*(\lambda_k + 1/\mu)}\right) + G_{2k}^{-*} \left(e^{-\Delta\tau_k^*/\mu} - e^{-\Delta\tau_k^* \lambda_k}\right) + Y_{2k}^* \alpha_k^*, \quad (3.6b)$$

其中，（忽略下標 k 和上標*）

$$G_{1,2}^* = \frac{q_{1,2}(1 \pm \lambda/D)}{\pi(\lambda\mu \pm 1)}, \quad (3.7)$$

上式的係數 b_i 須與 (2.6) 式採用的雲疊合條件完全一致。

並且 (3.6) 式中的 $Y_{1,2}$ 整理於表三。

第二步，應用源函數技巧以二向近似代入源函數 (M)。在此過程中，我們會代入二向法的通解，唯這裡須注意 (3.3) 式的輻射強度僅代表無雲區或有雲區其中一部份，因而此時對於二向法輻射通量的通解，也應加進所對應部份之相對比例的考慮，故 (2.2) 式應修正為：
（下式已忽略上標*）

至此，我們利用完全一致的雲層疊合條件，在原 GH 處理部份雲量的計算結構中結合源函數技巧，藉此建立更精確的方法計算長波輻射，另一方面由於它具有二向格式的經濟性，使其相當適合於氣候模式的應用。根據 Fu et al. (1997) 建議的二向/四向混合法，輻射通量由雙高斯離散所分布四個方向的輻射強度來估算，其精確度幾乎與四向法的結果相同。因此，(3.6) 式輻射強度與輻射通量之間的關係為：

$$F_k^+(\tau) = q_{1k} e^{-\lambda_k(\Delta\tau_k - \tau)} + q_{2k} \Gamma_k e^{-\lambda_k \tau} + J_k^+ \alpha_k, \quad (3.5a)$$

$$F_k^-(\tau) = q_{1k} \Gamma_k e^{-\lambda_k(\Delta\tau_k - \tau)} + q_{2k} e^{-\lambda_k \tau} + J_k^- \alpha_k, \quad (3.5b)$$

$$F_{t,b}^{+*} = 2\pi \sum_{i=1}^2 a_i \mu_i I_{t,b}^{+*}(\pm \mu_i), \quad (3.8)$$

於上式生成源項旁的 $\alpha_k^f = 1 - C_k$ 以及 $\alpha_k^c = C_k$ 分別代表各部份的比例權重，至於係數 $q_{1,2}$ 為簡潔起見在此已將權重內隱。係數 $q_{1,2}$ 可由各層邊界已知的外逸輻射通量 ($F_k^{+*}(0)$ 和 $F_k^{+*}(\Delta\tau)$) 決定，而在應用源函數技巧這步驟前，我們已由 (2.6) 式的閉合方程式先解出各層邊界的外逸輻射通量。

在雙高斯離散分布之下， $\mu_1 = 0.2113248$ 以及 $\mu_2 = 0.7886752$ ， $a_{1,2} = 0.5$ 。然後，有（無）雲各部份輻射通量的合計即是最後結果。

完成第二步，(3.3) 式已可以被具體解析，因此對任一層上下邊界的外逸輻射強度，它可展開為：

四、地球大氣系統輻射收支及輻射加熱率之計算

$$I_{t,k}^{+*}(\mu) = \bar{I}_{b,k}^{+*} e^{-\Delta\tau_k^*/\mu} + G_{1k}^{-*} \left(e^{-\Delta\tau_k^*/\mu} - e^{-\Delta\tau_k^* \lambda_k}\right) + G_{2k}^{+*} \Gamma_k^* \left(1 - e^{-\Delta\tau_k^*(\lambda_k + 1/\mu)}\right) + Y_{1k}^* \alpha_k^*, \quad (3.6a)$$

上述輻射通量的求解過程僅是針對單一波長的計算，為求得地球大氣系統輻射收支和大氣輻射加熱率，輻射通量尚須進行波譜的積分。原理上，只要能將波譜切分至足以解析介質之

表三 整理 (3.6) 式係數 $Y_{1,2}$ 的定義。Linear-in-optical-depth

$$Y_1 = \sigma^+ (1 - e^{-\Delta\tau/\mu}) + B_b (\mu e^{-\Delta\tau/\mu} - \Delta\tau e^{-\Delta\tau/\mu} + \mu)$$

$$Y_2 = \sigma^- (1 - e^{-\Delta\tau/\mu}) + B_b (\mu e^{-\Delta\tau/\mu} + \Delta\tau - \mu)$$

$$\text{where } \sigma^\pm = B_t \pm B_b \left[\frac{1}{\gamma_1 + \gamma_2} - \frac{1}{D} \right]$$

Exponential-in-optical-depth

$$Y_1 = \frac{\eta^- (B_t - B_b e^{-\Delta\tau/\mu})}{1 + \mu\beta}$$

$$Y_2 = \frac{\eta^+ (B_b - B_t e^{-\Delta\tau/\mu})}{1 - \mu\beta}$$

$$\text{where } \eta^\pm = (1 - \tilde{\omega}) \left[\frac{D\tilde{\omega}(\gamma_1 + \gamma_2 \pm g\beta)}{(\lambda^2 - \beta^2) + 1} \right]$$

吸收和散射係數隨波譜之變化，便能精確地獲得全波譜的輻射通量。然而這通常需要進行數萬個細小波段的積分，在氣候應用上是不可行的。

一般而言，為加速波譜積分的過程，通常先根據吸收氣體的吸收特性及其波譜分布切成數個寬波段，之後為了精確又經濟地處理該寬波段內吸收氣體與散射介質之間複雜的交互作用，目前普遍採用一種所謂 k 分布方法 (k -distribution) (Liou 1992)。這種方法乃是將吸收氣體之吸收係數按強弱重新排列，獲得一個相當平滑的 k 分布以及相伴隨的累計機率分布函數 (g)，藉此每一個寬波段根再據平滑函數 g 的分布續切成數個次波段。整體而言，輻射通量波譜積分最後變成求得數十個次波段下之輻

射通量的累加，它可表達為：

$$F = \sum_M \sum_m F_m \Delta\xi_m \Delta w_M \quad (4.1)$$

其中， M 代表每個主 (寬) 波段而 m 代表主波段中每個次波段， Δw_M 是指該主波段佔整體波譜中之權重，同理 Δg_m 則指該次波段佔主波段中之權重。在散射大氣條件下，每一個次波段的光程厚度 ($\Delta\tau_m$) 為：

$$\Delta\tau_m = \Delta\tau_s^{\text{Mie}} + \Delta\tau_a^{\text{Mie}} + \Delta\tau_s^{\text{Ray}} + \Delta\tau_m^{\text{gas}} \quad (4.2)$$

上式中前兩部份代表散射大氣中因雲滴或懸浮微粒之米氏散射 (Mie scattering) 產生的吸收和散射光程，另外由分子之雷氏散射 (Rayleigh scattering) 產生的散射光程為第三項。由於伴隨這些散射作用的光程，隨波譜變化相當平滑，一般在寬波段下取一平均值代表即可。第四部份是隨次波段變化的吸收氣體之吸收光程，其

中 $\Delta\tau_m^{\text{gas}} = k_m u$ ， k_m 代表該次波段的吸收氣體之吸收係數而 u 是吸收氣體含量。對於次波段下的單次散射反照率及非對稱參數，可進一步表達為：

$$\tilde{\omega}_m = \frac{\Delta\tau_s^{\text{Mic}} + \Delta\tau_s^{\text{Ray}}}{\Delta\tau_m} \quad (4.3)$$

$$g = \frac{\Delta\tau_s^{\text{Mic}}}{\Delta\tau_s^{\text{Mic}} + \Delta\tau_s^{\text{Ray}}} g^{\text{Mic}} \quad (4.4)$$

此外，為了降低二向法的誤差，如一般文獻所指出的（例如 Liou 1992），可以進一步採用 δ 函數將前方散射的部份納入漫射輻射，再以相似原理（similarity principle）重新調整非對稱參數、光程與單次散射反照率。

五、計算結果與結語

誠如前言中所述，對部份雲量條件下的輻射運算，在不考慮計算的效率下，可根據雲層疊合假設進行區域切割，使次區域的雲量非零即全滿的方式計算每小塊區域的輻射量，再權重面積比率。這種輻射運算的程序（以下簡稱爲 D 法），可視爲平行平面大氣假設下，輻射傳遞模式針對部份雲量情況所能達到最精細的結果。因此接下來，我們將以此法取得的結果爲參考，比較 GH 運算方法與其之間的差異，檢視 GH 方法處理部份雲量的合理性。測試個案的設計是以中緯度夏季標準大氣（McClatchey et al. 1971）的 18 層垂直解析度，規劃三種雲層配置並各設定不同的疊合方式，如圖 2 所示。第一種個案屬於兩層分離的高、低雲並假設隨機疊合；第二種個案是兩層相連的低雲並假設

最大化疊合；第三種個案則是兩層相連的高雲加上一層低雲並假設雲層屬於最大化-隨機混合疊合。雲光學特性的設定方面，高、低雲的冰（液）態水含量分別爲 0.01g/m^3 及 0.1g/m^3 ，有效粒徑分別是 $45\mu\text{m}$ 及 $8\mu\text{m}$ ，以可見光之光程厚度而言高、低雲分別約介於 1 及 18 左右。以下計算，我們使用二向格式計算短波輻射以及二向\四向格式計算長波輻射，此外輻射模式中關於大氣氣體吸收係數與雲光學特性的參數化乃根據 Fu an Liou (1992; 1993) 提供的結果。

圖 3 是根據不同雲量組合條件下，分別計算短波行星反照率和外逸長波輻射，比較 GH 方法相對於 D 法差異的結果。計算短波輻射時天頂角設爲 60 度及地表反照率是 0.1。首先關於短波方面的比較，顯示 GH 法所得的行星反照率普遍都較 D 法結果爲低，這種差異的來源主要起因於兩種方法運算設計的不同，使兩者對於雲層相互間以及地表雲層之間多重散射效應的估計產生差異所致。以個案二舉例而言，當上下雲量 C_u 與 C_l 相等時，由於雲層之間假設爲最大化疊合，因此以 D 法計算時是將區域切割爲晴區及雲區兩塊，並且假設兩區塊之間的輻射傳遞相互獨立，這使得 D 法排除輻射傳遞過程在兩區塊之間的交互作用，例如排除了晴區向下輻射經地表反射後進入雲區的可能性。但是，GH 法的運算方式卻包含這種區塊之間的輻射交互作用，例如透過晴區經地表反射後的輻射有 C_l 的比率碰到雲區，同時透過雲區經地表反射後的輻射則有 $1-C_l$ 的比率碰到晴區。因爲整體上 GH 法的多重散射效應相較 D 法增加，因而攔截較多地表反射的向上輻射，尤其晴區反射進入雲區的部份，這效果因此降低了 GH 法所反映出的短波行星反照率，即使

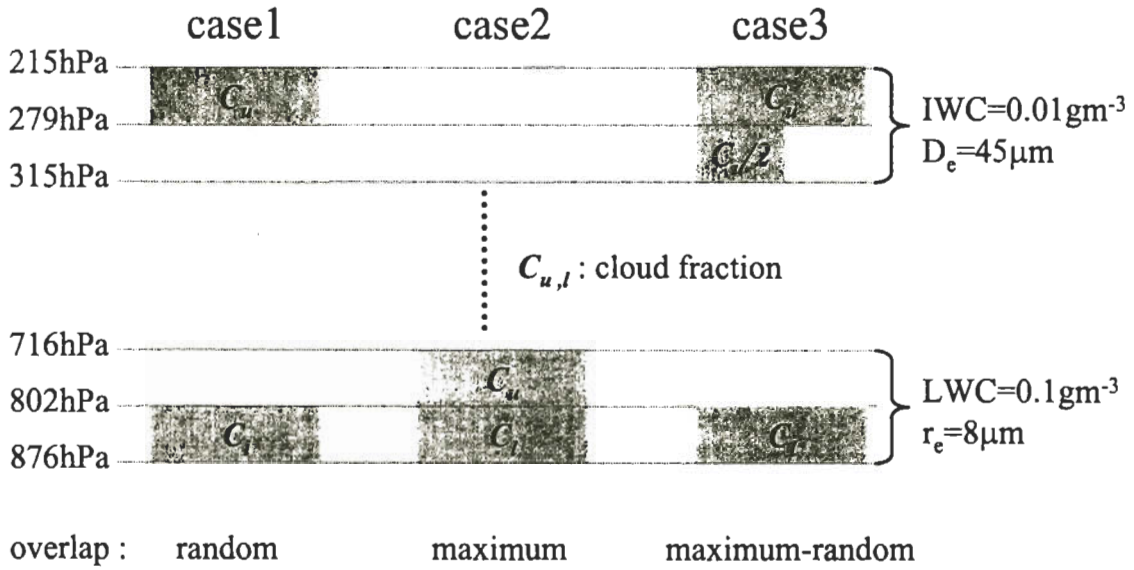


圖 2 各測試個案關於雲層配置之示意圖，詳細說明見內文。其中 C_u 及 C_l 分別代表位於上（下）層的雲量。

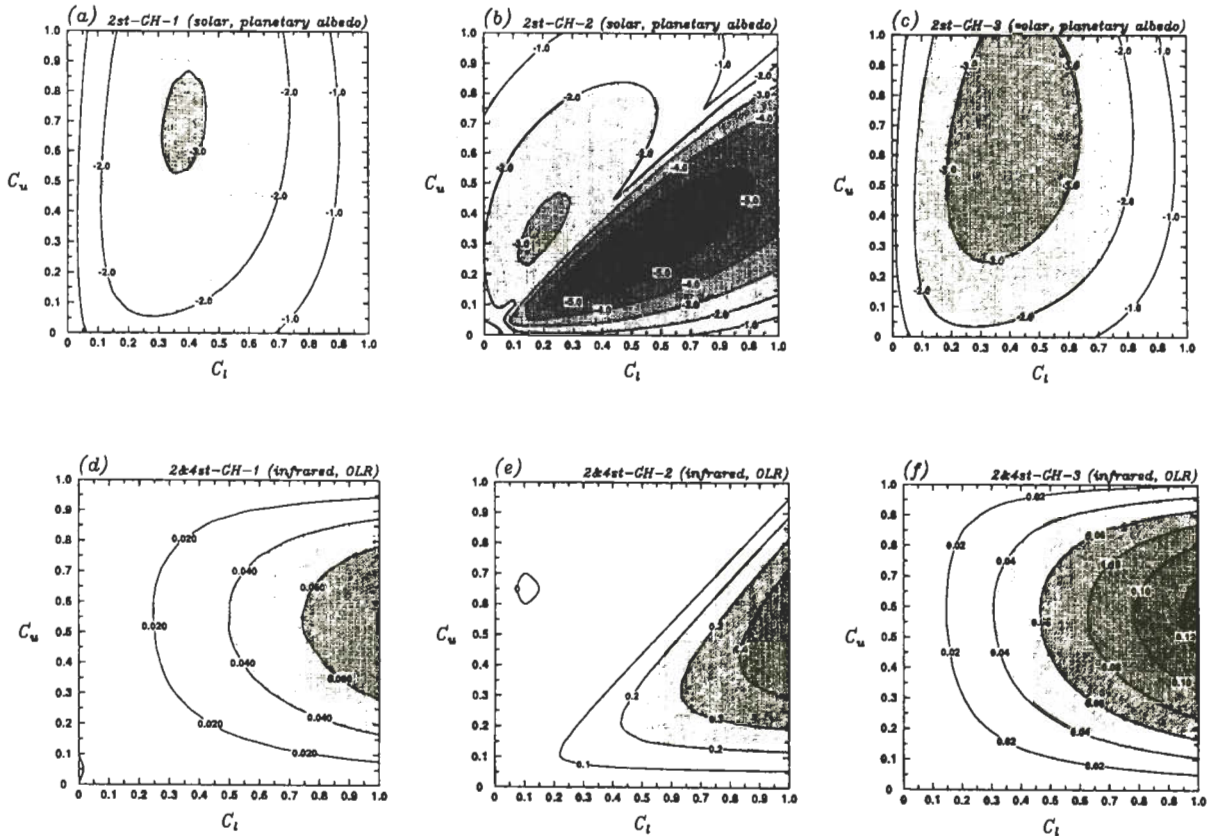


圖 3 針對圖 2 所示個案在各種上下層雲量組合條件之下，分別計算短波行星反照率和外逸長波輻射，比較採用 GH 法及 D 法處理部份雲量所產生的差異。圖中結果是 GH 法相對 D 法的差距百分比。(a)、(b) 和 (c) 依序是個案 1 至 3 關於短波行星反照率的結果，相對地 (d)、(e) 和 (f) 則是外逸長波輻射的結果。

換作不同的疊合假設，類似的基本差異仍然存在。這種差異性與雲以及地表具有的反射率密切關連，當雲或地表的反射率變大，差異性會增強。因此在圖 3 的結果中，個案一及三的差異性不及 4%，但包含兩層低雲的個案二則產生較大的差異性，其中下層雲量 (Cl) 大於上層雲量 (Cu) 時又凸顯許多，不過最大值仍低於 6%，與 D 法維持相當近似的結果。

關於長波方面的比較，由於長波輻射的計算中地表被視為黑體並且雲的長波輻射散射能力較弱，因而迅速地減低了兩者在外逸長波輻射的差異性，三種個案的測試結果都呈現遠低於 1% 以內的差異性。換言之，對於長波輻射的計算，使用相同的疊合方式，GH 法處理部份雲量的運算結構不僅可以獲得與 D 法幾乎相同的結果，而且它更具計算的效率性。表四是三種格式在長波輻射計算上所耗費的時間比較，基本上在 GH 運算結構下之二向\四向格式對長波輻射的計算時間，不論何種疊合假設或垂直解析度，都僅約比原本屬於均勻大氣運算結構下之二向\四向格式多一倍左右。因此，若以二向\四向格式以及隨機疊合的條件處理 N 層雲且雲量非覆滿的長波輻射計算比較，D 法由於必須進行 2^N 個均勻區塊的計算，相較之下比 GH 法需多耗費 2^{N-1} 倍的計算時間。

其次重要的一點，上述長波結果也同時驗

證，我們可以在原 GH 法之兩向格式中成功引入源函數技巧，並在此架構下利用 Fu et al. (1997) 提出之長波二向\四向格式處理部份雲量的問題。由於二向\四向格式求得長波輻射的精確性遠優於二向格式，因此大大改善一般二向格式應用於長波輻射計算的誤差，而在計算時間的增加上卻僅比 GH 運算結構下之二向格式多負擔 30% (表四)。表五顯示應用不同二向格式於前述三種個案 (包含不同雲量組合條件) 所計算出之外逸長波輻射相對二向\四向格式的差異。鑑於二向\四向格式的精確性近乎四向格式的結果，因此表中的差異性可視為二向\四向格式對二向格式誤差的改進幅度。基本上，Hemispheric mean 法普遍是低估，介於 -1.5% 至 -7.3% 之間，不過誤差幅度相對其它兩法較小，顯示二向格式中以它的精確性較佳，其次 Eddington 和 Quadrature 格式則都高估結果，其中 Quadrature 格式誤差高了許多，達 10.2% 至 14.7% 之間。

伴隨部份雲量所衍生一個值得注意的問題，是關於不同雲層疊合假設對輻射收支估計的影響，由於這種影響往往相當顯注而且雲的疊合方式尚未有實測上的定論，因此氣候模式通常著眼於能最佳化模式特性的方向，評估所採用的疊合假設。接下來，我們利用一組氣候模式所輸出的全球分布之三維剖面場，以離線

表四 長波輻射模式使用不同計算格式所耗費的電腦時間比較。 $\delta 2/4S$ 代表原二向四向法， $\delta 2/4S - GH$ 使用 GH 部份雲量計算架構的二向四向法， $\delta 2S - GH$ 使用 GH 部份雲量計算架構的二向法。表中各值乃相對 $\delta 2/4S$ 的結果。

Longwave model	$\delta 2/4S$	$\delta 2/4S - GH$	$\delta 2S - GH$
Times cost	1.0	1.95	1.50

表五 如圖 3 之計算條件，個案一至個案三分別使用不同二向法所計算出之外逸長波輻射，相對二向四向法結果的差異百分比。

	δ -Eddington	δ -Quadrature	δ -Hemispheric Mean
個案一	3.6 ~ 6.7%	10.2 ~ 14.7%	-7.3 ~ -1.6%
個案二	5.9 ~ 6.7%	11.9 ~ 14.8%	-1.6 ~ -1.5%
個案三	3.6 ~ 6.7%	10.5 ~ 14.7%	-6.9 ~ -1.6%

(off line) 計算方式，檢視 GH 法中使用不同疊合假設對輻射收支估計的影響。計算格式上採二向格式計算短波輻射而二向\四向格式計算長波輻射。三維剖面場乃來自中央氣象局全球模式 T42L18 冬季模擬的 90 日輸出 (Chen et al. 1999)，它包含輻射計算所需要的各種雲相關要素。我們比較兩種疊合假設，一是隨機疊合另一個是最大化-隨機混合疊合，最大化-隨機混合疊合假設雲層之間若相連屬最大化疊合否則即屬隨機。基本上可以預知從前者估算的雲量及雲輻射作用力 (cloud radiative forcing) 一定是大於後者。圖 4 是根據疊合假設所估計的緯向平均總雲量分布。圖中顯示因疊合假設而造成的總雲量差距相當明顯，大約介於 10-20%雲量的差距，差別的來源是一些屬於垂直上相連的雲層，在最大化-隨機混合疊合下會使用最大化疊合假設而非隨機疊合，因此相對降低了總雲量。圖 5 是兩種疊合假設對大氣層頂、地表和大氣各部份輻射收支估計所產生的差異。起因於疊合假設所產生雲輻射作用力的強弱，很清楚地表現在大氣層頂處的收支變化，相對隨機疊合，最大化-隨機混合疊合同時減少了雲的短波反射作用以及雲的長波溫室效應。至少從這個個案測試而言，改變疊合假設對大氣層頂處短波收支的衝擊似乎比長波方面明顯許多。

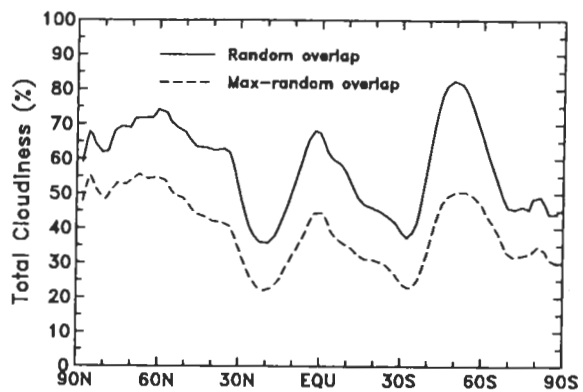


圖 4 根據氣候模擬輸出之三維剖面場，運用不同雲疊合假設所估計的總雲量緯向平均分布。

對於短波輻射收支的影響，主要發生在日照充足與雲量多的位置，赤道和 50°S 附近的大氣層頂短波輻射收支可達 50~60W/m² 的差別，而這差異絕大部份反映在地表上，換句話說直接影響地表面溫度的預測，這意謂對需要海面溫度預測的海洋偶合氣候模式，雲疊合假設對其模擬反應將扮演相當敏感的因素。其次，分析地面輻射收支的變化，也預期最大化-隨機混合疊合將比隨機疊合造成更大的日夜地溫起伏。另外，疊合假設對於長波輻射收支的影響，值得注意的是表現在大氣的部份。相對隨機疊合，最大化-隨機混合疊合雖然普遍地加強地表長波冷卻，但對大氣而言，它對於赤道和非赤

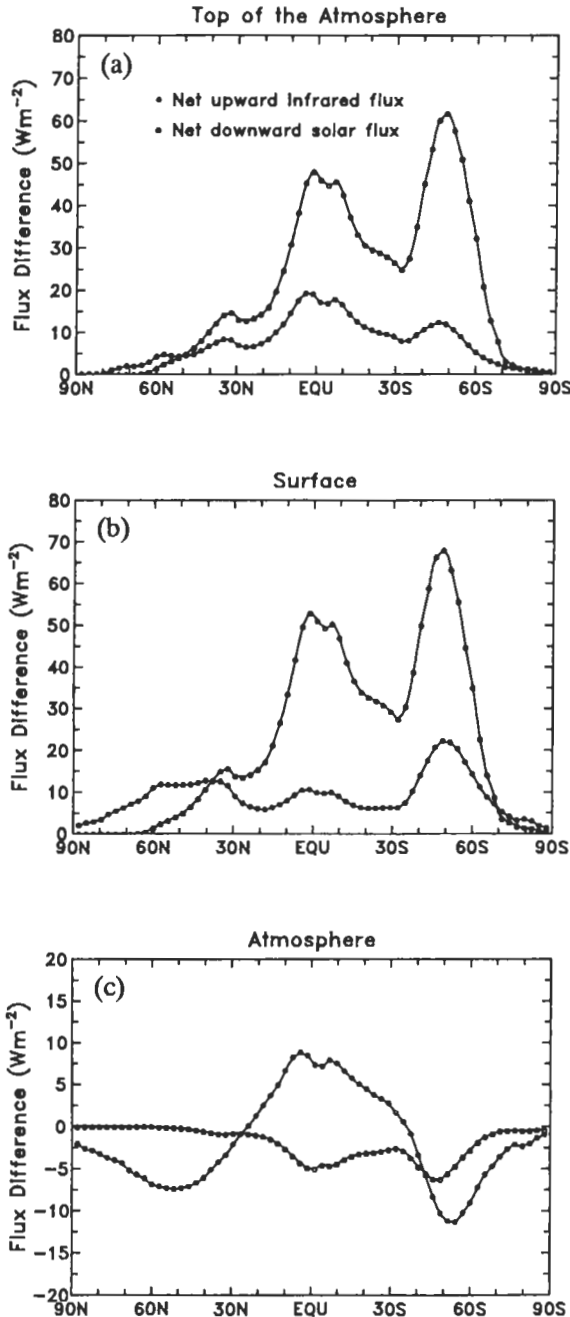


圖 5 兩種雲疊合假設對 (a) 大氣層頂、(b) 地表和 (c) 大氣各部份輻射收支估計所產生的差異。圖中顯示的是最大化-隨機疊合減去隨機疊合的結果，空(實)圈代表淨向下(上)短(長)波輻射通量的差異。

道區卻有完全不同的貢獻，在非赤道區顯然有減緩大氣內長波冷卻強度的作用。對照之下，最大化-隨機混合疊合減少高低緯之間大氣的溫度對比，換言之降低大氣環流的可用位能，這對於一般大氣環流模式的可能影響值得進一步評估。

總結而言，本文利用二向法為基礎系統性地建立一個解決部份雲量下輻射計算的方法。原理上，處理部份雲量的作法乃是沿續 GH 提出的概念，但 GH 的工作只建構在傳統二向法的應用範圍，而傳統二向法對長波輻射的計算卻有精確度不足的問題。因此本文的重點，是在沿續 GH 在二向法下處理部份雲量的計算結構，進一步結合源函數技巧的應用，藉此運用 Fu et al. (1997) 的二向/四向混合法取代一般二向法以改善長波輻射的計算結果。這使得無論短波或長波輻射模式，我們都可以使用二向運算結構與一致的雲疊合條件，以兼具效率且精確的方式處理部份雲量的計算問題。從氣候模式的應用而言，本文所建立的方法是相當適用的。

致 謝

本研究撰寫過程承蒙美國加州大學洛杉磯分校廖國男教授熱心地指正，使本文更盡完善，謹致上由衷地謝意。同時感謝兩位審查者對本文的寶貴意見。本研究乃在中央氣象局電腦設施的支援和國科會計畫 NSC89-2111-M052-010 的支持下完成，特此申謝。

附 錄

● (2.3) 式中生成源項的定義

對於短波輻射，

$$\begin{bmatrix} Z^- \\ Z^+ \end{bmatrix}_k = S_k \begin{bmatrix} T \\ R \end{bmatrix}_k, \quad (\text{A.1})$$

對於長波輻射，

$$\begin{bmatrix} Z^- \\ Z^+ \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} -J^-(0)t - J^+(\Delta\tau)r + J^-(\Delta\tau) \\ -J^-(0)r - J^+(\Delta\tau)t + J^+(0) \end{bmatrix}_k, \quad (\text{A.2})$$

其中，

$$t_k = e_k (\Gamma_k^2 - 1) / (\Gamma_k^2 e_k^2 - 1), \quad (\text{A.3})$$

$$r_k = \Gamma_k (e_k^2 - 1) / (\Gamma_k^2 e_k^2 - 1), \quad (\text{A.4})$$

$$T_k(\mu_0) = \tilde{\omega}_k (q_{1k} t_k + q_{2k} e^{-\Delta\tau_k/\mu_0} r_k - q_{1k} e^{-\Delta\tau_k/\mu_0}), \quad (\text{A.5})$$

$$R_k(\mu_0) = \tilde{\omega}_k (q_{1k} r_k + q_{2k} e^{-\Delta\tau_k/\mu_0} t_k - q_{2k}), \quad (\text{A.6})$$

$$S_k(\mu_0) = \mu_0 S_0 e^{-\tau_k/\mu_0}, \quad (\text{A.7})$$

並且，

$$e_k = e^{-\lambda_k \Delta\tau_k}, \quad (\text{A.8})$$

$$q_{1k} = [\gamma_{4k} + \mu_0 (\gamma_{1k} \gamma_{4k} + \gamma_{2k} \gamma_{3k})] / (1 - \lambda_k^2 \mu_0), \quad (\text{A.9})$$

$$q_{2k} = [-\gamma_{3k} + \mu_0 (\gamma_{1k} \gamma_{3k} + \gamma_{2k} \gamma_{4k})] / (1 - \lambda_k^2 \mu_0), \quad (\text{A.10})$$

$$\gamma_{4k} = 1 - \gamma_{3k} \circ$$

● (2.6) 式中生成源項的定義

對於短波輻射，

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}^{-f} \\ \tilde{Z}^{+f} \\ \tilde{Z}^{-c} \\ \tilde{Z}^{+c} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} [b_1 S^f + (1 - b_3) S^c] \cdot T^f \\ [b_1 S^f + (1 - b_3) S^c] \cdot R^f \\ [(1 - b_1) S^f + b_3 S^c] \cdot T^c \\ [(1 - b_1) S^f + b_3 S^c] \cdot R^c \end{bmatrix}_k, \quad (\text{A.11})$$

並且上式伴隨有下列的遞迴關係，

$$\begin{bmatrix} S^f \\ S^c \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} b_1 e^{-\Delta\tau^f/u_0} & (1-b_3)e^{-\Delta\tau^f/u_0} \\ (1-b_1)e^{-\Delta\tau^c/u_0} & b_3 e^{-\Delta\tau^c/u_0} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} S^f \\ S^c \end{bmatrix}_{k-1}, \quad (\text{A.12})$$

其中，在大氣層頂的初始條件為 $S_1^c = 0$ 和 $S_1^f = \mu_0 S_0$ 。

對於長波輻射，

$$\begin{bmatrix} \tilde{Z}^{-f}, \tilde{Z}^{+f}, \tilde{Z}^{-c}, \tilde{Z}^{+c} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Z^{-f}(1-C), Z^{+f}(1-C), Z^{-c}C, Z^{+c}C \end{bmatrix}_k. \quad (\text{A.13})$$

參考文獻

- Chen, J. M., C. T. Fong, F. J. Wang, C. H. Shiao, J. H. Chen, and M. D. Cheng, 1999: Climate characteristics of the CWB global forecast system: Hydrological processes and atmospheric circulation. *TAO*, 10, 737-762.
- Chou, M. D., M. Suarez, C. H. Ho, M. M. H. Yan, and K. T. Lee, 1998: Parameterizations for cloud overlapping and shortwave single-scattering properties for use in general circulation and cloud ensemble models. *J. Climate*, 11, 202-214.
- Geleyn, J. F., and A. Hollingsworth, 1979: An economical analytical method for the computation of the interaction between scattering and line absorption of radiation. *Beitr. Phys. Atmos.*, 52, 1-16.
- Fu, Q., and K. N. Liou, 1992: On the correlated k-distribution method for radiative transfer in nonhomogeneous atmospheres. *J. Atmos. Sci.*, 49, 2139-2156.
- Fu, Q., and K. N. Liou, 1993: Parameterization of the radiative properties of cirrus clouds. *J. Atmos. Sci.*, 50, 2008-2025.
- Fu, Q., K. N. Liou, M. C. Cribb, T. P. Charlock, and A. Grossman, 1997: Multiple scattering parameterization in thermal infrared radiative transfer. *J. Atmos. Sci.*, 54, 2799-2812.
- Kiehl, J. T., J. J. Hack, and B. P. Briegleb, 1994: The simulated Earth radiation budget of the National Center for Atmospheric Research community climate model CCM2 and comparisons with the Earth Radiation Budget Experiment (ERBE). *J. Geophys. Res.*, 99, 20815-20827.
- Liou, K. N., 1992: Radiation and cloud processes in the atmosphere. *Oxford University Press*, 487pp.
- McClatchey, R. A., R. W. Fenn, J. E. A. Selby, F. E. Volz, and J. S. Garing, 1971: Optical properties of the atmosphere. Air Force Rep. AFCRL-71-0279, 85pp.
- Meador, W. E., and W. R. Weaver, 1980: Two-stream approximations to radiative transfer in planetary atmospheres: A unified description of existing methods and a new improvement. *J. Atmos. Sci.*, 37, 630-643.
- Ritter, B., and J. F. Geleyn, 1992: A comprehensive radiation scheme for numerical weather prediction models with potential applications in climate simulations. *Mon. Wea. Rev.*, 120, 303-325.
- Stephen, G. L., 1984: The parameterization of radiation for numerical weather prediction and climate models. *Mon. Wea. Rev.*, 112, 826-867.
- Toon, O. B., C. P. McKay, and T. P. Ackerman, 1989: Rapid calculation of radiative heating rates and photodissociation rates in inhomogeneous multiple scattering atmospheres. *J. Geophys. Res.* 94, 16287-16301.

Parameterization of Radiative Heating Rate in Partly Cloudy Conditions

Chin-Tzu Fong

R&D Center, Central Weather Bureau

(Manuscript received 29 November 2000 ; in final form 9 April 2001)

ABSTRACT

For the purpose of the application to climate models, the two-stream approximation has been not only widely used for the calculation of solar radiation, but also gradually employed for the calculation of infrared radiation. The traditional two-stream approximation, however, has the discrepancy of the accuracy in infrared radiation. Following the source function technique proposed by Toon et al., Fu et al. improve the accuracy problem in infrared radiative calculations by developing a two and four-stream approximation, which incorporates the speed of the two-stream scheme and the accuracy of the four-stream scheme. This study intends to provide a systematic development of a general solution for radiative calculations in partly cloudy conditions based on the two-stream approximation. The treatment of the cloud overlap follows the concept proposed by Geleyn and Hollingsworth, which was applied only to the traditional two-stream approximation before. In this study, we derive a solution to introduce the source function technique into the treatment of the cloud overlap. Consequently, the two and four-stream approximation can be readily used for cases of partly cloudy atmospheres to retain better accuracy. The methodology presented here should be suitable for the calculation of flux and heating rate in GCMs due to the fact that it possesses the features of accuracy and computational economy and accounts for cloud overlap of partly cloudy conditions in a consistent manner covering the whole spectrum calculation.

Key words: Radiation, Two-stream approximation, Partly cloudy condition