

# 單調內插格式對半拉格朗日法 影響的數值研究

謝銘恩 許武榮 侯昭平

國立台灣大學大氣科學系

(中華民國九十四年二月三日收稿；中華民國九十四年八月八日定稿)

## 摘 要

在半拉格朗日法(semi-Lagrangian scheme)計算的過程中，當被平流量的梯度很重要或被平流量為正定量時，使用高次多項式內插所產生的非物理性雜波會造成很大的誤差，甚至可能引發不穩定。因此在被平流量為單調時，如能確保內插結果的單調性，則可避免此誤差來源。本文發展一判斷單調性以修正內插值的方法，並以一至三維方式作理想個案測試，同時與 Sun et al.與 Nair et al.的方法比較，以評估其效果差異。在以二維旋轉風場平流方形波的測試中，使用不同單調方法的結果顯示不加單調性修正時，高階內插造成的雜波充滿了整個積分區域，而使用新法能有效地去除所有雜訊。以三維旋轉風場平流方形波的測試，則發現新法的對稱性佳，overshooting 也最小。在二維變形場平流圓錐的測試中，短時間的數值解與 Staniforth and Côté 得到的解析解相當接近；而在長時間積分的測試中，使用新法降低了由於使用三次樣條函數導致的不穩定度。由於本文使用的三種判斷單調性方式，在計算上相當簡單，而且能夠容易地加入像 cascade 法(Purser and Leslie)或者方向分離法這樣一系列的一維內插中，因而適用於三維的數值模擬中。

關鍵詞：半拉格朗日法、單調格式。

## 一、前 言

近年來半拉格朗日平流方法(semi-Lagrangian advection scheme)在大氣模擬上受到矚目(Staniforth and Côté 1991)，因其數值穩定度不受時間步長(time step)的大小影響，可使用較大的時間步長以提高計算效率。古典的半拉格

朗日法計算程序為，首先求取網格處流體在前一時間層(time level)的出發點(departure point)位置，此步驟必須求解常微分方程組  $\frac{d\bar{x}}{dt} = \bar{v}$ ；接下來由內插公式得到出發點上被平流量  $f$  的值，然後沿其軌跡作時間積分  $\frac{df}{dt} = F(\bar{x}, t)$ ，其中  $F(\bar{x}, t)$  表示被平流量的外力強迫。

在求解出發點位置時，許多不同的方法被

提出(McDonald 1987, Tanguay et al. 1989), 然而這些方法都需要作疊代(iteration), 每次疊代又包括了風場的內插計算, 因此不僅需要較多計算, 也增加了數值穩定度的限制。Purser and Leslie (1991)設計一個簡明的方式將高維內插降(cascade)至一系列的一維內插, 其文中討論到使用和古典半拉格朗日法時間積分方向相反的向前積分(forward integration)的可能性; 並指出他們的 cascade 法在使用向前積分時的計算程式比向後積分的更簡單。在 Purser and Leslie (1994)也說明如何使用較精確的數值方法求得到達點(arrival point)位置, 之後 Sun and Yeh (1997)與 Nair et al. (1999)均根據他們的 cascade 法發展類似的向前積分半拉格朗日法。

關於被平流量的內插方法, 三次內插被認為是在計算時間與振幅、相位之間達到良好平衡的選擇(McDonald 1984)。根據許多研究結果(McDonald 1984, Rood 1987, Leonard 2002)顯示, 奇數次內插的相位誤差通常較偶數次內插小, 且奇數次內插的相位誤差甚至比其高一次的偶數次內插還小。另一個常用的函數是三次樣條函數(cubic spline), 此內插函數具有在所有三次內插多項式中最平滑的特性, 且其零至二次導數均連續, 應用於平流計算的例子如 Purnell (1976)、Bermejo (1990)等。在 Sun et al. (1996)的測試中, 三次樣條函數的精確度甚至比 Lagrange 五次多項式還高, 雖然在某些個案會產生不穩定(Huang 1994, Sun et al. 1996)。

然而使用高次多項式內插常產生非物理性的雜波, 當被平流量的梯度很重要或被平流量為正定量時, 這是模式誤差一個很大的來源, 甚至可能引發不穩定。解決此問題的主要方式有二: 一者是設計特殊的內插運算元(interpolator), 例如 Williamson and Rasch

(1989), Holnicki (1995)等; 或者對內插結果作修正, 相當於使用濾波器(filter) 過濾掉這些雜波, 如 Bermejo and Staniforth (1992), Sun et al. (1996), 張與曾(1998), Nair et al. (1999)等。本文的目的為提出一個新的濾波方法, 在一至三維個案作理想測試, 同時與 Sun et al. (1996)與 Nair et al. (1999)的方法比較, 以瞭解這些單調格式的效果差異。

## 二、單調內插格式

對於具較大梯度或不連續分佈的被平流量來說, 半拉格朗日法的內插過程會產生非物理性波動, 且內插階數越高此現象越明顯。其原因在於使用高次內插時需要較多節點的資訊來計算多項式係數, 即局部係數會受到較遠的值影響。在較大梯度存在時, 此梯度處與其附近相對來說梯度較小處的值會彼此影響內插係數, 使內插函數產生振盪, 造成在被內插量單調增加或單調減少的區域, 可能會得到非單調的內插函數。因此若使用能夠確保單調性的內插方法, 對維持其分佈的形狀有很大的幫助。

使用本質上單調的(intrinsically monotonic)函數來內插, 似乎會在很短時間內減弱原分佈的強梯度(Holnicki 1995)。在數值分析上也有許多研究討論如何建構單調的內插方法, 如 Fritsch and Carlson (1980), Akima (1991), Huynh (1993), Lavery (2000), Cheng et al. (2002)等。上述研究提出的方法中有些具有容易計算的優點, 但是如果像半拉格朗日法這樣地重複地進行內插, 其耗散程度相當快。其原因是這些方法對於高次內插會產生振盪的情況, 傾向於在梯度較大處附近調整內插多項式到較平坦(flat)的形狀, 以維持原變數分佈的單調性, 此舉雖使內插得到的值不需要另作修正以得到較合乎

幾何分佈的值，但會使此梯度減緩，與使用線性內插的情形類似。另外，以上所提及的論文中，部分研究爲了同時滿足單調性以及某些連續性，必須以大量計算來求得最佳內插係數，如應用於需要多次內插計算的半拉格朗日法會降低計算效率，因此以下不再探討此類型的方法。

本文發展的單調內插格式之計算方式爲先使用高階多項式內插，再就內插得到的結果作修正。Bermejo and Staniforth (1992)提出一個準單調半拉格朗日法 (quasi-monotone semi-Lagrangian, QMSL)，利用低階內插能維持單調的特性，將高階內插的結果參考低階內插值作調整：若高階計算值超出局部極值，則視爲違反單調性而調整到低階內插值。QMSL 法的優點是容易加入原來的半拉格朗日法中，且可抑制內插造成的雜訊，但缺點是其數值擴散較大（尤其在非單調處，例如在局部極值位置上）。張與曾(1998)比較原始半拉格朗日法與 QMSL 法、Holnicki(1995)的方法，認爲雖然 QMSL 法的質量維持較差，但總誤差是三種方法中最小的；就計算效率上看 QMSL 法亦優於 Holnicki(1995)法。

Sun et al. (1996) 則進一步改進 QMSL 法，考慮圖 1(a)之分佈， $x_k \in [x_i, x_{i+1}]$  爲欲求內插值的位置，因區間  $[x_i, x_{i+1}]$  之左右兩區間（即  $[x_{i-1}, x_i]$  與  $[x_{i+1}, x_{i+2}]$ ）中被內插函數的線性斜率同號，因此判斷  $[x_i, x_{i+1}]$  爲單調區間，即此處無局部極值。內插函數如果與圖中實線一樣在此區間違反單調性，則在  $x_k$  的內插值必須修正到滿足單調性，即把違反單調性的內插值修正到與區間端點極值一樣，在圖 1(a)的例子是將  $x_k$  的內插值下修到和在  $x_{i+1}$  的函數值相同。

在圖 1(b)的例子則相反，因爲區間  $[x_i, x_{i+1}]$  的左右兩區間的斜率異號，代表在此區間有局部極值，因此不予更動。最後再限制內插值在全域 (global) 的最大值及最小值之間。因爲 QMSL 法將所有內插值限制於局部區域的極大值和極小值之間，這種作法會無法解析出原分佈具有的局部極值。如張與曾(1998)中使用 QMSL 法的缺口圓柱實驗中，旋轉六圈後其缺口已被填滿（見其圖 4）；而 Sun and Yeh(1997)的實驗則顯示缺口的形狀及最低點部分的值維持得相當好（見其圖 3c）。

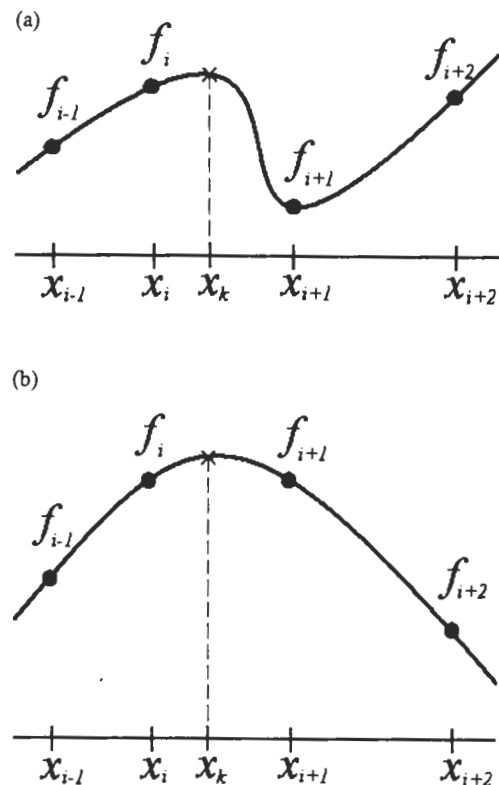


圖 1 單調性限制示意圖。欲內插的目標位置  $x_k$  位於區間  $[x_i, x_{i+1}]$  內，(a)與(b)分別代表函數分佈在此區間內爲單調與有局部最大值的情形。

Nair et al. (1999)認爲判斷局部極值的標準應更嚴格些。他們認爲除了欲判斷區間的兩相

鄰區間斜率異號外，兩端還需要再各向外延伸一個區間，即在此區間的兩端此函數均為單調（斜率同號），才認定此區間內有函數極值（詳見 Nair et al. 之圖 2）。圖 2 是使用這兩個單調性限制條件的例子，圖 2(a)中的實圓點與實線分別為已知函數值與高階內插函數，圈號是內

插得到的結果，由圖中可以清楚看到雖然函數值僅有些微擾動，但高階內插可能得到相當振盪的函數形狀。圖 2(b)中之圈號及叉號分別為使用 Sun et al. (1996)及 Nair et al. (1999)方法的結果，由此可以看出 Nair et al. (1999)的方法把區間  $[x_i, x_{i+1}]$  認定為單調區間，而 Sun et al. (1996)的方法則否。直觀而論，Nair et al. (1999)的方法去除了較多的短波，而 Sun et al. (1996)的方法則保留了波長大於兩個格距的擾動，我們稍後將會測試這個問題。

本文則提出一個新的方式來判斷一區間是否需要作內插值的修正。本方法是基於幾何形狀的觀點設計的，設定欲判斷的區間如果滿足：兩個端點的內插多項式斜率分別在各自相鄰區間斜率之間，則不作「局部」修正，但仍要限制內插值落在全域的極大極小值之間。圖 3 為

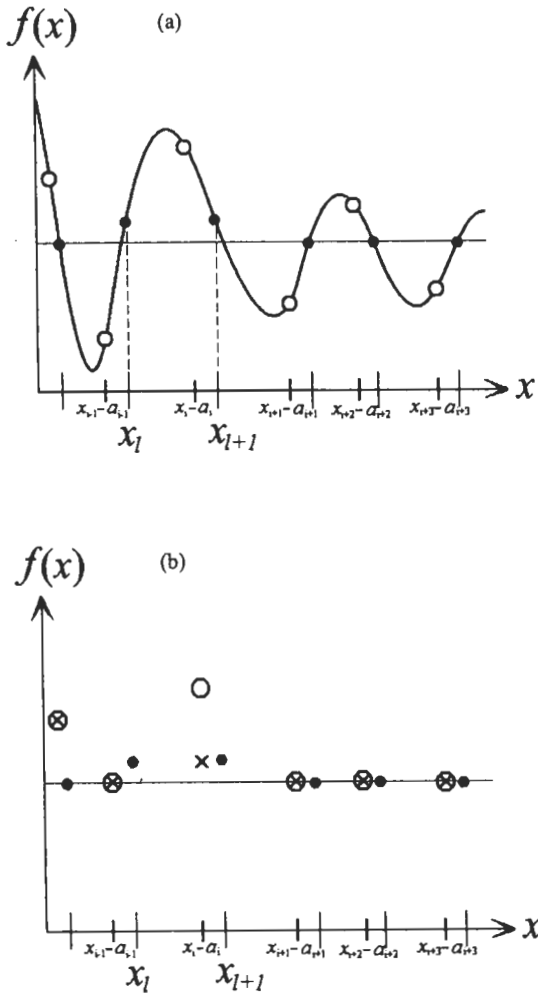


圖 2 Sun et al. (1996)單調性限制的缺點示意圖。(a)中實圓點是前一個時間的被平流量位置及數值，圈號為使用高次多項式得到的內插結果；(b)為 Nair et al. (1999)文中判斷局部極值的方式；(c)中的圈號及叉號分別為使用 Sun et al. (1996)與 Nair et al. (1999)方法的結果。此例中，在區間  $[x_i, x_{i+1}]$  內兩方法得到不同的結果。

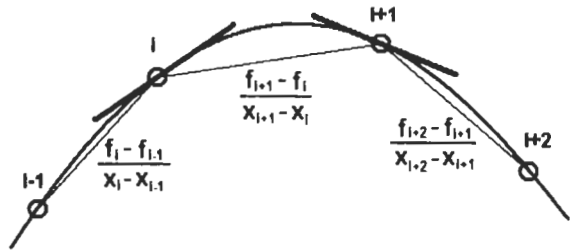


圖 3 內插多項式斜率與左右區間線性斜率的關係。在  $i$  與  $i+1$  處的粗直線代表多項式計算得到的函數變化率，連接兩相鄰空圈（節點）的細直線下的比值代表此線斜率。此圖係本文所提出方法之不作局部修正條件的例子，詳見式(1)。

本方法之不作局部修正的例子，在  $i$  與  $i+1$  處的粗直線代表多項式計算得到的函數變化率，連接兩相鄰空圈（節點）的細直線下的比值代表此線斜率，則此條件可用數學式表示為：

$$\begin{aligned} \min(f[x_{i-1}, x_i], f[x_i, x_{i+1}]) \leq f'(x_i) \leq \max(f[x_{i-1}, x_i], f[x_i, x_{i+1}]) \\ \min(f[x_i, x_{i+1}], f[x_{i+1}, x_{i+2}]) \leq f'(x_{i+1}) \leq \max(f[x_i, x_{i+1}], f[x_{i+1}, x_{i+2}]) \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $f[x_{i-1}, x_i] = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$ ,  $f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f_{i+1} - f_i}{x_{i+1} - x_i}$ ,  $f[x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f_{i+2} - f_{i+1}}{x_{i+2} - x_{i+1}}$ ,  $f'(x_i)$  由內插函數求得。

此外，本文測試的單調格式與 QMSL 法在應用上的限制也不同。在高維模擬中使用 QMSL 法尋找局部極值時，必須考慮多維度空間鄰近區域（二維長方形或三維立方體內）的數值；而本文使用的這些方法必須判斷區間是否為單調，因此僅能應用於一維的情形。所以若要將本文的方法應用於大氣模式中，必須使用將高維內插降至一系列一維內插的策略，例如 Purser and Leslie(1991)的 cascade 法或 Sun and Yeh(1997) 及 Nair et al.(1999)的方法等。

### 三、數值實驗結果與討論

以下數值實驗均考慮無外力強迫的線性平流方程，使用向前的半拉格朗日法積分，並使用運動軌跡的解析解來得到到達點位置，以瞭解內插及單調性限制的影響。內插多項式使用

三次樣條函數，二維以上的內插則使用 Nair et al. (1999)的方法將高維內插降至一系列的一維內插。採用 Takacs (1985)的方法計算總誤差  $E_{tot}$ 、耗散誤差  $E_{diss}$  及頻散誤差  $E_{disp}$ ，來比較不同單調性限制方法的差異。此三誤差量關係為  $E_{tot} = E_{diss} + E_{disp}$ ，其中  $E_{diss} = [\sigma(f) - \sigma(F)]^2 + (\bar{f} - \bar{F})^2$ ， $E_{disp} = 2(1 - \rho)\sigma(f)\sigma(F)$ ， $f$  為真實解， $F$  為數值解， $\bar{f}$ 、 $\bar{F}$  分別表示兩者平均值， $\sigma$  為標準差， $\rho$  為相關係數；以下實驗數據列表中的總質量比代表所有網格點函數值之和與各測試初始值之和的比值，總能量比分別代表所有網格點函數值之平方和與各測試初始值之平方和的比值。實驗中使用的單調性限制方法定義如表一所示，A 法不使用任何單調性限制，B、C、D 法分別為使用 Sun et al. (1996)、Nair et al. (1999)

表一 單調性限制方法一覽。

方法簡稱	是否使用 Sun et al.(1996)或 Nair et al.(1999)之判斷條件	是否使用本文第二節方程式(1)之判斷條件
A	×	×
B	使用 Sun et al.(1996)	×
C	使用 Nair et al.(1999)	×
D	×	○
E	使用 Sun et al.(1996)	○
F	使用 Nair et al.(1999)	○

表二 波長  $L = 8\Delta x, 6\Delta x$  的正弦波積分 40 個時步的結果。

波長	最大值	最小值	耗散誤差	頻散誤差	總誤差
$8\Delta x$	0.9585	-0.9585	8.6268e-4	1.6071e-5	8.7875e-4
$6\Delta x$	0.8606	-0.8605	9.7027e-3	3.0418e-4	1.0007e-2

表三 波長  $L = 4\Delta x$  的正弦波積分 40 個時步的結果。

單調性	最大值	最小值	耗散誤差	頻散誤差	總誤差
A 及 B	0.3471	-3.4815	0.2067	1.0821e-2	0.2175
C	6.0146e-2	-2.9264e-2	0.4744	4.3496e-2	0.4787
D	0.3043	-0.3110	0.2463	6.6137e-3	0.2529

表四 波長  $L = 2\Delta x$  的正弦波積分 40 個時步的結果。

單調性	最大值	最小值	耗散誤差	頻散誤差	總誤差
A	3.3078e-5	-3.3203e-5	0.9999674	3.1212e-5	0.9999986
B	3.2263e-5	-3.2272e-5	0.9999703	2.7821e-5	0.9999981
C	3.2294e-5	-3.2356e-5	0.9999705	2.7596e-5	0.9999981
D	3.30780e-5	-3.3201e-5	0.9999674	3.1204e-5	0.9999986

及本文提出的方法，E 及 F 法則為合併使用本文的方法與 Sun et al. (1996)或 Nair et al. (1999)的方法。以下均使用簡稱代表所使用的方法。

(一) 一維正弦波，均勻風場

考慮一維均勻風場  $u=1$ ，積分區域為 601 點，格距  $\Delta x = 1/6$ ，時步  $\Delta t = 0.1$ ，所有模擬總時間均為 40 個時步，即 40 次內插，被平流量為  $\sin(2\pi x/L)$  ( $L$  為波長)，採週期性邊界條件，模擬結果數據如表二到四。由表二，對於波長為  $8\Delta x$  和  $6\Delta x$  的正弦波來說，數值解的耗散來自三次樣條函數本身，使用不同單調判斷法得到的解完全相同，所以這些方法並不會對長波產生額外的衰減。由表三，對於波長為  $4\Delta x$  的正弦波，B 法仍不改變內插結果，但 C 法耗散較明顯，D 法的耗散則稍大於 B 法。由表四，對於波長  $2\Delta x$  的正弦波來說，三次樣條內插的耗散相當大，在幾次內插後振幅即大幅減少，因此表四中數值差異僅由邊界條件及計算誤差造成之內部微弱結構的差別造成。綜合以上結果可知 C 法相較於 B 與 D 法而言，過濾了更多的波長大於  $2\Delta x$  的波動。

(二) 一維方形波，均勻風場

方形波(square wave)常被用以測試平流方法的優劣，在高階方法的測試中，因為被平流量的本身不連續，因此在不連續處附近必定會出現非物理性波動(overshooting and undershooting)。在一些改進方法的測試中，通常定義全域的最大值及最小值為方形波的上下平坦處的值，因此可以得到較好的結果。在本文的測試中為了討論不同單調性條件的影響，因此並未對全域的極值加以設限。

考慮一維均勻風場  $u = 1$ ，積分區域為 101 點，格距  $\Delta x = 1$ ，時步  $\Delta t = 0.1$ ，採週期性邊界條件，被平流量初始分佈如圖 4 中細實線所示：

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 35 \leq x \leq 36 \quad \text{or} \quad 39 \leq x \leq 40 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

圖 4(a)、(b)分別為積分 1000 及 10000 個時步的結果。由圖 4(a)可知在短時間內，由於 B 法過濾較少的短波，因此初始僅由兩個網格點解析出的「凹槽」尚未完全被數值擴散所填滿；而

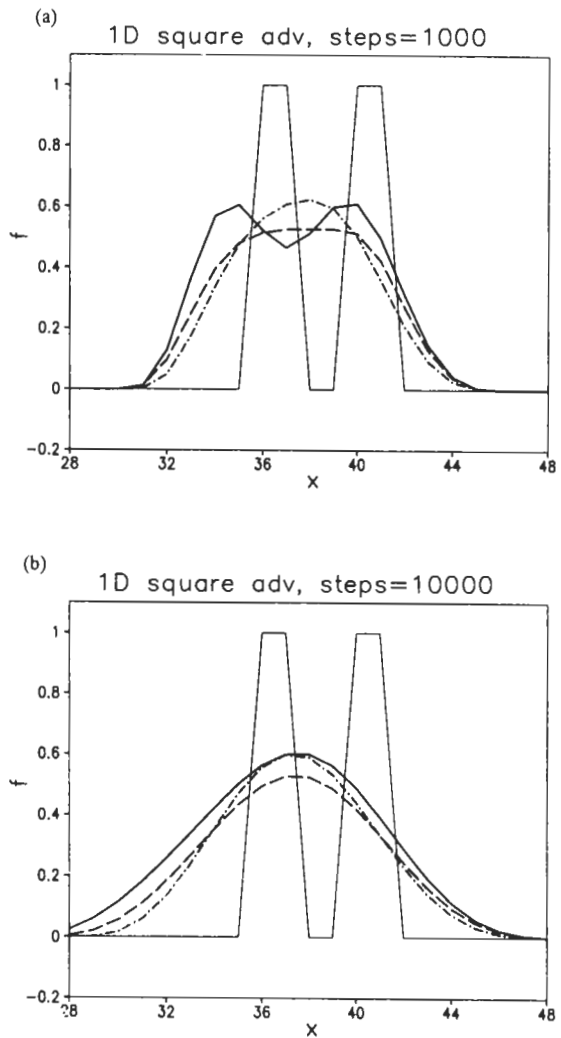


圖 4 一維方形波積分(a)1000 及(b)10000 個時步的結果。圖中細實線為解析解，B、C、D 法分別為粗實線、點虛線、虛線。

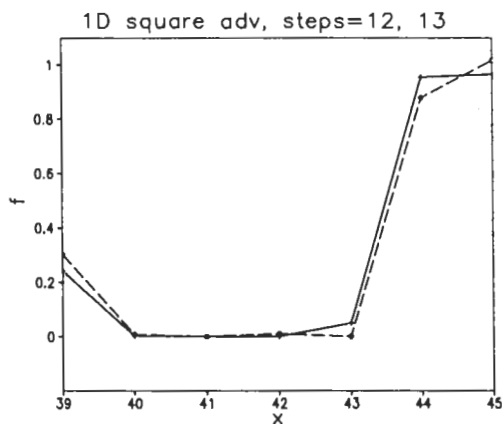
圖 4(b)中積分較長時間的結果顯示，像這樣小尺度的現象已被平滑掉，而 D 法的數值擴散略大於 B、C 法。

接下來如圖 5(c)細實線所示，將此「凹槽」尺度加大，測試此小尺度現象是否能夠維持：

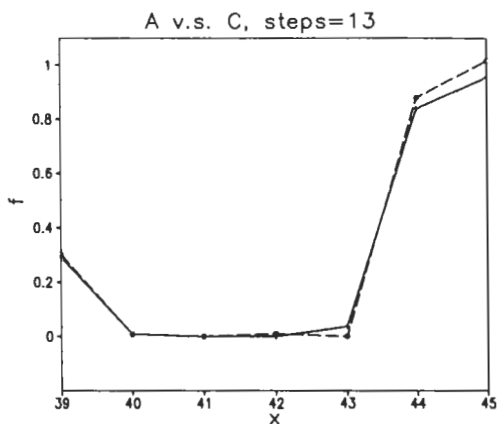
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } 35 \leq x \leq 36 \quad \text{or} \quad 42 \leq x \leq 43 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

圖 5(a)中實線與虛線分別為第 12 及 13 個時步，使用 B 法的結果，可看到在  $x = 43$  處出現了 undershooting，為探討其原因，將第 12 個時步的局部放大如圖 6。由圖 6 可知不論由 B 或 C 法均會將區間[42,43]判斷為具局部最小值，但由內插得到之節點斜率即可看出，不符合視覺上由節點函數值推估的函數分佈幾何形狀。因

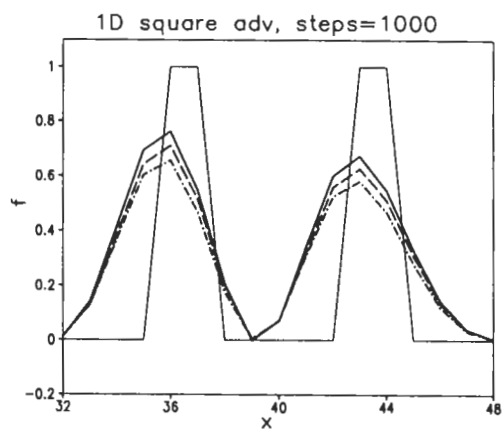
(a)



(b)



(c)



(d)

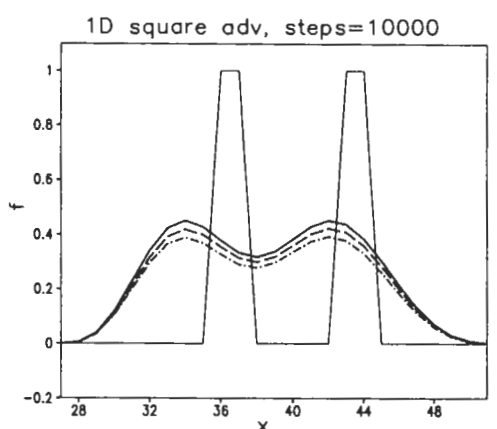


圖 5 一維方形波積分(a)第 12 及 13 個時步，(b)第 13 個時步，(c)1000 個時步，(d)10000 個時步的結果。(a)中為使用 B 法的結果，第 12 及 13 個時步分別為虛線和實線；(b)中為使用 B 法和 D 法的結果，分別為實線和虛線；(c)、(d)中細實線為解析解，B、C、D 法分別為粗實線、點虛線、虛線。



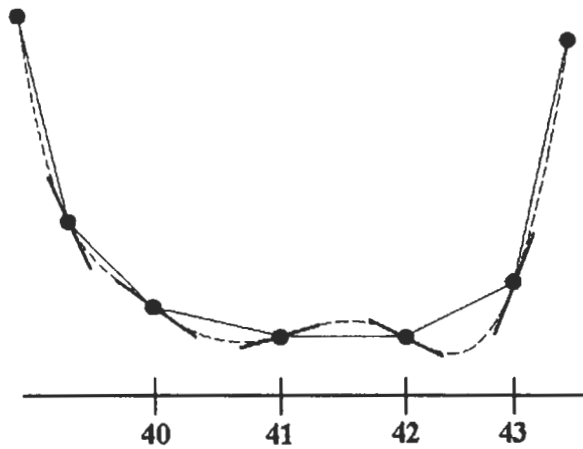


圖 6 一維方形波測試中由於 B 法造成的 undershooting。圖中虛線代表內插多項式，粗直線代表多項式計算得到的函數變化率，連接兩相鄰節點的細直線斜率則為區間的平均函數變化率。

此若使用 D 法，由圖 5(b)中第 13 個時步結果，實線 (B 法) 有 undershooting，而虛線 (D 法) 則無。圖 5(c)與(d)為積分 1000 和 10000 個時步的結果，可以看到前面提到 B 與 C 法會造成的 undershooting 在之後會衰減掉，然而這種情形

仍然需要避免，尤其在全域最大最小值無法精確得知的時候。

### (三) 二維方形波，旋轉風場

在二維的測試中，積分區域為  $[0,60] \times [0,60]$ ，時步  $\Delta t = 1$ ，兩維度格距均為 1，使用等角速度旋轉風場，角速度  $\Omega = \frac{\pi}{72}$ ，旋轉中心為積分區域中心，因此旋轉一周需要 144 個時步，採固定邊界條件。初始場為：

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{if } 25 \leq x \leq 35, 10 \leq y \leq 20 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

圖 7 為使用不同單調方法，旋轉兩周的結果。由圖中可清楚看到在不加單調性修正時，高階內插造成的雜波充滿了整個積分區域，B 與 C 法成功的去除了大部分雜訊，而 D 法的效果甚至比這兩種方法更好，但三者均存在未完全去除的部分；而在 E 與 F 法的情形均良好地去除了所有雜訊。各項統計數據如表五，可看到在全域最大最小值不設限的情況下，每種方法均

表五 二維方形波旋轉兩圈的統計數據。其中最後四列是 Sun et al. (1996)的數據，其代號分別代表使用的內插法：三次樣條、拉格朗日 3、5、7 次多項式。

單調性	最大值	最小值	總質量比	總能量比	總誤差的平方根
A	1.1295	-8.2142e-2	1.0003	0.8761	5.1912e-2
B	1.0891	-4.6874e-2	1.0162	0.8363	5.6107e-2
C	1.0606	-3.5414e-2	1.0196	0.8097	5.7397e-2
D	1.0015	-7.8695e-8	1.0186	0.7745	5.8514e-2
E	1.0016	0	1.0187	0.7745	5.8516e-2
F	1.0016	0	1.0187	0.7746	5.8508e-2
CSPL	1	0	1.022		5.9e-2
LAG3	1	0	1.045		7.6e-2
LAG5	1	0	1.032		6.2e-2
LAG7	0.999	0	1.026		5.6e-2

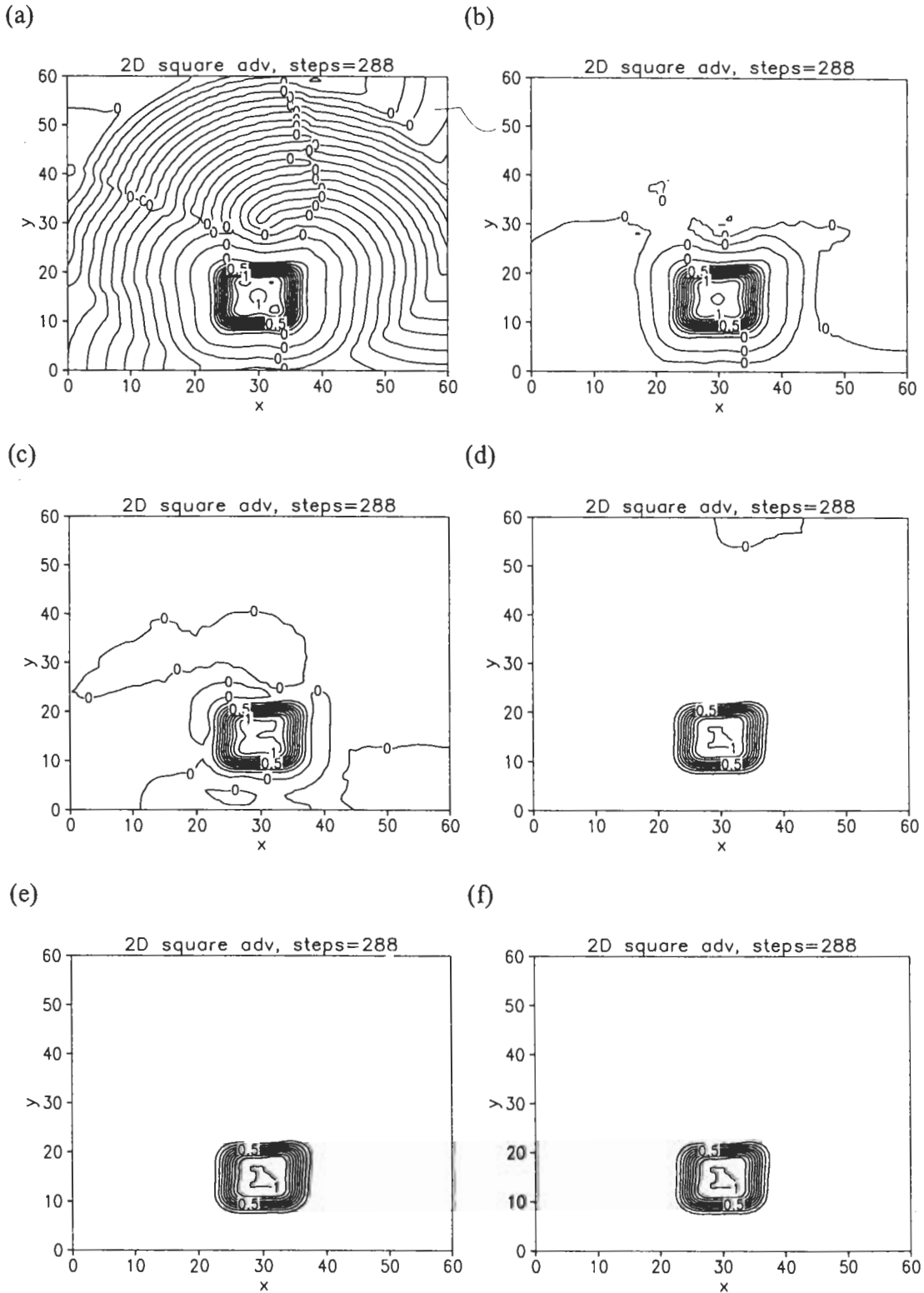


圖 7 二維方形波旋轉兩圈的結果，(a)到(f)分別為：A、B、C、D、E、F法。等值線間距為0.1。

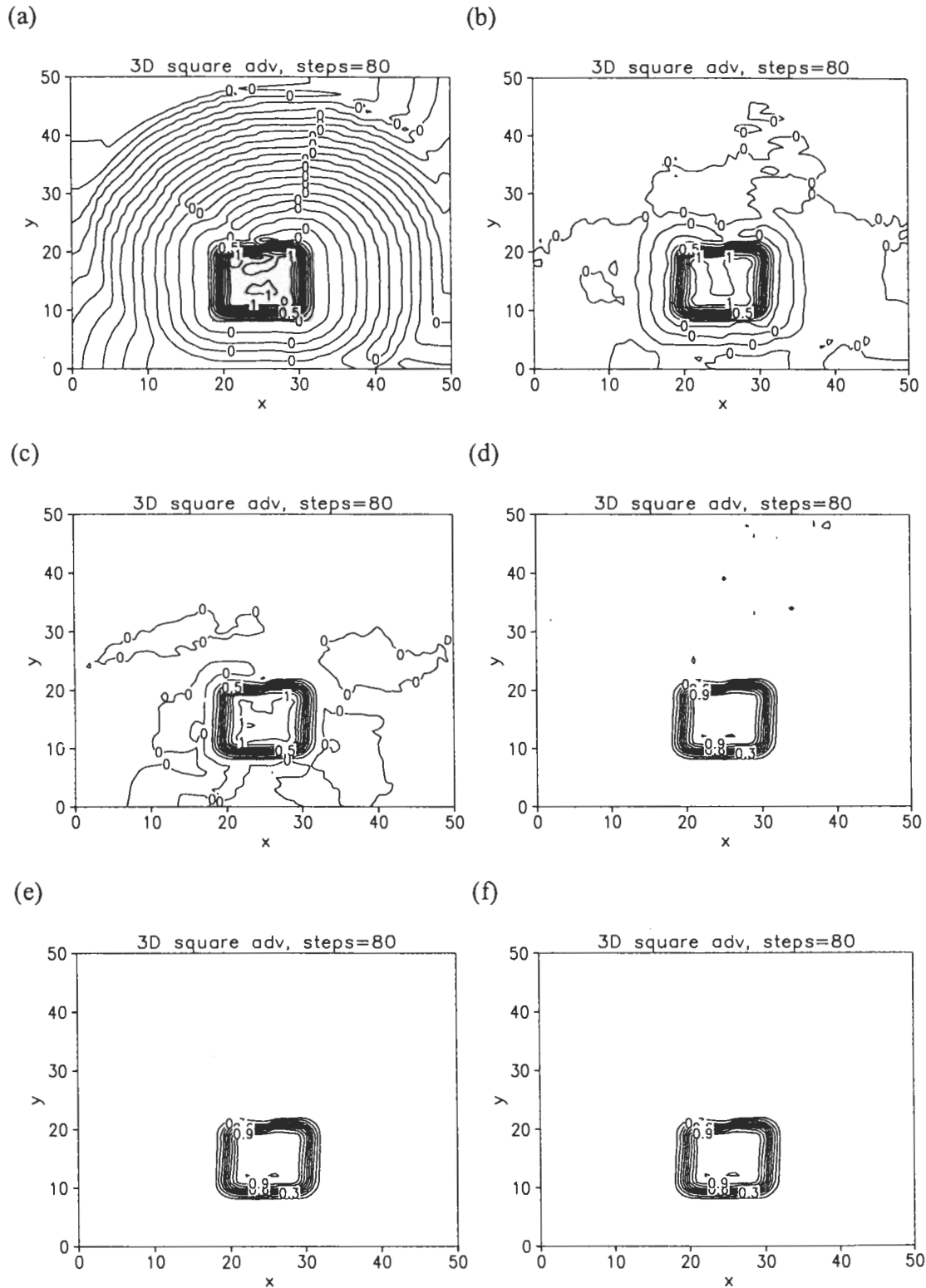


圖 8 三維方形波旋轉一圈的結果在  $z = 15$  的剖面，(a)到(f)分別為：A、B、C、D、E、F 法。等值線間距為 0.1。

無可避免地產生 overshooting，在有考慮 D 法的三個案中的 overshooting 最小；另外，在沒有作修正的個案（A 法），其質量的保守性相當好，而加入人為修正單調性的個案均使此保守性變差。

（四）三維方形波，旋轉風場

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 1 & \text{if } 20 \leq x \leq 30, 10 \leq y \leq 20, 10 \leq z \leq 20 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

圖 8 為使用不同單調方法旋轉兩周的結果在  $z = 15$  的剖面，可看出其表現和二維方形波的結果相當一致，E、F 法的表現是其中最好的。各項統計數據如表六，雖然 D、E、F 法此時產生 undershooting，但其值仍比 B、C 法的小很多。圖 9 是  $(x, z) = (25, 15)$  的分佈情形，圖中可看出 D 法的對稱性較 B、C 法好，overshooting 也最小。

（五）二維圓錐，變形場

Smolarkiewicz (1982) 的文章中提出一個對平流方法相當嚴峻的測試，如圖 10 所示之變形流場，流函數為  $\phi(x, y) = 8 \sin(\frac{\pi x}{25}) \cos(\frac{\pi y}{25})$ ，風場

在三維的測試中，積分區域為  $[0, 50] \times [0, 50] \times [0, 50]$ ，時步為  $\Delta t = \frac{\pi}{40}$ ，三維度格距均為 1，使用等角速度旋轉風場，角速度  $\Omega = 1$ ，因此旋轉一周需要 80 個時步，旋轉中心為積分區域中心，旋轉軸方向為  $(1, 0, 3)$ ，採固定邊界條件。初始場為：

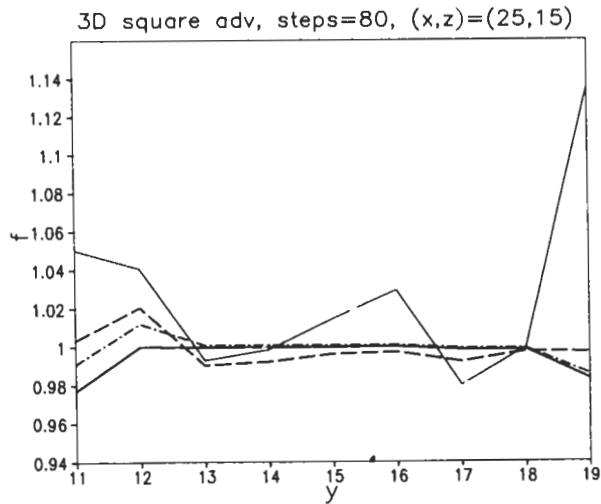


圖 9 三維方形波旋轉一圈的結果，在  $(x, z) = (25, 15)$  的分佈情形。A、B、C、D 法分別為粗實線、虛線、點線、細實線。

表六 三維方形波旋轉一圈的統計數據。

單調性	最大值	最小值	總質量比	總能量比	總誤差的平方根
A	1.2604	-0.2068	1.0006	0.8921	2.6553e-2
B	1.1353	-5.3751e-2	1.0245	0.8230	3.1072e-2
C	1.0685	-1.6932e-2	1.0376	0.7927	3.1845e-2
D	1.0014	-4.0636e-4	1.0246	0.7722	3.2300e-2
E	1.0014	-4.1856e-4	1.0245	0.7719	3.2300e-2
F	1.0014	-3.7001e-4	1.0239	0.7716	3.2301e-2

為  $u(x, y) = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$  ,  $v(x, y) = \frac{\partial \phi}{\partial x}$  ; 被平流量初始分佈如圖 10 中央所示, 為一半徑 15, 中心值為 1 向四周線性遞減到 0 的圓錐。理論上每個渦旋中具有質量不會流出此渦旋, 因此無論積分多久, 除了中央六個渦旋外, 其餘的渦旋都不應有任何值存在, 且應左右對稱。Staniforth et al. (1987)認為此測試可分為兩種時間尺度: 在較短時間尺度的測試, 他們認為數值解應與解析解相比較, 以驗證數值方法的精確度; 而較長時間尺度的積分, 可以驗證數值方法的穩定度, 因為此測試的空間分佈尺度會隨時間增加而變小, 直到網格無法解析的程度。圖 11 為使用時步  $\Delta t = 0.7$  , 並以不同方法積分 75 個時步的結果, 除了未經單調性修正的個案(A)具相當多雜訊外, 模擬結果大致上均與 Staniforth and Côté (1987)得到的解析解相當接近, 其統計數據見表七, 其中並列了 Sun et al. (1996)中的測試數據, 但在他們的測試中使用的全域最大值為 1, 最小

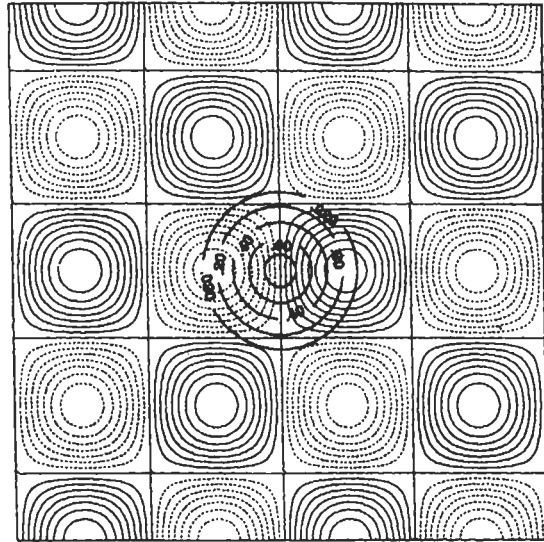


圖 10 二維變形場測試的流函數與被平流量初始分佈, 實線與虛線分別為正值與負值, 被平流量初始分佈為高度 1、半徑  $15\Delta x$  的圓錐。(摘自 Smolarkiewicz 1982)

值為 0, 這正好是初始場的最大值及最小值, 所以其數據中的最大及最小值表現相當好, 這顯

表七 二維變形場測試積分 75 個時步(  $\Delta t = 0.7$  )的統計數據。其中最後四列是 Sun et al. (1996) 的數據, 其代號分別代表使用的內插法: 三次樣條、拉格朗日 3、5、7 次多項式。

單調性	最大值	最小值	總質量比	總能量比
A	1.0575	-0.7583	0.9996	2.1013
B	1.0287	-0.1048	1.2424	1.3535
C	0.8036	-2.0786e-3	1.2112	1.1669
D	0.9178	-0.2429	1.1993	1.1988
E	0.9086	-4.2587e-4	1.2320	1.2232
F	0.7942	-3.2687e-4	1.2027	1.1524
CSPL	1	0	1.29	1.36
LAG3	0.754	0	1.12	1.04
LAG5	0.805	0	1.16	1.13
LAG7	0.816	0	1.20	1.19

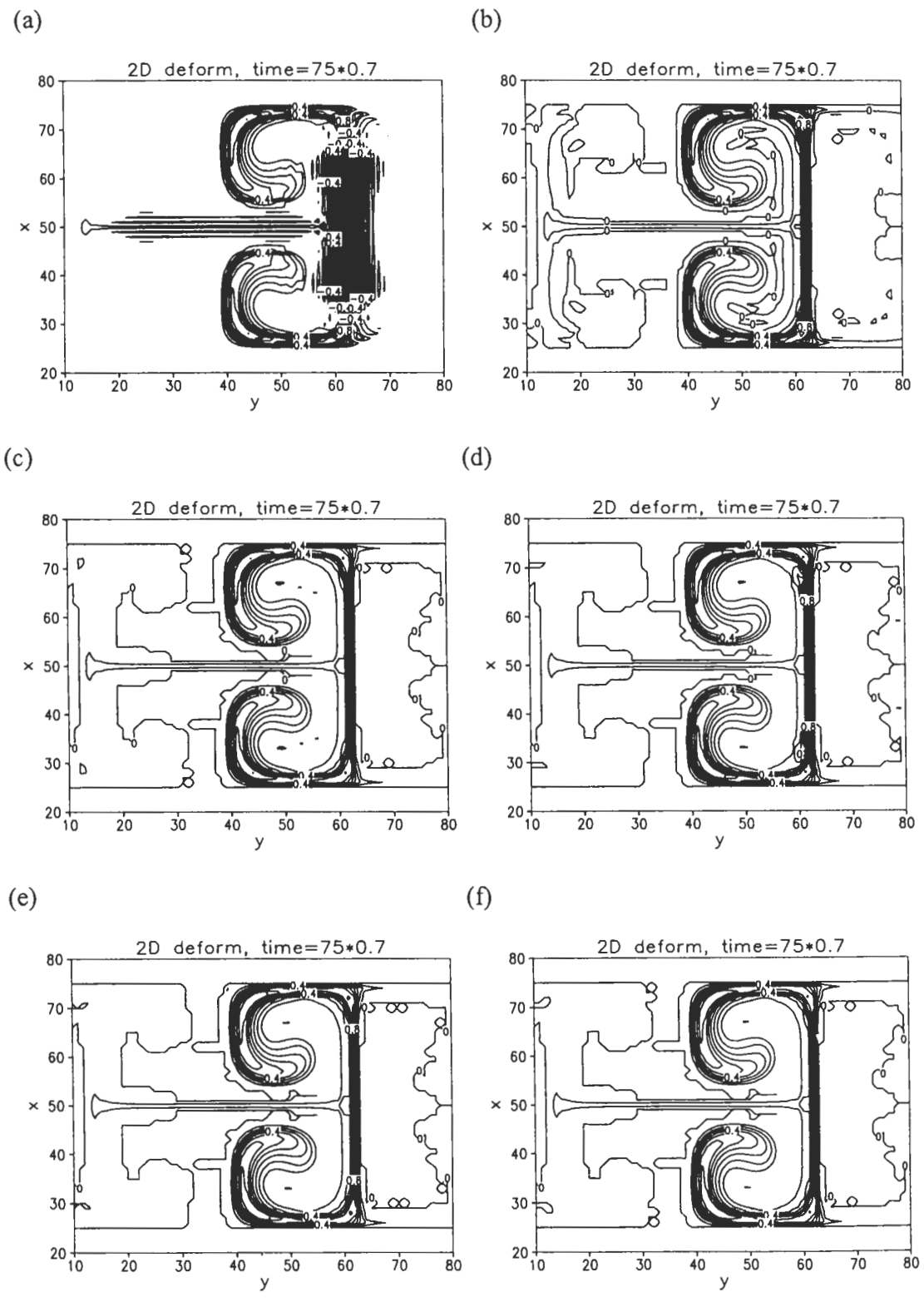


圖 11 二維變形場測試積分 75 個時步 ( $\Delta t = 0.7$ ) 的結果。(a)到(f)分別為：A、B、C、D、E、F 法，其中(a)未繪 0 值線。(a)中等值線間距為 0.2，其他均為 0.1。

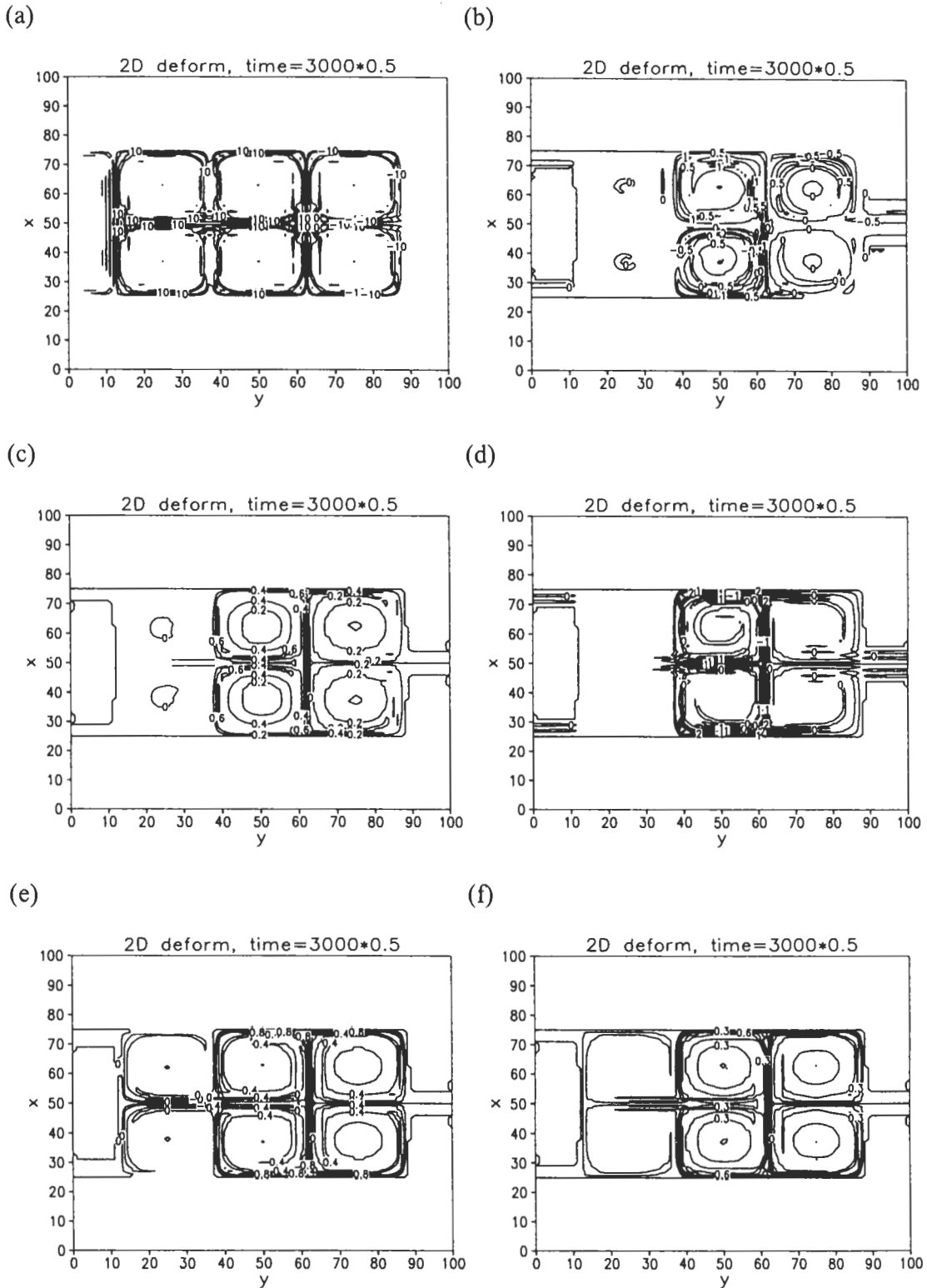


圖 12 二維變形場測試積分 3000 個時步 ( $\Delta t = 0.5$ ) 的結果。(a)到(f)分別為：A、B、C、D、E、F 法。(a)到(f)中等值線間距分別為 10、0.5、0.2、0.5、0.2、0.1。

表八 二維變形場測試積分 3000 個時步 ( $\Delta t = 0.5$ ) 的統計數據。其中最後三列是 Sun et al. (1996) 的數據，其代號分別代表使用的內插法：拉格朗日 3、5、7 次多項式。

單調性	最大值	最小值	總質量比	總能量比
A	20.1536	-19.7825	13.1164	1454.643
B	1.4754	-1.0498	3.2471	5.8381
C	0.7501	-2.2741e-2	3.3148	2.3660
D	3.3307	-1.3017	5.8178	13.3818
E	1.0106	-0.4700	3.1094	3.5093
F	0.7368	-4.085e-4	2.9751	1.8219
LAG3	0.285	-0.118	0.953	0.779
LAG5	0.428	-0.240	0.981	1.17
LAG7	0.531	-0.366	0.987	1.60

示如欲應用本文所測試的濾波方法，全域的極值選取對於模擬結果也有一定的影響。

圖 12 為使用時步  $\Delta t = 0.5$ ，並以不同方法積分 3000 個時步的結果，表八為其統計數據，其中也並列了 Sun et al. (1996) 中的測試數據。由圖 12 及表八可以看到，雖然如同 Huang (1994) 與 Sun et al. (1996) 證實的，三次樣條內插對於此測試的長時間積分是不穩定的，但 F 法之不穩定度為所有方法中最小的，即使其總質量與總能量表現不如拉格朗日多項式。接下來進一步比較幾個表現較好的方法，圖 13 是長時間積分的結果在  $y = 50$  的剖面。圖中 E 法（細實線）在局部極值處過量的情形較嚴重，這是由於 Sun et al. (1996) 的方法合併本文的方法，仍無法去除此現象不斷產生短波造成的不穩定，因此 F 法是所有本文中測試綜合表現最佳者。但由於其 damping 為這些方法中最大的，所以必須合併質量守恆處理，才能達到最佳精確度。

2D deform, time=3000\*0.5, y=50

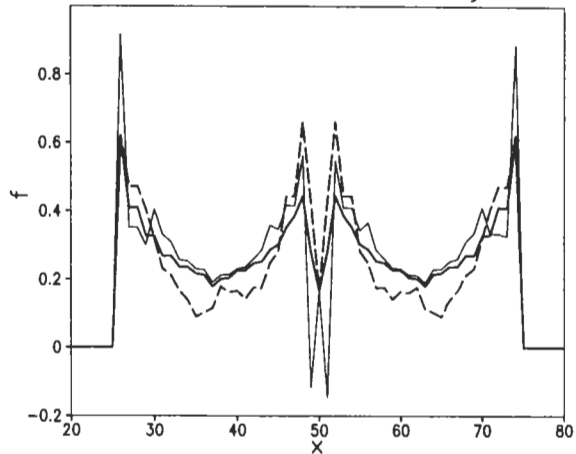


圖 13 二維變形場測試積分 3000 個時步 ( $\Delta t = 0.5$ ) 的結果，在  $y = 50$  的分佈情形。C、E、F 法分別為虛線、細實線、粗實線。

#### 四、結 論

平流過程是大氣數值模擬中一個重要的部分，其精確性和穩定度可以對整體模擬表現有



很大的影響。許多物理量經由風場的傳送過程需要精確的計算，因此平流計算能否維持其正定性及單調性是相當重要的。

由以上的理想測試，Sun et al. (1996)、Nair et al. (1999)及本文提出的方法均對半拉格朗日法的表現有很大的改進，而同時應用則可以達到更好的效果，然而人為的修正往往造成被平流量的質量不守恆。在二維變形場測試中，三次樣條內插造成的不穩定，也許可以在設計守恆的內插格式後去除。未來若能合併質量守恆格式，相信可以對氣象數值模擬研究有所助益。

## 誌謝

我們感謝兩位審查者的詳細審查與建議，以及普度大學(Purdue University)喬文義教授對本研究的啟發與討論。經費由國科會資助。我們亦感謝國家高速網路與計算中心提供的計算資源。

## 參考文獻

- 張博雄與曾忠一，1998：半拉格朗日法單調平流格式的數值實驗。大氣科學，26，325-342。
- 曾忠一，1993：大氣模式的數值方法。渤海堂，台灣臺北，695頁。
- Akima, H., 1991: A method of univariate interpolation that has the accuracy of a third-degree polynomial. *ACM Trans. Math. Softw.*, 17, 3, 341-366.
- Bermejo, R., 1990: On the equivalence of semi-Lagrangian schemes and particle-in-cell finite element methods. *Mon. Wea. Rev.*, 118, 979-987.
- , and A. Staniforth, 1992: The conversion of semi-Lagrangian advection schemes to quasi-monotone schemes. *Mon. Wea. Rev.*, 120, 2622-2632.

- Cheng, H., S.-L. Fang, and J. E. Lavery, 2002: Univariate cubic  $L_1$  splines- A geometric programming approach. *Math. Meth. Oper. Res.*, 56, 197-229.
- Fritsch, F. N. and R. E. Carlson, 1980: Monotone piecewise cubic interpolation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 17, 238-246.
- Holnicki, P., 1995: A shape-preserving interpolation: applications to semi-Lagrangian advection. *Mon. Wea. Rev.*, 123, 862-870.
- Huang, C. Y., 1994: Semi-Lagrangian advection schemes and Eulerian WKL algorithms. *Mon. Wea. Rev.*, 122, 1647-1658.
- Huynh, H. T., 1993: Accurate monotonic cubic interpolation. *SIAM J. Numer. Anal.*, 30, 57-100.
- Lavery, J. E., 2000: Univariate cubic  $L_p$  splines and shape-preserving, multiscale interpolation by univariate cubic  $L_1$  splines. *Comput. Aided Geometric Design*, 17, 319-336.
- Leonard, B. P., 2002: Stability of explicit advection schemes. The balance point location rule. *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, 38, 471-514.
- McDonald, A. 1984: Accuracy of multiply-upstream, semi-Lagrangian advective schemes. *Mon. Wea. Rev.*, 112, 1267-1275.
- , 1987: Improving the estimate of the departure point position in a two-time level semi-Lagrangian and semi-implicit scheme. *Mon. Wea. Rev.*, 115, 737-739.
- Nair, R., J. Côté, and A. Staniforth, 1999: Monotonic cascade interpolation for semi-Lagrangian advection. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 125, 197-212.
- Purnell, D. K., 1976: Solution of the advective equation by upstream interpolation with a cubic spline. *Mon. Wea. Rev.*, 104, 42-48.
- Purser, R. J., and L. M. Leslie, 1991: An efficient interpolation procedure for high-order three-dimensional semi-Lagrangian models. *Mon. Wea. Rev.*, 119, 2492-2498.

- , and ——, 1994: An efficient semi-Lagrangian scheme using third-order semi-implicit time integration and forward trajectories. *Mon. Wea. Rev.*, **122**, 745–756.
- Rood, R. B., 1987: Numerical advection algorithms and their role in atmospheric transport and chemistry models. *Rev. Geophys.*, **25**, 71–100.
- Smolarkiewicz, P. K., 1982: The multi-dimensional Crowley advection scheme. *Mon. Wea. Rev.*, **110**, 1968–1983.
- Staniforth, A., J. Côté, and J. Pudykiewicz, 1987: Comments on “Swolarkiewicz's deformational flow”. *Mon. Wea. Rev.*, **115**, 894–900.
- , and ——, 1991: Semi-Lagrangian integration schemes for atmospheric models—a review. *Mon. Wea. Rev.*, **119**, 2206–2223.
- Sun, W. Y., K.-S. Yeh, and R.-Y. Sun, 1996: A simple semi-Lagrangian scheme for advection equations. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **122**, 1211–1226.
- , and K.-S. Yeh, 1997: A general semi-Lagrangian advection scheme employing forward trajectories. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **123**, 2463–2476.
- Takacs, L. L., 1985: A two-step scheme for the advection equation with minimized dissipation and dispersion errors. *Mon. Wea. Rev.*, **113**, 1050–1065.
- Tanguay, M., A. Simard, and A. Staniforth, 1989: A three-dimensional semi-Lagrangian scheme for the Canadian regional finite-element forecast model. *Mon. Wea. Rev.*, **117**, 1861–1871.
- Williamson, D. L., and P. J. Rasch, 1989: Two-dimensional semi-Lagrangian transport with shape-preserving interpolation. *Mon. Wea. Rev.*, **117**, 102–129.

## Numerical Tests on Using a Monotonic Interpolation Function in Semi-Lagrangian Schemes

Ming-En Hsieh   Wu-Ron Hsu   Jou-Ping Hou

Department of Atmospheric Sciences, National Taiwan University

(Manuscript received 03 February 2005 ; in final form 08 August 2005)

### ABSTRACT

Numerical oscillations are generated by using high order polynomials in semi-Lagrangian advection schemes for strong gradient situations. In this paper, we develop a new method to filter out these oscillations and compare the results of one to three dimensional ideal tests with the filters proposed by previous studies. The 1D test shows that our new filter and one of Sun et al.'s filters have less damping effect for waves with wavelength longer than  $2\Delta x$ . In the 2D and 3D rotating tests, the shape of the square block is better preserved with our new filter and wiggles can be much reduced by a hybrid of these filters. Although cubic splines are showed to be unstable for 2D deformation flow experiments, hybrid filters can suppress such instability. All the filters examined in this paper are computationally efficient and can be easily applied in semi-Lagrangian schemes, especially formulated in a series of 1D interpolations such as the cascade method proposed by Purser and Leslie or dimensional splitting procedures.

**Key words :** Semi-Lagrangian scheme, Monotonic interpolation function