

雨滴成長與終端速度之相關

柳 中 明

國立台灣大學大氣科學系

(中華民國七十五年十月四日收稿，十二月廿二日定稿)

摘 要

本文分為 2 部份，1 為討論作者所發展出的雨滴終端速度之經驗方程式的精確度。經與其他 8 組方程式和實驗數據相比較後，發現發展出之 V_t 方程式具合理之準確度，並具雨滴增大後速度趨向一常值的特性。小雨滴區內，誤差亦不大。同時 V_t 方程式對於終端速度隨大氣狀況之改變，處理恰當，並具最小之偏離實驗數據的均方根差。

其次，運用兩滴連續成長模式，模擬雨滴在含均勻雲滴之雲層中成長，發現終端速度估算的差別，確實造成顯著的雨滴成長與行徑的不同。其表現在外的，就是降雨起始時間，與降雨整體時間長度的不同。譬如 Shiino (1983) 方程式具低估雨滴終端速度的特性，因此促成起始半徑 $R_0 = 0.1$ 公分的雨滴，延遲 18.9 分鐘才抵達地面。並在 1 小時模擬成長後，僅使 $R_0 \geq 0.05$ 公分的雨滴降落地面。反之 Manton and Cotton (1977) 方程式具高估雨滴終端速度的特性，因此促成 $R_0 = 0.5$ 公分的雨滴，提早 8.3 分鐘抵達地面。更在 47.8 分鐘內，即促使 $R_0 \geq 0.003$ 公分的所有雨滴全部降落地面。由於雲雨發展的時間尺度才約 1 小時，雨滴提早或延遲 10 分鐘降落地面，即具約 15% 之時間誤差，可謂相當嚴重。

此外，研究中亦注意到雨滴長時間停留在大氣中，並不會因為與雲滴碰撞—凝結的機會增加，而形成大雨滴。反之，可能會因為終端速度太小，成長速率小，無法形成較大雨滴。此因素使得 $R_0 \leq 0.01$ 公分的雨滴終端速度的估算，顯得特別重要，因為此些小雨滴停留在雲層內的時間最長，誤差的累積效應也最明顯。

一、前言

雨滴成長主要經雨滴與雲滴（二者通稱為水滴）間之碰撞、凝結過程，Pruppacher and Klett (1978) 對此有極詳盡的說明。其機制為雨滴在雲中作相對於雲滴的下墜運動，彼此間之碰撞機率因雨滴大小與速率的增加而增高，碰撞後雲滴即溶於雨滴中，促成雨滴的成長。小雨滴循此過程，逐

漸成長成大雨滴，克服氣流之垂直上升速度，而墜落地面；或形成大雨滴後，由於結構不穩定而破裂成無數小雨滴，再循相似過程，促成無數大雨滴的形成。過去在此方面的研究，強調碰撞與凝結機率的實驗與模擬 (Beard and Ochs, 1983; 1984; Beard et al., 1979; Ochs and Beard,

1984)，不同大小雨滴與雲滴間之相互作用 (Srivastava, 1971; Berry and Reinhardt, 1974 b; Young, 1975)，暖雲成長與雨滴成長之相關 (Ogura and Takahashi, 1973; Takahashi, 1975, 1976, 1981; Soong, 1974)，碰撞—凝結成長數值模式的發展 (Berry, 1967; Berry and Reinhardt, 1974 a; Bleck, 1970; Almeida and Dennett, 1980) 等。本文則將分析雨滴下墜終端速度估計的誤差，對雨滴成長模擬的影響。

雨滴終端速度的實驗數據，近三、四十年來，各界均以 Gunn and Kinzer (1949) 對水滴直徑介於 0.01 ~ 0.58 公分間之測量數據為標準，並詳載於 Smithsonian Meteorological Tables (1951)。此數據主要在標準大氣 (1013.25 mb, 20°C 和 50% 相對濕度) 下測得。此外，Davies (1942) 與近期 Beard and Pruppacher (1969) 的實驗數據，則考慮水滴終端速度在不同大氣狀況下的變化。Davies (1942) 分析水滴直徑介於 0.338 ~ 0.624 公分，而大氣密度介於 0.6 ~ 1.23 kg·m⁻³ 間終端速度的變化。當大氣密度為 1.19 或 1.2 kg·m⁻³ 時，Davies 的數據與 Gunn and Kinzer 的資料相近。Beard and Pruppacher (1969) 則分析水滴直徑介於 0.002 ~ 0.095 公分，且氣流具不同雷諾數與拉拽係數時，終端速度的變化。其數據在標準大氣下稍低於 Gunn and Kinzer 數據。另水滴直徑小於 0.01 公分時，滿足斯托克斯定律。一般為組成水滴終端速度的經驗方程式，均以上述 3 組資料為依據。

本文作者亦採 Gunn and Kinzer, Davies 與 Beard and pruppacher 等資料，完成 2 個終端速度的經驗方程式。第 1 組方程式已於柳 (1986) 中論及，此式並未考慮小水滴 (直徑小於 0.03 公分) 速度的修正。第 2 組方程式則修正第 1 組方程式，使小水滴 (直徑小於 0.01 公分) 滿足斯托克斯定律。本文第 2 節即將比較此 2 組方程式與其餘 8 組不同方程式和實驗數據間之誤差。所選之 8

組方程式 (參考附錄 1)，為近數年來，微雲物理學與雲數值模式研究所經常採用者。此外尚有一些方程式，並未於本文內討論，因為此些方程式鮮為科學界所採用，且其型式均已包括於所研究之 8 組方程式中。

精確的終端速度的估算，對於雲物理研究，雲模擬成長，到底有何重要性？由於雨滴碰撞—凝結成長過程，為雲雨發展過程中至為重要的物理機制。而雨滴終端速度的大小，影響雨滴與雲滴間之碰撞機率。雨滴大，則終端速度大，其與雲滴碰撞之機率亦大，乃造成雨滴成長速率增大。因此，正確的終端速度的估算，將有助於雨滴成長速率的正確估算。對於整體雲之發展，則有助於雲生命史之正確模擬。設若速度估計偏低，則雨滴成長緩慢，其墜落地面的概率減少，因此雲的生命史將延長。反之，速度估計偏高，則雨滴成長快速，其墜落地面的概率增大，雲的生命史將縮短。此問題在過去僅 Soong (1974) 曾提出討論，但由於至今尚無一具高準確度之終端速度方程式可供應用，是以至今尚無人可解答終端速度估計，對雨滴成長與雲發展模擬研究的影響。本文第 3 節即將比較 6 組不同終端速度方程式，在雨滴連續成長模式中，由於速度估算的不同，對於雨滴成長過程之影響。並分析精確的終端速度估算的重要性。當然在更複雜的雲模式中，各物理機制彼此相互影響，終端速度之重要性或不如本文所述，但本文研究將提供明確的了解有關終端速度與雨滴成長，降雨模擬之相關。

二、水滴終端速度之經驗方程式

1 柳氏方程式

柳 (1986) 已介紹 1 組配合 Gunn and Kinzer (1949) 數據，且參考 Foote and du Toit (1969) 方程式，所組成的水滴終端速度之經驗方程式。此式主要採曲線函數法處理 Gunn and Kinzer (1949) 數據而得 (參考附錄二)，再乘以 Foote and du Tort (1969) 所建議之大氣變化函數，而為

$$V_1(d, T, \rho) = \left[\frac{a}{1 + e^{b(d-c)}} + \alpha \right] \{ 10^y [1 + 0.0023 (1.1 - \frac{\rho}{\rho_0}) (T_0 - T)] \} \quad \text{---①}$$

其中，

$$y = 0.43 \log_{10} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) - 0.4 [\log_{10} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)]^{2.5} \quad \text{---②}$$

此外，P 為大氣壓力； ρ 為空氣密度；T 為氣溫； $\rho_0 = 1.2 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ； $T_0 = 20^\circ\text{C}$ ；d 為水滴直徑；a, b, c 與 α 則為常數。

方程式①最重要的是加入考慮大水滴（直徑大於 0.58 公分，無實驗觀測值區）的終端速度。假設水滴將因重量增加，表面積增大，以至所承受空氣摩擦力和本身結構不穩定性的增大，抵消重力的增加，而至終端下墜速度不因大小增大而快速增加，反而漸趨一常值。此項假設由 Gunn and Kinzer (1949) 與 Davies (1942) 的資料中均可看出。此外，由於水滴直徑大於 0.58 公分後，其終端速度已超過 900 公分/秒，假設所造成的誤差，約在 2% 左右，因此假設之可信度極高。那麼此假設的重要性何在呢？一為方便曲線函數化組合 Gunn and Kinzer 數據，一為合理化水滴直徑大於 0.58 公分的終端速度，此點在下節比較 10 組方程式時，將可明瞭。

方程式①的缺點為不滿足 Beard and Pruppacher (1969) 資料，在水滴直徑小於 0.03 公分範圍內，有高估終端速度的現象。因此決定修正之為下式的形式：

$$V_2(d, T, \rho) = V_1(d, T, \rho) \times \left\{ 1 - \frac{(1+f)}{[1+f \exp(\beta d)]} \right\} \quad \text{---③}$$

其中，

$$f = -0.78\rho^2 + 9.42\rho - 29.7 \quad \text{---④}$$

$$\beta = \frac{1}{0.005} \ln \left[\frac{1+f}{f} \left(\frac{1+f}{1-q} - 1 \right) \right] \quad \text{---⑤}$$

$$q = 0.025\rho + 0.043 \quad \text{---⑥}$$

③式右項內與 V_1 相乘的函數，其值介於 0 與 1 之間，主要作用在降低 V_1 所高估的小水滴終端速度。當 $d \geq 0.03$ 公分後，函數值即趨近 1，所以對大水滴終端速度毫無影響。

V_1 與 V_2 二方程式有一共同點，即是大氣狀況變化的掌握，主要藉重空氣密度 ρ 和大氣溫度 T 二因子。其理由為依據理想氣體定律，大氣壓力 $P = \rho RT$ ，(R 為氣體常數)，所以掌握 ρ ，T 即掌握 P 的變化。當雨滴由高處向下墜落時，空氣密度明顯地由小而大，溫度亦由低而高，是以雨滴之下墜終端速度將有相當改變。基本上，同樣大小的水滴，在高處所具有的終端速度，應大於在低處所具有的速度。至於空氣中水汽含量的多寡，幾乎絲毫不影響空氣密度的大小，因此由於水汽含量的改變，所造成雨滴終端速度的改變，幾可忽略。此外，空氣之動力黏滯係數，主要為大氣溫度之函數 (Smithsonian Meteorological Tables, 1951)。但其變化緩慢， -20°C 至 20°C 間，僅改變約 10%，顯示空氣之摩擦特性在一般之大氣狀況下，改變不多。是以，由於空氣動力黏滯係數的改變，而造成雨滴終端速度的改變，較之於空氣密度與溫度改變的影響，可以忽略。

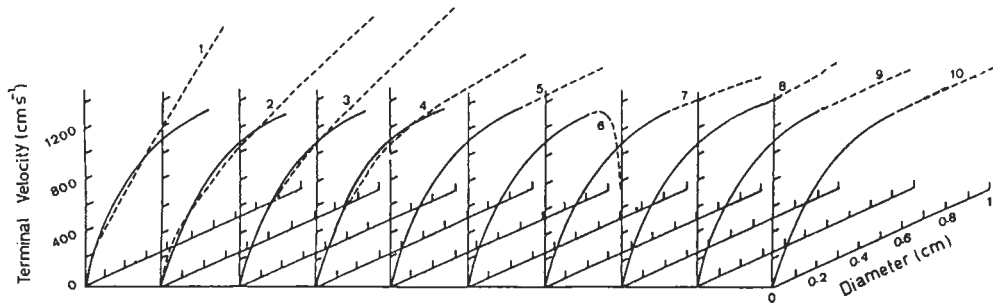
2 經驗方程式之精確度

附錄 1 內詳列 10 組不同經驗方程式，除 V_1 與 V_2 外，尚包括 Liu and Orville (1969)，Manton and Cotton (1977)，Ogura and Takahashi (1973)，Shiino (1983)，Best (1950)，Foote and du Toit (1969)，Berry and Pranger (1974)，Beard (1976) 等發展出之方程式。研究之第一步，首先分析在 1013.25 mb 與 20°C 下，此些方程式與 Gunn and Kinzer (1949) 數據間之差距。表一即詳列均方根差值 (rms)。圖 1 則說明此 10 組方程式所估算之終端速度在水滴直徑介於 0~1 cm 間之變化情形。

明顯地，Foote and du Toit 方程式所具

表一：各不同水滴終端速度之經驗方程式在 1013.25 mb, 20 °C 下與 Gunn and Kinzer (1949) 數據相比較後之均方根差 (rms)。

| 編號 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------------------------|------------------------|--------------------------|----------------------------|---------------|-------------|--------------------------|--------------------------|--------------|-------|-------|
| 方程式 | Liu and Orville (1969) | Manton and Cotton (1977) | Ogura and Takahashi (1973) | Shiino (1983) | Best (1950) | Foote and du Toit (1969) | Berry and Pranger (1974) | Beard (1976) | V_1 | V_2 |
| rms (cm s ⁻¹) | 172.05 | 66.81 | 51.38 | 21.87 | 11.26 | 1.47 | 5.56 | 2.24 | 6.71 | 5.24 |



圖一：(1)Liu and Orville (1969), (2)Manton and Cotton (1977)
 (3)Ogura and Takahashi (1973), (4)Shiino (1983)
 (5)Best (1950), (6)Foote and du Toit (1969)
 (7)Berry and Pranger (1974), (8)Beard (1976)
 (9) V_1 與 (10) V_2 等水滴終端速度之經驗方程式 (皆以虛線表之),
 與 Gunn and Kinzer (1949) 數據 (以實線表之; 水滴直徑小於
 0.58 公分), 在 1013.25 mb, 20 °C 下相比較的情形。

rms 值最小, 但當 $d > 0.58$ cm 後, 所估算速度即急速減少, 甚而轉為負值。在實際雲觀測或雲數值模擬中, 直徑介於 0.6 ~ 1 公分之雨滴並非不存在 (Pruppacher and Klett, 1978; Davies, 1942), 錯誤地估算其終端速度, 將給予不正確之物理含義, 並造成不正確的現象。

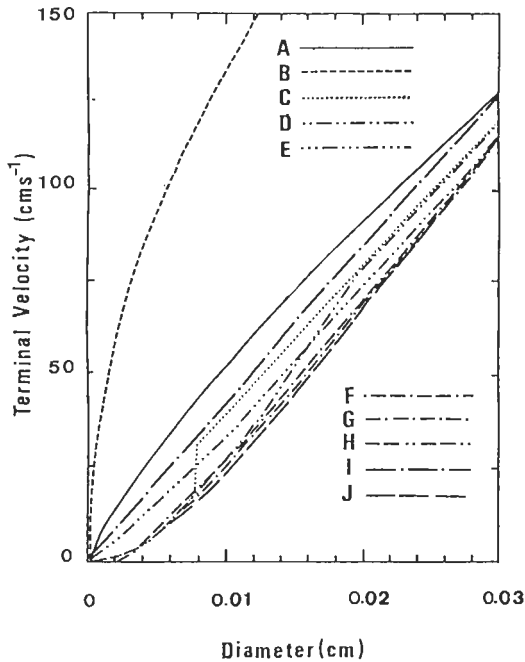
Beard 方程式具次小之 rms 值, 但 $d > 0.8$ cm 後, 速度具加速增加現象, 非常不合理。 V_2 方程式具第三小之 rms 值 (5.24 cm/sec), 當雨滴大於 0.58 公分後, 速度緩慢增加且逐漸趨向一常值, 合乎二、1 節中所期望者。Berry and Pranger 方程式之 rms 值略低於 V_2 之 rms 值,

但當 d 大於 0.58 公分後, 速度緩慢下降, 似乎不太合理。 V_1 之 rms 值在所有方程式中排名第五 (6.71 cm/sec), 不過比較 V_1 與 V_2 隨雨滴大小之變化 (圖 1), 似乎並無明顯差距。可見在忽略小雨滴終端速度估算誤差下, V_1 方程式之精確度仍極高。另, Best (1950) 方程式在圖 1 中之變化情形似與 V_1 , V_2 相似, 但其 rms 值 (11.26 cm/sec) 大於 V_1 之 rms。

此外為雲模式所常用之方程式: Liu and Orville (1969), Manton and Cotton (1977), Ogura and Takahashi (1973) 和 Shiino (1983) 等, 均具 rms 值至少 20 cm

／sec，其中Liu and Orville (1969) 具最大之rms (172.05 cm/sec)。另Ogura and Takahashi 和 Shiino 二方程式具明顯之速度不連續現象。

為特別明瞭小雨滴終端速度的估計情形，圖2說明在1013.25 mb，20°C下，此10組方程式在d



圖二：(A)Liu and Orville (1969)，
(B)Manton and Cotton (1977)，
(C)Ogura and Takahashi (1973)，
(D)Shiino (1983)，
(E)Best (1950)，
(F)Foote and du Toit (1969)，
(G)Berry and Pranger (1974)，
(H)Beard (1976)，
(I) V_1 與(J) V_2 等水滴終端速度之經驗方程式，在1013.25 mb，20°C下，對直徑小於0.03 cm之水滴終端速度估計情形。

≤0.03公分範圍內之變化情形。由於Beard (1976) 在小雨滴區內，除滿足斯托克斯定律，亦滿足Beard and Pruppacher (1969) 數據。吾人乃以Beard 方程式為標準，作出表二中各組方程式偏離Beard 值之均方根差，以為比較參考。

明顯地，Berry and Pranger 與 V_2 方程式均具rms值小於1 cm/sec，可謂偏離Beard 方程式甚少。Foote and du Toit 方程式雖具rms值2.36 cm/sec，但在 $d \leq 0.001$ 公分區，其終端速度均為負值(圖2中-----線止於 $d = 0.001$ 公分處)，非常不合理。至於其他6組方程式，rms均大於6 cm·sec⁻¹，其中又以Manton and Cotton 方程式的111.25 cm·sec⁻¹ 為最不合理。

總結而言， V_2 方程式在10組方程式中除具相當代表Gunn and Kinzer 數據之準確度(rms = 5.24 cm·sec⁻¹)外，在大雨滴區($d > 0.6$ 公分)內亦具最合理之特徵，且不具方程式不連續性。在小雨滴區， V_2 方程式亦非常接近Beard 方程式(rms = 0.897 cm·sec⁻¹)。是以可視為10組方程式中極具合理代表性之方程式。

那麼 V_2 方程式在表現終端速度隨大氣狀況而改變的問題上，可靠性如何呢？由於截至目前為止，僅Davies (1942) 與Beard and Pruppacher (1969) 有此方面的實驗數據，因此研究將以此二組資料為準。首先有關Beard and Pruppacher 的數據，由於Beard 方程式，已充份表現其特徵，而經作者仔細分析比較，發現各組方程式與Beard 方程式相較後的誤差情形，在不同大氣狀況下，均與標準大氣時表現特徵一致。本文內乃省略其比較情形。

有關與Davies (1942) 數據之比較研究，表三列明此10組方程式在9種不同大氣狀況(表四)下，偏離Davies 數據的均方根差。(所選之9類大氣狀況為Foote and du Toit (1969) 和Beard (1976) 所建議者)。另，圖三內比較

表二：各不同水滴終端速度之經驗方程式在 1013.25 mb, 20 °C 下，水滴直徑小於 0.03 cm 時，與 Beard (1976) 方程式相比較後之均方根差 (rms)。

| 編號 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------------------|------------------------|--------------------------|----------------------------|---------------|-------------|--------------------------|--------------------------|--------------|----------------|----------------|
| 方程式 | Liu and Orville (1969) | Manton and Cotton (1977) | Ogura and Takahashi (1973) | Shiino (1983) | Best (1950) | Foote and du Toit (1969) | Berry and Pranger (1974) | Beard (1976) | V ₁ | V ₂ |
| rms (cms ⁻¹) | 22.65 | 111.25 | 10.02 | 6.07 | 6.39 | 2.36 | 0.67 | 0 | 15.59 | 0.90 |

表三：各不同水滴終端速度之經驗方程式在表四之 9 類假定大氣狀況下，與 Davies (1942) 數據相比較後之均方根差 (rms ; cms⁻¹)。

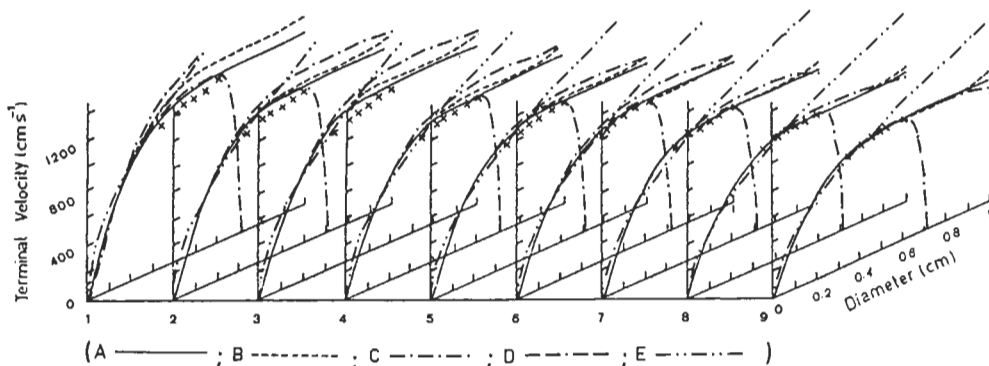
| 編號 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-------------|------------------------|--------------------------|----------------------------|---------------|-------------|--------------------------|--------------------------|--------------|----------------|----------------|
| 方程式 大氣狀況 | Liu and Orville (1969) | Manton and Cotton (1977) | Ogura and Takahashi (1973) | Shiino (1983) | Best (1950) | Foote and du Toit (1969) | Berry and Pranger (1974) | Beard (1976) | V ₁ | V ₂ |
| 1 | 121.87 | 229.97 | 213.08 | 258.39 | 275.33 | 81.59 | 246.29 | 165.88 | 76.14 | 75.51 |
| 2 | 133.87 | 962.46 | 155.41 | 198.21 | 215.00 | 59.99 | 156.06 | 103.35 | 54.75 | 54.56 |
| 3 | 132.95 | 164.87 | 157.97 | 200.88 | 217.66 | 57.57 | 160.07 | 103.82 | 52.27 | 52.02 |
| 4 | 160.91 | 127.23 | 111.48 | 149.91 | 164.45 | 38.14 | 108.24 | 66.05 | 32.96 | 32.96 |
| 5 | 191.50 | 105.33 | 78.70 | 108.66 | 124.75 | 22.12 | 76.97 | 40.49 | 16.94 | 16.94 |
| 6 | 187.40 | 107.30 | 82.33 | 113.80 | 129.97 | 19.85 | 83.21 | 39.82 | 14.47 | 14.47 |
| 7 | 226.96 | 89.91 | 58.15 | 66.32 | 81.47 | 14.14 | 49.75 | 24.06 | 9.38 | 9.38 |
| 8 | 260.01 | 79.42 | 62.11 | 29.80 | 42.55 | 10.85 | 31.12 | 14.29 | 6.85 | 6.85 |
| 9 | 302.15 | 71.15 | 92.42 | 27.24 | 6.88 | 12.10 | 11.72 | 11.30 | 8.62 | 8.62 |

Manton and Cotton, Foote and du Toit, Berry and Pranger, Beard 與 V₂ 等 5 組方程式，與 Davies 數據在表現速度隨水滴大小與大氣狀況變化之情形。其餘方程式或不考慮速度隨大氣狀況之改變，或已重覆表現特徵，故不於圖三中考慮。

明顯地，水滴終端速度隨大氣壓力之減少而增加。Liu and Orville, Ogura and Takahashi, 與 Shiino 等三組方程式不考慮速度隨大氣狀況而改變，非常不合理，所具誤差 rms 值非常大，且均低估高層雨滴終端速度。而 Foote and du

Toit 方程式仍具 d > 0.6 公分後即急速減少之不合理特徵。其餘 6 組方程式則正確表現速度與大氣壓力間之相關，不過均明顯地高估 Davies 數據，尤以在 (400 mb, -16 °C) 誤差最大。其中，一般 Pruppacher and Klett (1978), Rogers (1979), Hall (1980) 等所採信之 Beard 方程式，誤差達 165.9 cms⁻¹，可謂相當嚴重。作者發展出之 V₁, V₂ 方程式，誤差 rms 在 76 cms⁻¹ 左右，為所有方程式中誤差最小者。

總結而言，V₂ 方程式除在標準大氣下具適當準確度與合理特徵外，亦為 10 組方程式中偏離



圖三：(A) V_2 , (B) Beard (1976) , (C) Berry and Pranger (1974) , (D) Foote and du Toit (1969) , 與 (E) Manton and Cotton (1977) 等水滴終端速度經驗方程式，在表四所示 9 類大氣狀況下，與 Davies (1942) 數據 (打×者) 相比較的情形。圖中正下方 1~9 數字，代表 9 類不同大氣狀況。

表四：假設之 9 類大氣狀況，參考 (Foote and du Toit, 1969 與 Beard, 1976)。

| 大氣狀況 | 大氣壓力 (mb) | 溫度 (°C) | 空氣密度 ($kg m^{-3}$) | 動力黏滯係數 ($\times 10^{-4}$ poise) |
|------|-------------|-----------|----------------------|-----------------------------------|
| 1 | 400 | -16 | 0.55 | 1.64 |
| 2 | 500 | -8 | 0.66 | 1.67 |
| 3 | 500 | -10 | 0.66 | 1.67 |
| 4 | 600 | 0 | 0.77 | 1.72 |
| 5 | 700 | 10 | 0.86 | 1.77 |
| 6 | 700 | 14 | 0.85 | 1.79 |
| 7 | 800 | 15 | 0.97 | 1.79 |
| 8 | 900 | 20 | 1.07 | 1.82 |
| 9 | 1013 | 20 | 1.20 | 1.82 |

Davies 數據最少者。故可認定為 10 組方程式中最可信賴者。 V_1 方程式則在不考慮小雨滴終端速度特性下，亦可視為具代表性之方程式。

三、雨滴成長與終端速度

1 連續成長模式

雨滴碰撞-凝結成長的數值模式共有三類，分別為連續成長模式 (Fletcher, 1962), Telford 模式 (Telford, 1955)，與統計凝結模式 (Melzak and Hitschfield, 1953)。在本研究中，為充份了解單一雨滴的成長受到所估算終端

速度的影響，決定採用連續成長模式，作詳細分析研究。

研究中，主要假設 1 具均勻大小雲滴 (半徑為 $10 \mu m$) 的雲層存在於上升氣流中。雲層具固定之雲頂高度 (10 km) 與雲底高度 (1 km)，且含不變之水含量 ($1 g m^{-3}$)。同時假設上升氣流在垂直方向成一正弦函數分布，即上升速度 $W(z) = W_0 \sin(\pi z / 10 km)$ ，其最大垂直風速 $W_0 = 750 cm s^{-1}$ ，位於 5 km 高度處。而環境大氣之溫度與濕度剖面，則採用 Wilhelmsen and Ogura (1972) 所建議者，即地面溫度為 $25^\circ C$ ，溫度隨高度遞減，在 1 公里以下為 $9.8^\circ C km^{-1}$ ，1 公里至 5 公里間為 $5.9^\circ C km^{-1}$ ，5 km 以上則為 $4.8^\circ C km^{-1}$ 。近地面之相對濕度則為 80%，1 km 以下之遞增率 $10\% km^{-1}$ ，1 km 以上則以 $10\% km^{-1}$ 遞減。壓力隨高度之變化，可依靜力平衡方程式，採疊代法求之。

此時乃假設在雲內離地 5 km 處，有一股大大於雲滴的雨滴生成。而每一雨滴經與雲滴碰撞-凝結而成長，其成長速率可以下式表之 (Rogers, 1979)；

$$\frac{dR}{dt} = \frac{E_R M}{4 \rho_L} u_R \quad \text{——⑦}$$

式中 R 為雨滴半徑； t 為時間； E_R 為有效之碰撞—凝結概率，此資料取自 Ochs and Beard (1984)，為雨滴半徑之函數； H 為雲內水含量； ρ_L 為雨滴密度； u_R 為雨滴終端速度。是以在 $n+1$ 次時間積分後，雨滴的半徑大小即可以下式估之：

$$R^{n+1} = R^n + \left(\frac{dR}{dt} \right)^n \Delta t \quad \text{——⑧}$$

研究中時間間隔 $\Delta t = 10$ 秒。另，雨滴高度隨時間之變化，可以下式估之為

$$Z^{n+1} = Z^n + [W(Z^n) - u_R^n] \Delta t \quad \text{——⑨}$$

以上所述即為雨滴連續成長模式，主要在假設雨滴間無相互作用下成立，非常適用於本文研究大小不等之雨滴受終端速度估算誤差影響，而至成長特性改變的問題。

2 模擬研究

研究中，模擬起始半徑 R_0 為 0.003, 0.004, 0.005, 0.006, 0.008, 0.01, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 與 0.5 公分等 14 類大小不等之雨滴，同時自雲中離地 5 公里高度處釋放後，1 個小時內之成長與行徑情形。雨滴的終端速度則分別採用 Liu and Orville (1969), Manton and Cotton (1977), Shiino (1983), Beard (1976), V_1 與 V_2 等 6 組方程式。模擬所得，即可用以分析終端速度估算的差距，對雨滴成長與行徑的影響。

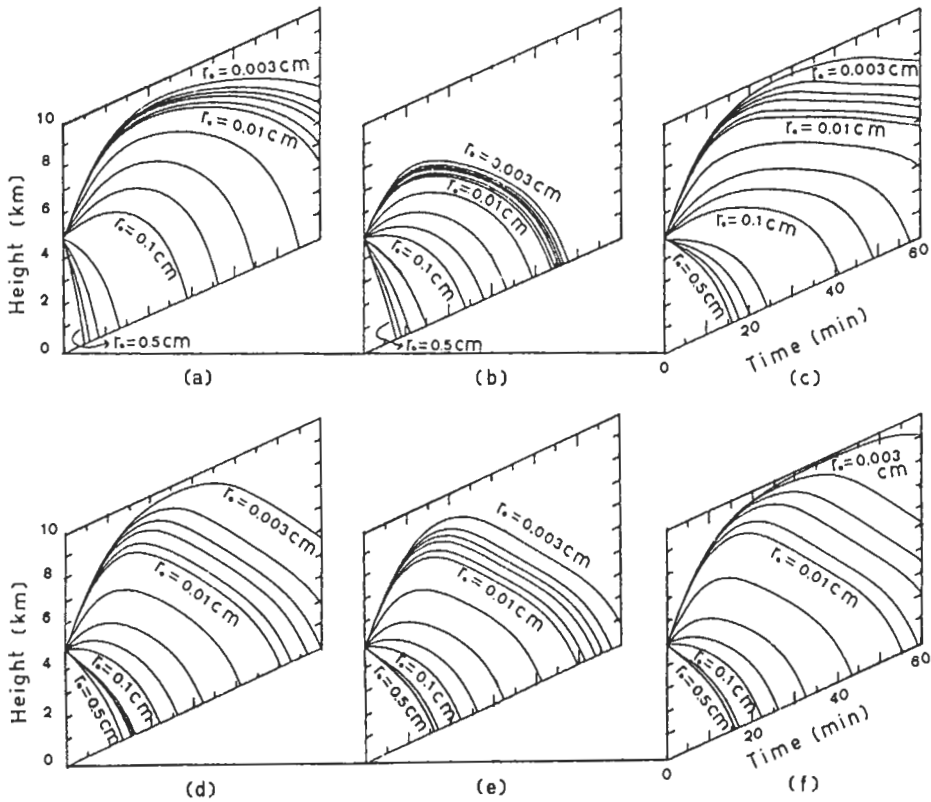
圖 4 所示即為雨滴被釋放後，其高度隨時間之改變。明顯地小雨滴之初始終端速度小，是以隨氣流上昇至高處，逐漸成長，直至其所伴隨之終端速度能克服上升氣流時，方才墜往地面。是以由釋放後到落抵地面，時間間隔長。大雨滴則由於初始終端速度大，爬升高度低，或根本不爬升直接下墜。是以由釋放後到落抵地面，時間間隔短。

仔細比較圖 4a—4f 等 6 張圖，可明顯看出採用不同之方程式估算終端速度，模擬結果確實會有所不同。最重要者即是降雨起始時間與降雨整體

時間長短。其次為雨滴行徑路線，與成長大小。圖 4 所示，降雨起始最早為 Liu and Orville 方程式所估算 $R_0 = 0.5$ cm，約僅費時 5 min 即到達地面。降雨起始最晚為 Shiino 方程式所估算 $R_0 = 0.5$ cm，需費時 16.2 min 才到達地面。其間最早與最晚，差距長達 11.2 min。由於雲的時間尺度約為 1 小時，降雨起始時間差距 11.2 min，對雲的模擬影響甚鉅。其次降雨整體時間最短暫者，為 Manton and Cotton 方程式的估算，在 47.8 min 內促使所有雨滴降落地面。降雨全部時間才約 40.1 min。反之，Shiino 方程式在估算 1 小時後，僅 $R_0 \geq 0.05$ cm 雨滴降落地面。 V_2 方程式亦促使 $R_0 = 0.003$ cm 雨滴，1 小時後停留於高度 $h = 9.1$ km 處，明顯地仍需長時間才能降落地面。此外圖 4a—4f 亦顯示同一初始雨滴，經採用不同終端速度之估算方程式，其所模擬出之行進路線差別極大。譬如圖 4b 與 4c 相比較，Manton and Cotton 方程式促使雨滴在大氣中停留短暫，Shiino 方程式則促使雨滴長期停留，是以雨滴高度對時間的變化曲率完全不同。

為確實了解終端速度估算的影響，圖 5 內分析雨滴抵達其最高點的時間 $t^{h \max}$ (圖 5a)，高度 $h \max$ (圖 5b)，與半徑大小 $R^{h \max}$ (圖 5c)，以及雨滴抵達其最低點的時間 $t^{h \min}$ (圖 5d)，高度 $h \min$ (圖 5e) 與半徑大小 $R^{h \min}$ (圖 5f)。

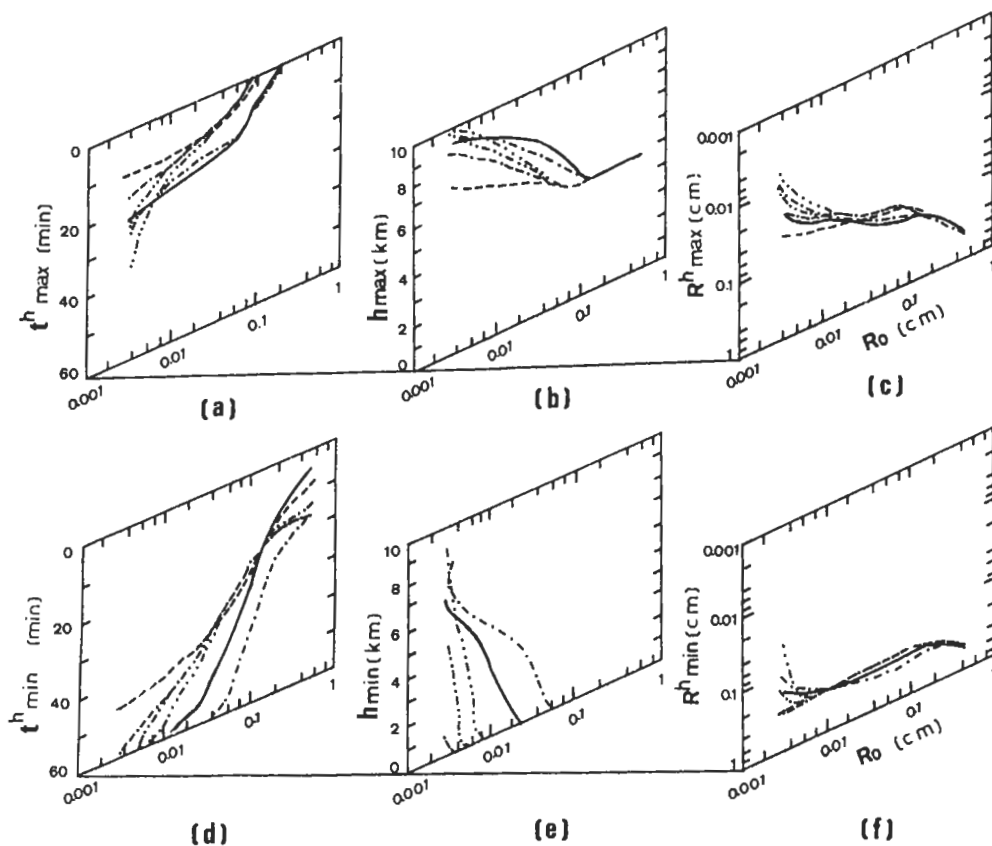
當雨滴初始半徑 R_0 大於 0.1 cm 時， V_1 與 V_2 二方程式估算之終端速度精確度高，是以模擬所得之雨滴行徑與成長特徵，可視為標準。因此，可注意到 Liu and Orville 與 Shiino 二方程式在高度大於 5 km 附近，終端速度之估計偏低，所以雨滴 $R_0 = 0.1$ cm 具上升運動，約費時 8 min 達最高點。而在墜往地面途中，Shiino 方程式低估終端速度的特徵明顯， $R_0 = 0.5$ cm 費時 16.2 min，較 V_2 方程式所需 16.0 min，差 0.2 min。而當 $R_0 = 0.1$ cm 需時 41.2 min 抵達地面，較 V_2 方程式所需 22.3 min，多費時達 18.9 min。雨滴大小亦差別明顯 (Shiino 方程



圖四：雨滴連續成長模式經採用(a)Liu and Orville (1969), (b)Manton and Cotton (1977), (c)Shiino (1983), (d)Beard (1976), (e) V_1 與(f) V_2 等水滴終端速度之經驗方程式，所模擬得之雨滴高度隨時間之變化情形。圖中雨滴起始半滴 R_0 分別為0.003, 0.004, 0.005, 0.006, 0.008, 0.01, 0.025, 0.05, 0.075, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4與0.5 cm。

式之 $R^{h_{min}} = 0.33 \text{ cm}$ ， V_2 方程式 $R^{h_{min}} = 0.24 \text{ cm}$ 。Liu and Orville 方程式在5 km 以下，有明顯之高估終端速度現象，因此當 $R_0 = 0.5 \text{ cm}$ 時，僅費時5 min 即到達地面。不過此高估現象，隨雨滴初始半徑減小而改進，當 $R_0 = 0.1 \text{ cm}$ 時反有低估現象，促使雨滴需費時29.0 min才到達地面。其餘Manton and Cotton 與Beard 二方程式均有高估終端速度現象，所造成誤差因 R_0 減小而減少。

當 R_0 介於0.01與0.1 cm時， V_2 方程式的表現恰介於所有方程式之間。此時Liu and Orville 與Shiino 二方程式，明確地持續低估雨滴終端速度，是以雨滴到達之 h_{max} 較高(圖5 b)，費時較長(圖5 a)，形成之雨滴大小 $R^{h_{max}}$ 亦較大(圖5 c)。影響所及，就是雨滴能抵達地面者少(圖5 e)，即若抵達地面亦費時長(圖5 d)，形成之雨滴由於與雲滴間之碰撞—凝結機會增加而稍大(圖5 f)。二者之間，又以Shiino方



(1 ——— , 2 - - - - , 3 - · - · - , 4 · · · · · , 5 · · · · · , 6 · · · · ·)

圖五：雨滴連續成長模式所模擬得，起始半徑 R_0 雨滴抵達最高點的 (a) 時間 $t^{h \max}$ ，(b) 高度 h_{\max} ，與 (c) 當時半徑 $R^{h \max}$ ，和抵達最低點的 (d) 時間 $t^{h \min}$ ，(e) 高度 h_{\min} ，與 (f) 當時半徑 $R^{h \min}$ 。圖中 1~6 等曲線分別表示採用 Liu and Orville (1969)，Manton and Cotton (1977)，Shiino (1983)，Beard (1976)， V_1 與 V_2 等水滴終端速度之經驗方程式。

程式低估終端速度的誤差最大（參考表三）。當 $R_0 = 0.05 \text{ cm}$ 時，需費時 57.8 min 才到達地面，較之 V_2 方程式所需 32.8 min，多費時 25.0 min。形成之雨滴大小 $R^{h \min} = 0.37 \text{ cm}$ ，亦較 V_2 方程式形成之 $R^{h \min} = 0.26 \text{ cm}$ 為大。反之，Manton and Cotton, Beard 與 V_1 方程式均

高估雨滴終端速度。其中又以 Manton and Cotton 方程式所具誤差最大，是以兩滴所抵達之 h_{\max} 高度低（圖 5 b），費時 $t^{h \max}$ 最短（圖 5 a），不過所形成之雨滴大小 $R^{h \max}$ 却非為最小，此乃因方程式⑦所估算之雨滴半徑增長率正比於終端速度之故。此外，雨滴抵達地面的時間

t^{hmax} 仍為最短，當 $R_0 = 0.01$ cm 時， $t^{hmin} = 43.8$ min，較 V_2 方程式所需之 55.5 min，提早約 11.7 min。其他如 Beard 方程式需時 50.5 min， V_1 方程式需時 49.7 min，約提早 5 min。

當 R_0 小於 0.01 cm 時，終端速度估算的誤差顯然造成極為分歧的結果。此時以 Beard 方程式的模擬結果為標準，依據二、2 節中的討論， V_2 方程式有略為低估速度的現象。但在本節模擬中，發現此低估速度現象，會造成極大的結果差別。當 $R_0 = 0.003$ cm 時， V_2 方程式造成 $t^{hmax} = 36.2$ min， $hmax = 9.9$ km， $R^{hmax} = 0.007$ cm；但 Beard 方程式造成 $hmax = 9.6$ km， $t^{hmax} = 25.7$ min， $R^{hmax} = 0.009$ cm，差別最大即在於所花費的時間 t^{hmax} （約差距 10.5 min）。1 小時模擬結束時， V_2 方程式促成兩滴之 $hmin = 9.1$ km， $R^{hmin} = 0.04$ cm；Beard 方程式則促成兩滴之 $hmin = 4.8$ km， $R^{hmin} = 0.19$ cm，差別非常明顯。至於 Liu and Orville 與 Shiino 二方程式低估終端速度的現象仍然存在，不過當 R_0 愈小，其所伴同之誤差逐漸減少。此外，Manton and Cotton 與 V_1 二方程式均有高估終端速度現象。其中，Manton and Cotton 方程式造成 $R_0 = 0.003$ cm 雨滴，在 47.8 min 後即抵達地面，當時雨滴大小約為 0.283 cm。

總結而言，若方程式低估雨滴終端速度，則雨滴將隨上升氣流抵達較高點 $hmax$ ，費時長，因此抵達最低點 $hmin$ 所需時間更長。此可以 Shiino 方程式在 $R_0 = 0.1$ cm 時，費約 41.2 min 才抵達地面，而 V_2 方程式僅需 22.3 min 為例。不過成長雨滴大小，或因雨滴行徑長而形成較大雨滴，或因終端速度估計偏低而至雨滴成長速率緩慢，無一定規例可循。大致當 $R_0 > 0.01$ cm 時，雨滴在大氣中停留愈久所形成雨滴愈大；當 $R_0 < 0.01$ cm 時，則反之，其以 V_2 方程式估算所得為最佳例。

當方程式高估雨滴終端速度時，雨滴所達最高點較低，費時亦短，是以前抵達 $hmin$ 的時間亦短。此可以 Manton and Cotton 方程式為例，其在

47.8 min 內即促使所有雨滴抵達地面。但由於成長速率正比於終端速度；是以所形成之雨滴並不因行徑短而減小。

另，當 R_0 小於 0.01 cm 時，速度估算要求的準確度極高。此乃因速度估算的微小誤差，會因雨滴停留大氣中時間長久，而至累積效應顯著，譬如 V_2 方程式在 $R_0 = 0.003$ cm 時，有低估終端速度特徵，因此成長速率小，所形成之小雨滴，又具備低之碰撞—凝結效率，因此長時間積分後，誤差累積。所以 1 小時後， $hmin = 9.1$ km， $R^{hmin} = 0.04$ cm。但標準之 Beard 方程式所作 $hmin = 4.8$ km， $R^{hmin} = 0.19$ cm，此差別若以兩滴落地時間差距表示，約為近 35~40 分鐘。

本研究採用單一雨滴經碰撞—凝結成長之連續成長模式，已明顯獲得終端速度估算的誤差，可造成雨滴降落地面提早或延遲 10~20 分鐘或更久，影響所及即是降雨整體時間縮短或延長至少 10 分鐘以上。由於雲雨的時間尺度才約 1 小時，時間誤差 10 分鐘，即為 15% 以上的模擬誤差，可謂相當嚴重。未來研究將考慮大小不等雨滴彼此間之相互作用，以及雲層中雨滴四處分布的特徵。不過，作者相信由於終端速度估算的誤差，所造成雨滴成長行為的差異，將更為明顯。

四、結論

本文分為 2 部份，1 為討論作者所發展出的雨滴終端速度之經驗方程式的精確度；1 為運用雨滴連續成長模式，分析終端速度估算的誤差，對雨滴碰撞—凝結成長之影響。

在標準大氣（1013.25 mb，20°C）下，比較附錄 1 之 10 組方程式。發現 Foote and du Toit 方程式最接近 Gunn and Kinzer 數據，但水滴直徑 d 大於 0.58 公分後，速度即急速減少，甚而轉為負值，非常不合理。此外，Beard 與 Berry and Pranger 方程式誤差亦小，但 d 趨近於 1 公分時，速度即逐漸增大或減小，均不合理。另，Liu and Orville，Manton and Cotton，

Ogura and Takahashi 與 Shiino 等方程式，均高估 Gunn and Kinzer 數據，rms 值大於 20 cm s^{-1} 。Liu and Orville 且具最大之 rms 值 172.05 cm s^{-1} 。總括而言，僅作者之 V_1 與 V_2 方程式偏離 Gunn and Kinzer 數據少，且 d 趨近於 1 公分，即趨近於常值。合乎水滴增大，所伴隨之空氣阻力亦增大，且不穩定性增強，平衡重力的增加，是以終端速度增加緩慢，而至趨近於常值的假設。

另比較此 10 組方程式對於小雨滴 ($d < 0.03$ 公分) 的速度代表性，發現 Beard 方程式滿足斯托克斯定律與 Beard and Pruppacher 數據，是以可視為標準。而 Berry and Pranger 與 V_2 方程式偏離 Beard 方程式甚小。其餘方程式中則以 Manton and Cotton 方程式偏差嚴重。

至於速度隨大氣狀況而改變的估算情形，經比較 10 組方程式與 Davies 數據後 (表三)，發現 V_1 與 V_2 方程式具相當小之誤差 rms 值。其餘 Manton and Cotton, Berry and Pranger, Foot and Du Toit, 與 Beard 方程式具高估 Davies 速度資料現象。Ogura and Takahashi 與 Shiino 方程式具低估 Davies 數據現象。Liu and Orville 方程式則平均而言低估速度隨氣壓減少而增大的現象。

終結而言，在 $d > 0.03 \text{ cm}$ 時， V_2 方程式具極高之代表性，合乎實驗數據與理論假設。而當 $d < 0.03 \text{ cm}$ 時，Beard 方程式合乎斯托克斯定律與 Berry and Pranger 數據，具相當之可信度。

第 2 部份研究採用兩滴連續成長模式，模擬 14 類大小不等的雨滴在含均勻大小雲滴的雲層內成長，並採用 6 組不同方程式估算兩滴終端速度。發現終端速度估算的差別，會明顯地造成模擬結果的不同，且差距極大。

大略而言，當雨滴起始半徑 R_0 大於 0.01 cm 時，吾人取 V_2 方程式的模擬結果為標準。若 R_0 小於 0.01 cm ，則以 Beard 方程式的模擬結果為標準。發現若雨滴速度估計偏低，則雨滴將循上升

氣流往上行進，待抵達高處，雨滴成長所伴同之終端速度克服上升氣流，方才墜往地面。但由於費時較長，因此雨滴抵達地面的時間亦較晚。譬如 Shiino 方程式估算 $R_0 = 1 \text{ cm}$ 時，需費時 41.2 min 才到達地面，較 V_2 方程式所需時間晚約 18.9 min。由於雲層發展的時間尺度才約 1 小時，晚 18.9 min，對雲雨之發展模擬影響至鉅。此外，由於速度低估，降雨的整體時間亦將延長，譬如 V_1 , V_2 , Manton and Cotton 與 Beard 等方程式所估算之 $R_0 \geq 0.01 \text{ cm}$ 雨滴，在 60 min 內皆抵達地面，但 Shiino 與 Liu and Orville 2 方程式僅估算得 $R_0 \geq 0.05 \text{ cm}$ 的雨滴到達地面。

設若雨滴速度估計偏高，則雨滴所達最高點較低，費時較少，墜落地面的時間亦早。此可以 Liu and Orville 方程式，所估算之 $R_0 = 0.5 \text{ cm}$ 雨滴，僅需時 5 min 即到達地面，而 V_2 方程式所估算者需時 16.0 min，差距約 11 min 為例。另由於速度高估，降雨的整體時間明顯縮短，譬如 Manton and Cotton 方程式在 47.8 min 內可將所有雨滴送達地面，而 V_2 方程式所估算之 $R_0 = 0.003 \text{ cm}$ 雨滴，在 1 小時後仍位於最高點 9.1 km 位置。

在 R_0 小於 0.01 cm 範圍內，各方程式之模擬結果，分歧甚大，此乃因雨滴小，終端速度小，些微的差距將影響雨滴成長速率，其誤差由於雨滴長久停留雲層中，不斷累積，而致相當明顯。譬如 Beard 方程式估算 $R_0 = 0.003 \text{ cm}$ 雨滴在釋放 1 小時後位於 4.8 公里高度， V_2 方程式所得却為 9.1 公里高度，其誤差以雨滴落地時間估之，約為 35~40 分鐘，可見相當嚴重。此外低估終端速度，造成成長速率降低，是以 V_2 方程式在 1 小時後 $R_0 = 0.003 \text{ cm}$ 雨滴長成 0.04 cm 半徑，而 Beard 方程式的估算得為半徑 0.19 cm ，其差距非常明顯。

研究中注意到雨滴在大氣中停留長久，可以形成較大雨滴，也可能反形成較小雨滴。基本上， $R_0 \geq 0.01 \text{ cm}$ 時，雨滴停留大氣愈久，與雲滴碰撞一凝結的機會增加，因此形成較大雨滴。而當

$R_0 \leq 0.01$ cm 時，雨滴在雲層中停留長久，却因終端速度太小，反致成長速率小，無法形成大雨滴。另，雨滴在雲層中停留短暫，但若終端速度大，其成長速率大，抵消碰撞—凝結機率的減少，仍可形成大雨滴。以上分析指出雨滴大小與速度的相關，對其成長過程有極大的影響。研究中發現高估或低估終端速度，可造成近10~20分鐘的降雨起始時間誤差，與10~40分鐘的降雨整體時間誤差。而雲雨的時間尺度才約1小時，10分鐘的估算誤差約佔15%的整體時間，可謂相當嚴重。

在此模擬研究中，僅考慮單一雨滴與雲滴相互作用之成長情形，並未考慮大小不等雨滴相互之作用，以及雲層內雨滴空間分布。未來將加入考慮，相信終端速度的差距，所造成模擬結果的不同，將更明顯。

誌謝

本文作者感謝美國猶他大學福田矩彥教授所給予研究上的支持，並感謝林振台先生與朱友琪小姐費心繪圖與校稿。本研究在國科會研究計劃 NSC 75-0202-M002-15 支持下完成。

附錄 1：水滴終端速度經驗方程式

| 作者 | 經驗方程式 (d: 公分; V: 公分/秒) |
|--------------------------------|---|
| (1) Liu and Orville (1969) | $V(d) = 2115 d^{0.8}$ |
| (2) Manton and Cotton (1977) | $V(d) = 2.131401738 \times \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1/2} \times \left(\frac{gd}{2}\right)^{1/2}$ 其中: ρ_0 為系數 ρ 為空氣密度 g 為重力加速度 |
| (3) Ogura and Takahashi (1973) | $V(d) = \begin{cases} 0.315 \times 10^6 d^2 & \text{for } d < 0.008 \\ 4000 \times d & \text{for } 0.008 \leq d < 0.1 \\ 1800 \times d^{0.5} & \text{for } 0.1 \leq d \end{cases}$ |
| (4) Shilno (1983) | $V(d) = \begin{cases} 0.315 \times 10^6 d^2 & \text{for } d < 0.008 \\ 2.828 \times 10^4 d^{1.5} & \text{for } 0.008 \leq d < 0.02 \\ 4000 \times d & \text{for } 0.02 \leq d < 0.122 \\ 1400 \times d^{0.5} & \text{for } 0.122 \leq d < 0.4 \\ 1065.6 \times d^{0.2} & \text{for } 0.4 \leq d \end{cases}$ |
| (5) Beetz (1950) | $V(d, \rho) = A \exp(bx) \{1 - \exp[-(d/a)^n]\}$ (A, b, a, n 等值視不同大氣狀況而異) 空氣密度 $\rho = 1.198 \text{ kg/m}^3$, 動力粘性係數 $\mu = 1.81 \times 10^{-4} \text{ poise}$, $A = 3943$, $a = 1.77$, $n = 1.147$ |
| (6) Poote and du Toit (1969) | $V(d, \rho, T) = V_0(d) \left[1 + 0.0023 \left(1.1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) (T_0 - T)\right]$ 其中: $Y = 0.43 \log_{10}(\rho_0/\rho) - 0.4 \{ \log_{10}(\rho_0/\rho) \}^{2.5}$ $V_0(d) = \sum_{j=0}^5 a_j d^j$ 則 $a_0 = -8.573154$ $a_1 = 3.3265862 \times 10^3$ $a_2 = 4.3843578 \times 10^4$ |

| | |
|------------------------------|---|
| | $a_3 = -6.8813414 \times 10^5$ $a_4 = 4.7570205 \times 10^6$ $a_5 = -1.9046601 \times 10^7$ $a_6 = 4.6329978 \times 10^7$ $a_7 = 6.7607898 \times 10^7$ $a_8 = 5.4455480 \times 10^7$ $a_9 = -1.8631087 \times 10^7$ |
| (7) Berry and Prangor (1974) | $V = S \text{Re}q / (d \cdot \rho)$ 其中: γ 為動力黏滯係數, ρ 為空氣密度。 S 為滑動修正係數, 可下式求之: $S = 1.0 + \frac{f}{d} [2.46 + 0.82 \exp(-0.44 d/f)]$ 而平均自由行程 l 為 $l = 0.812 \times 10^{-6} / \rho$ 至於雷諾數 Re , 則由下式中得之: $f_n Re = a_0 + a_1 f_n X + a_2 (f_n X)^2 + a_3 (f_n X)^3$ 其中: $X = C_0 R_0^2$, 而 C_0 則為拉佛係數, 且 $C_0 R_0^2 = \frac{8}{\pi} \times \frac{mg l}{\rho \gamma^2}$ 其中: m 為水滴質量, γ 為重力加速度 此外, $a_0 = -0.31944 \times 10^4$ $a_1 = 0.100773 \times 10^1$ $a_2 = -0.271842 \times 10^{-2}$ for $X \leq 221.358$ $a_3 = -0.223127 \times 10^{-2}$ 或 $a_0 = -0.226534 \times 10^1$ $a_1 = 0.767787 \times 10^0$ $a_2 = 0.535826 \times 10^{-2}$ for $175.270 \leq X \leq 10^7$ $a_3 = -0.763554 \times 10^{-3}$ |
| (8) Beard (1976) | (1) $0.5 \mu m \leq d_0 \leq 19 \mu m$ $V_{00} = C_1 C_{00} d_0^2$ $C_1 = \Delta \rho R_0 / 18 \pi$, $C_{00} = 1 + 2.51 f / d_0$ $f = f_0 (\tau / \rho_0) (P_0 / P) (\tau_0 / T_0)$ 則 $f_0 = 6.62 \times 10^{-6} \text{ cm}$, $P_0 = 1013.25 \text{ mb}$ $\tau_0 = 0.0001818 \text{ g cm}^{-1} \text{ s}^{-1}$, $T_0 = 293.15 \text{ K}$ (2) $19 \mu m \leq d_0 \leq 1.07 \text{ mm}$ $V_{00} = \gamma N_{R0} / (\rho d_0)$ $N_{R0} = C_{00} \exp(Y)$ $Y = b_0 + b_1 X + \dots + b_6 X^6$ $b_0 = -0.318657 \times 10^1$ $b_1 = 0.992696$ $b_2 = -0.153193 \times 10^{-2}$ $b_3 = -0.987059 \times 10^{-3}$ $b_4 = -0.578878 \times 10^{-3}$ $b_5 = 0.805176 \times 10^{-4}$ $b_6 = -0.327815 \times 10^{-5}$ $X = \log_{10}(N_{Da})$ $N_{Da} = C_2 d_0^2$ $C_2 = 4 \rho \Delta \rho R_0 / (3 \sigma^2)$ (3) $1.107 \text{ mm} \leq d_0 \leq 7 \text{ cm}$ $V_{00} = \gamma N_{R0} / (\rho d_0)$, $N_{R0} = N_p^{1/6} \exp(Y)$ $N_p = \rho^3 \rho^2 / (\tau^4 \Delta \rho R_0)$ $Y = b_0 + b_1 X + \dots + b_5 X^5$ $b_0 = -0.500015 \times 10^1$ $b_1 = 0.523778 \times 10^1$ $b_2 = -0.204914 \times 10^1$ $b_3 = 0.475294$ $b_4 = -0.542819 \times 10^{-1}$ $b_5 = 0.238449 \times 10^{-2}$ $X = \log_{10}(B_0 N_p^{1/6})$ $B_0 = C_3 d_0^2$ $C_3 = 4 \Delta \rho R_0 / 3 \sigma$ |
| (9) V ₁ | $V_1 = \bar{V}(d) \times 10^4 \left[1 + 0.0023 \left(1.1 - \frac{\rho}{\rho_0}\right) (T_0 - T)\right]$ 其中 $Y = 0.43 \log_{10}(\rho_0/\rho) - 0.4 \{ \log_{10}(\rho_0/\rho) \}^{2.5}$ $V(d) = a + \frac{b}{[1 + b \exp(c \cdot d)]}$ 則 $a = 930.231915$ $b = -2053.890722$ $c = 1.207834053$ $d = 8.513456251$ |
| (10) V ₂ | $V_2 = V_1 \times \left[1 - \frac{(1+f)}{(1+f \exp(\beta d))}\right]$ 其中 $f = -0.781662729 \rho^2 + 9.414918075 \rho - 29.69955755$ $\beta = \frac{1}{0.005} \ln \left(\frac{1+f}{1-q} - 1 \right)$ $q = 0.02453431373 \rho + 0.0429928431$ |

附錄 2：曲線函數比

Gunn and Kinzer (1949) 數據可以下式表示：

$$V(d) = \frac{a}{1 + e^{b(d-c)}} + \alpha \quad \text{---①}$$

若自數據曲線中任意取得 3 點 (V_1, d_1) , (V_2, d_2) 和 (V_3, d_3) , 使 $(d_1 - d_2) / (d_2 - d_3) = 1$ 。吾人即可正確地解出 a, b, c 與 α 之值。使 $V(d)$ 函數在 d_1, d_2 和 d_3 三點上, 代表正確之 V_1, V_2 與 V_3 之值, 並使 $V(d)$ 函數趨近於數據曲線。再由無數的三點組合所構成之無數可能曲線函數中, 選挑出最代表整個曲線之函數。至於解 a, b, c 與 α , 首先需解 α 。

$$\alpha = \frac{\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3}}{2\alpha_1} \quad \text{---②}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= a_3 b_0 - (a_3 V_2 - a_2) b_1 - b_2 a_1 \\ &\quad + b_3 (a_1 V_3 - a_0) \\ \alpha_2 &= b_2 (a_1 V_3 - a_0) + a_0 V_3 b_3 - (a_3 V_2 \\ &\quad - a_2) b_0 - a_2 V_2 b_1 \quad \text{---③} \\ \alpha_3 &= a_0 V_3 b_2 - a_2 V_2 b_0 \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} a_0 &= V_2^2 - V_1 V_3 \\ a_1 &= V_1 - V_3 - 2V_2 = b_1 \\ a_2 &= V_3^2 - V_1 V_4 \\ a_3 &= V_1 + V_4 - 2V_3 = b_3 \\ b_0 &= V_2 V_3 + V_1 V_2 - 2V_1 V_3 \\ b_2 &= V_3 V_4 + V_1 V_3 - V_1 V_4 \end{aligned} \quad \text{---④}$$

此後, 即可得

$$a = \left[\frac{1}{V_1 - \alpha} + \frac{1}{V_3 - \alpha} - \frac{2}{V_2 - \alpha} \right] \\ \left/ \left[\frac{1}{(V_1 - \alpha)(V_3 - \alpha)} \right] \right.$$

$$- \frac{1}{(V_2 - \alpha)^2} \quad \text{---⑤}$$

然後, 可解得 b 為

$$b = \ln \left[\left(\frac{a}{V_2 - \alpha} - 1 \right) / \left(\frac{a}{V_3 - \alpha} - 1 \right) \right] / (d_2 - d_3) \quad \text{---⑥}$$

與

$$c = d_1 - \frac{1}{b} \ln \left(\frac{a}{V_1 - \alpha} - 1 \right) \quad \text{---⑦}$$

參考文獻

柳中明, 1986: 方程式化水滴終端速度, 第四屆全國大氣科學學術研討會論文集編。p.634 - 643

Almeida, F.C. de, and R.D. Dennett, 1980: An analysis of two schemes to numerically solve the stochastic collection growth equation. *J. Atmos. Sci.*, 37, 2707-2711.

Beard, K.V. 1976: Terminal velocity and shape of cloud and precipitation drops aloft. *J. Atmos. Sci.*, 33, 851-864.

-----, and H.R. Pruppacher, 1969: A determination of the terminal velocity and drag of small water drops by means of a wind tunnel. *J. Atmos. Sci.*, 26, 1066-1072.

-----, and H.T. Ochs, 1983: Measured collection efficiencies for cloud drops. *J. Atmos. Sci.*, 40, 145-153.

-----, and -----, 1984: Collection and coalescence efficiencies for Accretion. *J. Geophys. Res.*, 89, 7165-7169.

-----, ----- and T.S. Tung, 1979: A measurement of the efficiency for collection between cloud drops. *J. Atmos. Sci.*, 36, 2479-2483.

Berry, E.X., 1967: Cloud droplet growth by collection. *J. Atmos. Sci.*, 24, 688-701.

- , and M.R. Pranger, 1974: Equations for calculating the terminal velocities of water drops. *J. Appl. Meteor.*, 13, 108-113.
- , and R.L. Reinhardt, 1974a: An analysis of cloud drop growth by collection: Part I. Double distributions. *J. Atmos. Sci.*, 31, 1814-1824.
- , and -----, 1974b: An analysis of cloud drop growth by collection: Part II. Single initial distributions. *J. Atmos. Sci.*, 31, 1825-1831.
- Best, A.C., 1950: Empirical formulae for the terminal velocity of water drops falling through the atmosphere. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 76, 302-311.
- Bleck, R., 1970: A fast approximate method for integrating the stochastic coalescence equation. *J. Geophys. Res.*, 75, 5165-5171.
- Davies, C.N., 1942: Unpublished Ministry of supply reports quoted by Sutton in Air Ministry report, M.R.P. No. 40.
- Fletcher, N.H., 1962: *The physics of Rainclouds*. Cambridge University Press, 368pp.
- Foote, G.B., and P.S. du Tort, 1969: Terminal velocities of raindrops aloft. *J. Appl. Meteor.*, 8, 249-253.
- Gunn, R., and G.D. Kinzer, 1949: The terminal velocity of fall for water drops in stagnant air. *J. Meteor.*, 6, 243-248.
- Hall, W.D., 1980: A detailed microphysical model within a two-dimensional dynamic framework: model description and preliminary results. *J. Atmos. Sci.*, 37, 2486-2507.
- Liu, J.Y., and H.D. Orville, 1969: Numerical modeling of precipitation and cloud shadow effects on mountain-induced cumuli. *J. Atmos. Sci.*, 26, 1283-1298.
- Manton, M.J., and W.R. Cotton, 1977: Formulation of approximate equations for modeling moist deep convection on the mesoscale. *Atmos. Sci.*, Paper No. 266, Dept. of Atmos. Sci., Colo. St. Univ., Ft. Collins.
- Melzak, A. Z., and W. Hitschfeld, 1953: A mathematical treatment of random coalescence. McGill University, Stormy Weather Group Rep. MW-11, 28pp.
- Ochs, H.T., and K.V. Beard, 1984: Laboratory Measurements of collection efficiencies for accretion. *J. Atmos. Sci.*, 41, 863-867.
- Ogura, Y., and T. Takahashi, 1973: The development of warm rain in a cumulus model. *J. Atmos. Sci.*, 30, 262-277.
- Pruppacher, H.R., and J.D. Klett, 1978: *Microphysics of clouds and precipitation*. D. Reidel Publishing Company, 714pp.
- Rogers, R.R., 1979: *A short course in cloud physics*. Pergamon press, 235pp.
- Shiino, J.I., 1983: Evolution of raindrops in an axisymmetric cumulus model. Part I. Comparison of the parameterized. *J. Meteor. Soc. Japan*, 61, 629-655.
- Soong, S.-T., 1974: Numerical simulation of warm rain development in an axisymmetric cloud model. *J. Atmos. Sci.*, 31, 1262-1285.
- Srivastava, R.C., 1971: Size distribution of raindrops generated by their breaking and coalescence. *J. Atmos. Sci.*, 28, 410-415.
- Takahashi, T., 1975: Tropical showers in an axisymmetric cloud model. *J. Atmos. Sci.*, 32, 1318-1330.
- , 1976: Warm rain, giant nuclei and chemical balance—a numerical model. *J. Atmos. Sci.*, 33, 269-286.
- , 1981: Warm rain development in a three-dimensional cloud model. *J. Atmos. Sci.*, 38, 1991-2013.
- Telford, J., 1955: A new aspect of coalescence theory. *J. Meteor.*, 12, 436-444.
- Wilhelmson, R., and Y. Ogura, 1972: The pressure perturbation and the numerical modeling of a cloud. *J. Atmos. Sci.*, 29, 1295-1307.
- Young, K.C., 1975: The evolution of drop spectra due to condensation, coalescence and Breakup. *J. Atmos. Sci.*, 32, 965-973.

RAINDROP GROWTH AND TERMINAL VELOCITY

*C. M. Liu*Department of Atmospheric Sciences
National Taiwan University

(Manuscript received October 4, 1986; in final form December 22, 1986)

ABSTRACT

This research contains two parts. The first part concentrates on analyzing the accuracy of the empirical equations of the drop terminal velocity developed by the author. After comparing the equation with eight other different empirical equations and the experimental data, the V_2 equation is found to have reasonable accuracy and has the tendency to generate constant terminal velocity for large-sized drops.

The second part is resulted from the raindrop growth simulation by the continuous growth model. The results suggest that the estimation of the drop terminal velocity has significant impact on the behavior of the drop growth. The differences appear mainly in the rainfall starting time and the rainfall period, which has at least 10-20 min difference. Since the life cycle of cloud is about 1 hr, 10-20 min error represents 15% simulation error.