

數值天氣預報變分初值化之研究

曾 忠 一
中央研究院物理研究所
國立台灣大學大氣科學系

余 孟 爵
中國文化大學
地 學 研 究 所

(中華民國七十二年二月三日收件)

摘 要

本研究用變分最佳化原理處理數值天氣預報中的初值化問題。本研究使用線性平衡方程式為約束條件，同時利用高度場和風場的觀測資訊，使校正後的高度場和風場能滿足平衡方程式，以作為數值天氣預報的初值之用。所得的分析方程式是兩個聯立的橢圓型偏微分方程式，可用緩和法來求解。本文提出了一個求出最佳權重的方法，在例行的初值化時也可使用。校正前後的高度場和風場的分布型態大致相同，但在數值上仍有若干差異，這是因為校正後的高度場和風場已滿足平衡方程式。此外本研究也對高度場進行富氏分析，研究結果顯示，長波的強度分布在校正前後並無差異，但短波的強度在校正以後就顯著減小了。因此，線性平衡方程式的約束條件具有濾波的作用。

一、前言與研究目的

數值天氣預報最重要的觀念就是，用控制大氣運動的流體力學方程式，理論上而言，可以預報未來的天氣狀況。事實上，由於觀測技術的限制，不易得到能代表大氣大尺度運動的初值場。觀測的初值場不但有儀器誤差，而且受到中小尺度運動的影響。此外世界上大部份地區測站稀少，天氣資料缺乏。由於這幾個因素的限制，假如直接把觀測值內插到網格點上以做為初值之用，則初期狀態的質量場和風場並不能保持正確的平衡。數值積分時，若初值場沒有保持準地轉平衡，就會激發出慣性重力波，由於這種波動位相速度很快，會立即污染整個預報場，而得到不合理的結果。在實際的大氣裡，由於波動能量的頻散作用，以及大氣中自然的耗散作用，會使大氣的風場和質量場作迅速的調節，重新建立大氣大尺度的準地轉平衡狀態。在數值積分時，預報模式很難同時模擬大氣大尺度運動和地轉調節，因此在進行數值預報之前，必須先使質量場和風場接近平衡狀態，這就是初值化問題。

一般的原始方程式預報通常直接利用地轉關係

式或平衡方程式，由高度場求得風場，完全不用觀測的風場。理由很簡單，觀測的風場精度較差，此外觀測的高度場和風場並不一定會保持大尺度大氣運動的準地轉平衡。初值化最簡單的方法就是用地轉風。Hinkleman (1951) 指出，這種平衡可以抑制雜波的產生。後來 Charney (1955) 指出，用地轉平衡無法完全抑制雜波，必須用非線性平衡方程式。Benwell 和 Bretherton (1968) 的研究顯示，只用地轉風，則預報場的雜波很多，如用線性平衡方程式，則其振幅會減小很多。由地轉關係式和平衡方程式所得到的風場均無輻散。Phillips (1959) 指出，初始的風場必須要有輻散才能有效的抑制慣性重力波的產生。

現在利用平衡方程式來進行初值化的方法已被廣泛使用。完全用高度場，由平衡方程式求得風場，而觀測風場完全捨棄不用，並不是最理想的方法，因為並沒有充份運用風場的觀測資訊。測站上所測得的各種氣象變數值，精度雖有大小的分別，但都是重要的資訊。要如何充分利用這些資訊一直是各種客觀分析法和初值化法努力探討的目標。1955年 Sasaki 提出的變分最佳分析，可以解決這個問

題。變分最佳分析的用途非常廣泛，能將動力的、能量的甚至統計的或經驗的約束條件納入最佳化的過程中，充分運用所有的觀測資訊，使氣象場能維持內部一致，代表大氣大尺度運動的特性。Sasaki (1969 a, b) 指出這個方法的特點，約束條件的功能以及濾波的特性。Stephens (1970) 也曾利用平衡方程式為約束條件，進行流線函數的分析，以探討初值化的問題。Ritchie (1975) 利用線性平衡方程和連續方程式來從事四維資料同化的實驗，以消除遙測儀器所測得的溫度和風等非定時資料納入數值天氣預報模式後所產生的短波和高頻雜波。王氏 (1981) 應用線性平衡方程式為約束條件，以探討有限元素法的初值化問題。

本研究將充分利用觀測的風場和高度場，運用變分最佳化原理，以平衡方程式為約束條件，來校正觀測的風場和高度場，作為數值天氣預報的初值之用，一般使用的初值化，只用高度場的觀測值，利用平衡方程式求得風場，完全捨棄了風場觀測值的重要資訊。變分最佳化法最大的優點就是能充分利用這些觀測資訊。

本研究將對 1977 年的梅雨天氣資料進行變分最佳化分析，使風場和高度場能滿足平衡方程式的約束條件。分析的結果，可以做為數值天氣預報的初值，以改善預報的精度。此外也可改進主觀分析或客觀分析的精度，因為不論從事主觀分析或客觀分析，只用高度場或風場的觀測值來分別分析高度場或風場。使用變分最佳化分析，能同時使用高度場和風場的觀測值，重新校正這些氣象變數，使其滿足線性平衡方程式。本研究將比較校正前後的風場和高度場，以探討其差異。此外再利用波譜分析的方法，計算出各定壓層校正前後的高度在波數域上的分布及強度，來驗證變分最佳分析的合理程度。

二、研究方法

在進行變分分析的過程中，我們假設

$$u \simeq \tilde{u} \quad v \simeq \tilde{v} \quad \phi \simeq \tilde{\phi} \quad (1)$$

其中 u 和 v 分別為校正後的 x 和 y 方向的風速分量， ϕ 為校正後的重力位。又 \tilde{u} ， \tilde{v} ，和 $\tilde{\phi}$ 分別為 u

， v 和 ϕ 的觀測值。(1)式表示經過變分初值化以後的氣象場和原來的觀測值相差很小。變分分析和一般使用的最小平方方法非常類似，就是求得 u ， v 和 ϕ 使得下列均方差 J 為極小：

$$J = \iint \{ \alpha (u - \tilde{u})^2 + \alpha (v - \tilde{v})^2 + \beta (\phi - \tilde{\phi})^2 \} dx dy / m^2 \quad (2)$$

其中 α 和 β 分別為風場和重力場的觀測權重， m 為地圖投影變形因子。(2)式中除以 m 表示權重 α 和 β 在地球上為常數，而非在地圖上是常數。

(2)式中 u ， v 和 ϕ 並不是互相獨立的，而是藉約束條件而互相影響的。本文選用線性平衡方程式作為約束條件，使校正後的風場和高度場能完全滿足這個強勢約束條件。線性平衡方程式的形式如下 (Haltiner and Williams, 1980)：

$$B(u, v, \phi) = m^2 f \left(\frac{\partial v}{\partial x} \frac{1}{m} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{1}{m} \right) + mv \frac{\partial f}{\partial x} - mu \frac{\partial f}{\partial y} - m^2 \nabla^2 \phi = 0 \quad (3)$$

式中 f 為科氏參數， ∇^2 為 Laplace 算符。根據變分原理，強勢約束條件可以任意加入(2)式中，因此

$$J = \iint \{ \alpha (u - \tilde{u})^2 + \alpha (v - \tilde{v})^2 + \beta (\phi - \tilde{\phi})^2 + 2\lambda' B(u, v, \phi) \} dx dy / m^2 \quad (4)$$

(4)式中 λ' 為 Lagrange 乘數，在變分最佳化的過程中是一個未知數。為了去掉不必要的常數，因此在 λ' 前乘上一個 2。(4)式中積分式內前三項表示要求校正值 u ， v 和 ϕ 分別隨 α 和 β 成比例趨近於觀測值 \tilde{u} ， \tilde{v} 和 $\tilde{\phi}$ ，第四項表示 u ， v 和 ϕ 必須完全滿足強勢約束條件(3)式。現在要求(4)式為極小，即

$$\delta J = 0$$

其中 δ 為變分算符。經過運算以後，可以得到下列 Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{u}{m} = \frac{\tilde{u}}{m} - \frac{f}{\alpha} \frac{\partial \lambda'}{\partial x} \quad (5)$$

$$\frac{v}{m} = \frac{\tilde{v}}{m} - \frac{f}{\alpha} \frac{\partial \lambda'}{\partial y} \quad (6)$$

$$\nabla^2 \lambda' = \frac{\beta}{m} (\phi - \tilde{\phi}) \tag{7}$$

$$B(u, v, \phi) = m^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{fv}{m} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{fu}{m} \right) - m^2 \nabla^2 \phi = 0 \tag{8}$$

(8)式就是原來的線性平衡方程式。自然邊界條件為 $\delta\phi = 0$ 和 $\lambda' = 0$ ，也就是說 ϕ 的值在邊界上必須給出，我們使用 $\phi = \tilde{\phi}$ ，也就是 ϕ 的值在邊界上不加校正。將(5)和(6)式代入(8)式可以得到

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{f\tilde{v}}{m} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{f\tilde{u}}{m} + \frac{f^2}{\alpha} \nabla^2 \lambda' + \frac{2f}{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \lambda'}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \lambda'}{\partial y} \right) - \nabla^2 \phi = 0 \tag{9}$$

再將(7)式代入(9)式，得到

$$\nabla^2 \phi - \frac{f^2}{m} \frac{\beta}{\alpha} (\phi - \tilde{\phi}) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{f\tilde{v}}{m} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{f\tilde{u}}{m} + \frac{2f}{\alpha} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) \tag{10}$$

因此我們所得到的分析方程式是(7)式和(10)式，這是 ϕ 和 λ' 的聯立方程式，其邊界條件為

$$\phi = \tilde{\phi} \quad \lambda' = 0 \tag{11}$$

ϕ 和 λ' 求得以後，校正後的風場 u, v 可由(5)和(6)式求得。

由(5)式和(6)式可知，當 α 很大時，校正後的風場 u 和 v 會趨近於觀測值 \tilde{u} 和 \tilde{v} ；又由(10)式可知，此時校正後的高度場完全由風場的觀測值決定。若 β 趨近於無窮大時，由(7)式可知，高度場會趨近於其觀測值。由(2)式可知，若風的觀測值愈準確時，則 α 越大；若高度場的觀測值愈準確時，則 β 愈大，因此 α 和 β 分別代表風場和高度場的準確度。

以上我們雖然用兩個權重，但實際上只有一個獨立的權重，現在令 $\lambda = \beta \lambda'$ ，則分析方程式變為

$$\nabla^2 \lambda = \frac{1}{m} (\phi - \tilde{\phi}) \tag{12}$$

$$\nabla^2 \phi - \frac{f^2}{m} \frac{1}{\alpha/\beta} (\phi - \tilde{\phi}) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{f\tilde{v}}{m} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{f\tilde{u}}{m} + \frac{2f}{\alpha/\beta} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \right) \tag{13}$$

$$\frac{u}{m} = \frac{\tilde{u}}{m} - \frac{f}{\alpha/\beta} \frac{\partial \lambda}{\partial x} \tag{14}$$

$$\frac{v}{m} = \frac{\tilde{v}}{m} - \frac{f}{\alpha/\beta} \frac{\partial \lambda}{\partial y} \tag{15}$$

因此實際計算時，最方便的變數為 $\lambda, \phi, \tilde{\phi}, u/m, v/m, \tilde{u}/m, \tilde{v}/m$ ，以及 α/β 。用這個方法有兩個好處，第一我們只要給出兩個權重的比值就可以了，第二由(12)式得到的 λ 的數量級不會變化太大。(12)式和(13)式是 ϕ 和 λ 的聯立橢圓型方程式，可用緩和法求解。給出一個 α/β 值，必須對(12)式和(13)式重複求解數次才能得解。令 ϕ 的初次估計值為 $\tilde{\phi}$ ，則由(12)式得到

$$\nabla^2 \lambda = 0$$

而邊界條件為 $\lambda = 0$ 。由 Laplace 方程式的極大極小原理 (Chester 1971) 可知，其解為 $\lambda = 0$ 。令 $\lambda = 0$ 代入(13)式可解出 ϕ ， ϕ 的值得到以後，由(12)式可再解出 λ 。因此實際的計算步驟如下：

- (1)給出一個 α/β 值
- (2)令 $\lambda = 0$
- (3)用緩和法解出(13)式，得到 ϕ 的解
- (4)用緩和法解出(12)式，得到 λ 的解
- (5)然後重複(3)和(4)的步驟，直到 ϕ 和 λ 的解趨近於一定值
- (6)用(14)式和(15)式求出校正值 u 和 v
- (7)重新用下列公式求新的 α 和 β 值，再重複(2)至(7)的步驟

$$\alpha = \frac{1}{\sigma_{u,v}^2} \quad \beta = \frac{1}{\sigma_{\phi}^2} \tag{16}$$

其中

$$\sigma_{u,v}^2 = \frac{1}{2} (\sigma_u^2 + \sigma_v^2) \quad \sigma_u^2 = (\overline{(u - \tilde{u})^2}) \quad \sigma_v^2 = (\overline{(v - \tilde{v})^2}) \tag{17}$$

$$\sigma_{\phi}^2 = (\overline{(\phi - \tilde{\phi})^2}) \quad \sigma_{\beta}^2 = \sigma_{\phi}^2 / g^2 \tag{18}$$

(17)式和(18)式中長橫線代表所有網格點上變數值的平

均。因此 $\sigma_{u,v}$ 和 σ_ϕ 分別表示風場和重力位場校正前後的根均方差，因此若 $\sigma_{u,v}$ 愈大；即觀測值的誤差愈大，則 α 值愈小，如此則風的觀測值對校正後的氣象場的影響愈小。若 σ_ϕ 很大時，也就是高度場的觀測值誤差很大時，則 β 值變為很小，此時高度場對校正後的氣象場的影響很小。

我們先給出一個 α/β 值，然後照上述的步驟重複運算數次，若 α/β 的值變動很大時，則表示第一次給出的 α/β 不合理，以後就不再使用。若 α/β 的值變動很小時，則表示第一次給出的 α/β 值非常合理，就用這個 α/β 值所算出的結果為校正後的氣象場。

三、研究結果

本研究的個案取自 1975 年 6 月 10 日格林尼治時間零時的天氣資料，範圍約在 10°N 至 60°N ， 70°E 至 160°E 之間，這個區域包括台灣、中國大陸、蒙古、日本、韓國、中南半島以及西太平洋區。此時的天氣概況如圖 1。當時副熱帶太平洋高

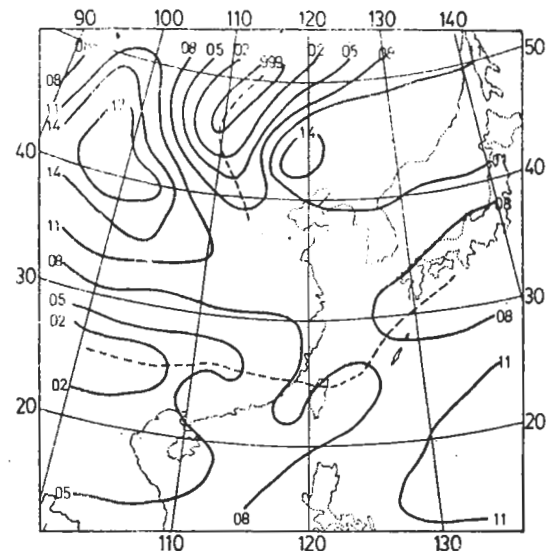


圖 1 1975 年 6 月 10 日格林威治時間零時東亞地區海平面氣壓（實線），單位為 mb，鋒面（虛線）

壓與鄂霍次克高壓之間的梅雨鋒面自日本向西南延伸，經過琉球、台灣到達南中國海，蒙古高壓位於中國北部。本研究考察的範圍大致包括以台灣為中心的東亞地區。本研究使用 20×19 個網格點，網

格間距在一千五百萬分之一的 Lambert 投影在圖上為 1.6 公分，在地球上約為 240 公里。在考察範圍內測站的分布並不平均。東南亞地區以及西太平洋海面上測站稀少，天氣資料較為缺乏。其他如日本海和東海海面上測站也少，因此在這些地區不能得到較正確的分析場。

本研究使用六個定壓層的高度、風向和風速等資料，以進行初值化，使初值化後的高度場和風場能滿足線性平衡方程式的強勢約束條件。在上節已經提到，在進行數值求解之前，必須先決定觀測權重 α 和 β 。雖然有兩個權重，但是這兩個權重的絕對數值並不重要，它們的比值 α/β 才有意義。換句話說，只有一個獨立的權重。在數值求解時，先給出一個 α/β 值，求出校正後的高度場和風場，然後再按 (16)，(17)，和 (18) 三式求出新的權重。如此重複運算十次，觀察 α/β 的變化。若 α/β 值的變動很小，那麼就表示給出的 α/β 值相當合理。由於求解的過程非常複雜，包括求解兩個聯立的橢圓型偏微分方程式，因此 α/β 值變動很大，為了找

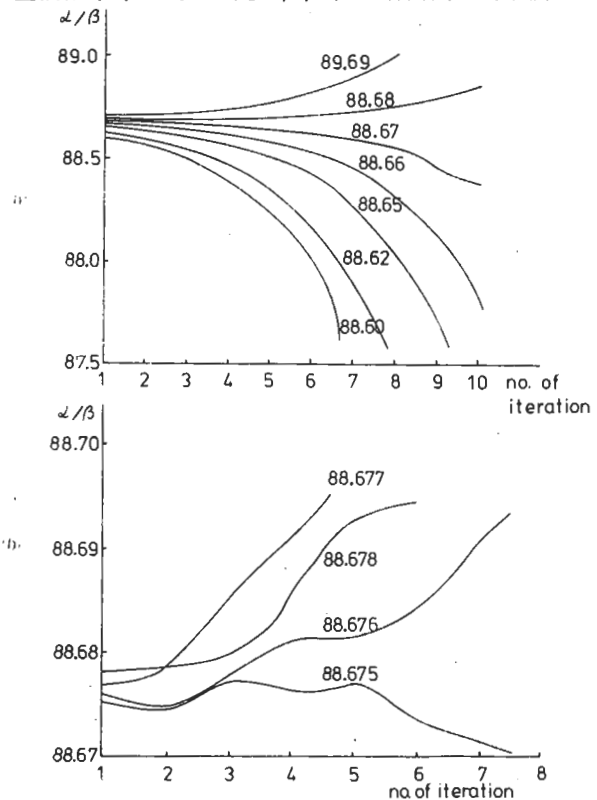


圖 2 850 mb 層 α/β 值的變化，曲線上的數字代表給出的 α/β 值

出 α/β 變動很小的值，每一定壓層必須做 50 個左右的實驗。

850 mb 定壓層上 α/β 值的試驗結果在圖 2。由圖 2 a 可知，若給出 α/β 值大於 88.68，則經過數次運算之後，其值會愈來愈大；若給出的值小於 88.67，則其值會愈來愈小。由圖 2 b 可知，若給出的 α/β 值為 88.675，經過 10 次重複運算之後，其值只變動萬分之一以內，因此 850 mb 層的 α/β 值就採用 88.675。其他的定壓層，我們也是同樣的方法求出最佳的權重比。我們所求得的最理想的 α/β 值和對應的根均方差值列在表 1。由表 1 可知，風場和高度場的根均方差值愈往高層其

表 1 本研究求得的各定壓層上的權重比 α/β 值，校正前後 x 方向風速分量的根均方差 σ_u ， y 方向風速分量的根均方差 σ_v ，以及高度場的根均方差

	$\alpha/\beta(m^2/s^2)$	$\sigma_u(m/s)$	$\sigma_v(m/s)$	$\sigma_h(m)$
850mb	88.675	1.23	1.38	1.26
700mb	48.360	1.74	2.02	1.34
500mb	79.610	2.73	2.71	2.47
300mb	85.080	3.83	3.86	3.62
200mb	142.800	3.86	4.86	5.35
100mb	170.800	5.14	5.23	6.88

值愈大。因此我們可以說，愈往高層，風場和高度場的觀測值愈不準。 α/β 值也幾乎是愈往高層其值愈大，但最大的和最小的只差一倍左右，因此可以說變動並不很大。由於本文中所說的觀測值就是主觀分析值，因此我們只能說，風場和高度場的主觀分析技巧並無多大的差異。

由圖 2 的結果以及其他定壓層的計算結果，我們發現，若先給出一個 α/β 值，經過多次的運算以後，其值並不會趨近於一個定值。若給出的 α/β 值大於某一數值，則會一直變大；若小於某一數值，則會一直變小。這種情形，幾乎沒有例外。因此我們可以找到十次運算中變動很小的 α/β 值。我們做了很多試驗，主要的目的在於看看是否能得到 α/β 變動很小的值。事實上，在實際工作時並不需要做這樣多的試驗。只要先給出 α/β 值，然後運算一次，若得到新的 α/β 值和給出的 α/β 值

相差在百分之五以內，就可以把這個 α/β 值當做合理的權重比了。因為在這種情形下，我們所求得的風場和高度幾乎完全一樣。因此，我們在這裏提出的權重比的求法，在例行的數值天氣預報初值化中也可以使用，並不會花費過多的計算時間。變分最佳分析，經過過去二三十年許多氣象學家不斷的研究，發現在客觀分析、初值化以及四維資料同化方面，的確是一個相當有效的方法。在進行變分最佳分析時，最主要的困難在於如何採用合理的權重值。我們在這裏提出的方法，可以求得客觀而合理的權重值，至少解決了變分最佳分析的某些難題。

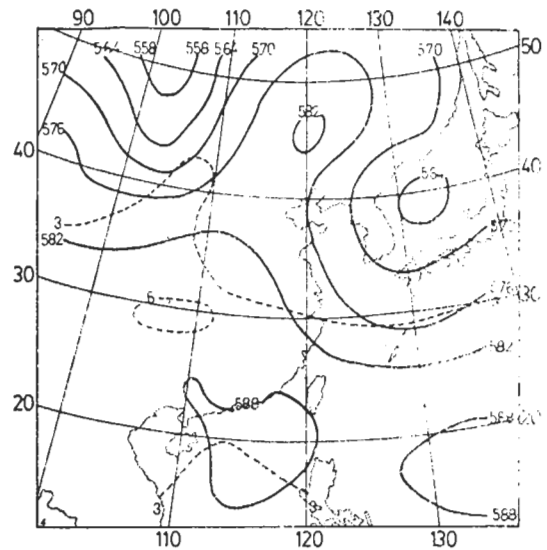


圖 3(a)

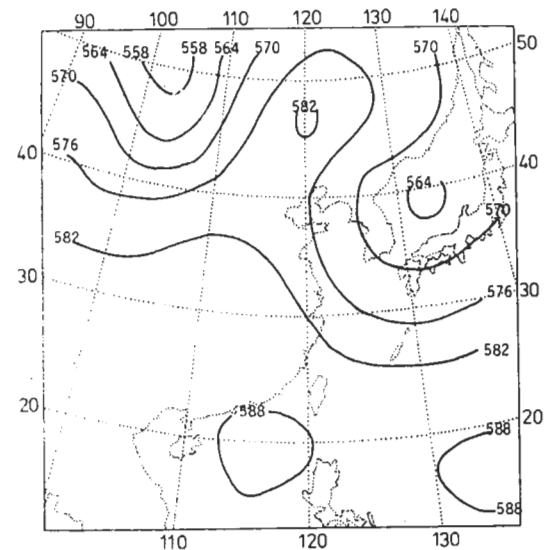


圖 3(b)

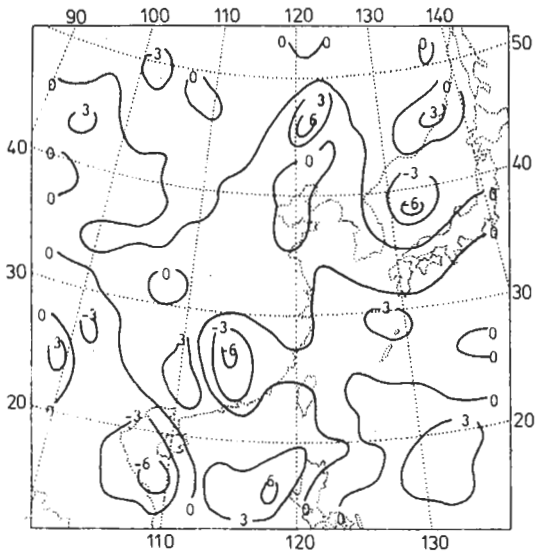


圖 3(c)

圖 3 (a)校正前的 500mb 高度場 (實線) 和混合比 (虛線, 單位為 g/kg) (b)校正後的高度場 (c)校正前後高度場的差值, 等值線間隔為 3 m。

找到合理的 α / β 值以後, 初值化的氣象場可立刻得到。850 mb 層上, 太平洋高壓在校正後, 略為往東退縮。700 mb 層上, 在中南半島處校正前後的差值較大, 達到 6 m 左右, 其他地區校正前後的差值都在 6 m 以下。500 mb 層上校正前後的高度場及其差值畫在圖 3 中。由圖可知, 校正前後的高度差值以華南、南海北部以及日本海和蒙古東部等處最大。在 300 mb 層, 高度場校正前後的差值, 以西太平洋區及中南半島一帶較大, 最大差值可達 13 m。200 mb 層的差異分布較為平均, 最大差值可達 15 m, 集中在日本南方及台灣附近太平洋海面上。100 mb 層高度場的差異最大值達到 29 m, 主要分布在南海北部和日本南部太平洋面上。綜合以上的討論, 可知校正前後的高度場差異, 主要分布在資料缺乏地區, 如西太平洋、中南半島以及日本海等處。此外在高低壓中心處, 高度場差異也大。在資料缺乏地區, 主觀分析較難掌握, 因此較不能代表大氣大尺度運動的特性, 換句話說較不能滿足線性平衡方程式。在高低壓中心處, 梯度風顯得重要, 而本研究使用的線性平衡方程式並未計及梯度風的效應因此在這些地區高度場校正前後的

差值較大。事實上, 在高低壓中心以及梅雨鋒面處, 應當用非線性平衡方程式來進行初值比, 才能將高度場和風場做更好的調節。最後, 我們必須指出, 愈往高層, 高度場校正前後的差值愈大。因此愈往高層, 高度場和風場的觀測值愈不準確, 於是愈不能滿足線性平衡方程式的約束條件。

現在我們再看校正前後的 x 方向風速 u 值。根據我們使用的坐標系統, 正的 u 值代表北風, 負的 u 值約略代表南風。至於 y 方向的風速 v , 則正值約略代表西風, 而負值約略代表東風。自 850 mb 層以上, 風場與海平面氣壓 (圖 1) 鋒面位置分布互相配合。愈到高層, 對應於梅雨鋒面附近的南北風速愈大, 到 200 mb 層時達到頂點, 中心風速在校正前後相去不多, 皆為 52 m/sec; 而後隨高度向上遞減, 在 100 mb 層處, 北風最大風速在校正後達到 33 m/sec, 比校正前的最大風速超出 5 m/sec 左右。500 mb 層南北向風速校正前後之值及兩者的差值畫在圖 4。我們可以看出, 校正前後的差值仍以高低壓中心處為最大, 而且也和高度場校正前後差值最大的地方 (圖 3) 互相配合。

至於東西向風速 v , 自 850 mb 至 500 mb 之間的改變不大, 但到 300 mb 以上, 風場型態雖無甚大變動, 但卻可以見到相當程度的風速分量值的變動。在 300 mb 層, 日本海北部東風 (即負的 v 值

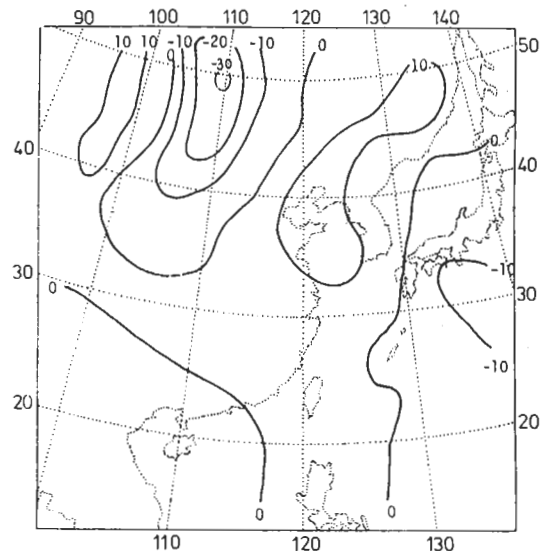


圖 4(a)

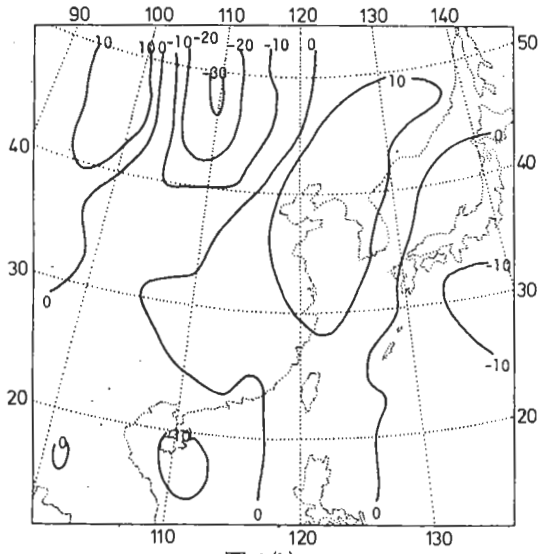


圖 4 (b)

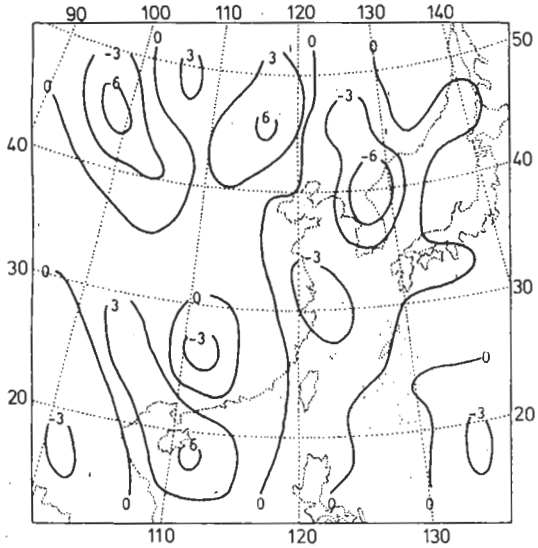


圖 4 (c)

圖 4 (a)校正前 500mb 風速分量 \tilde{u} 。
 (b)校正後的風速分量 u 。
 (c)校正前後的風速分量差值 $\tilde{u} - u$ 。
 單位皆為 m/sec。

) 值的最大值比較正前增加約 10 m/sec。在 200 mb 層處，校正後的風場在蒙古上空最大的西風反而比較正前減少 12 m/sec，而日本南方上空的西風（正的 v 值）則比較正前增加約 13 m/sec。100 mb 層的風速分量改變仍大，在南海北部上空的東風比較正前增大約 16 m/sec。圖 5 中畫出 500mb 層上校正前後的風速分量 v 及校正前後的差值。由圖中可知，在 500mb 層，校正後的 v 值，在型態看

來，和校正前並無多大改變。兩者的差值在日本海處大於 6 m/sec，此處正是一低壓中心（圖 3）。綜觀整個 v 場可知，越往上層，校正前後的差值愈大。對應於梅雨鋒面的地區，風速分量較大，且可見到風速分量的極大值。但在中緯槽附近，只有西風和南風為主要盛行風。此外就風場校正前後的差值分布來看，多集中在高低壓中心和梅雨鋒附近和南海一帶。

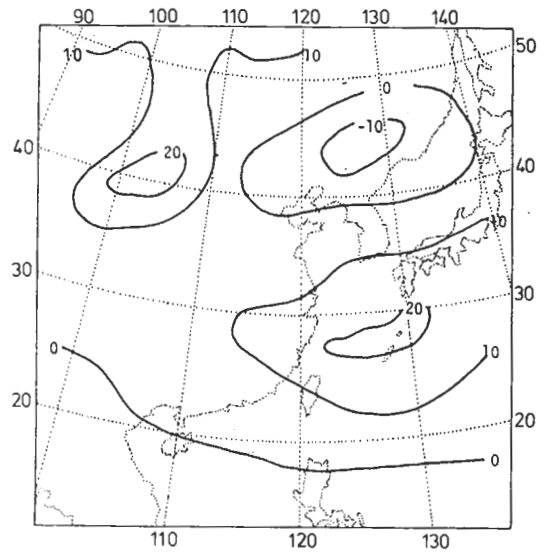


圖 5 (a)

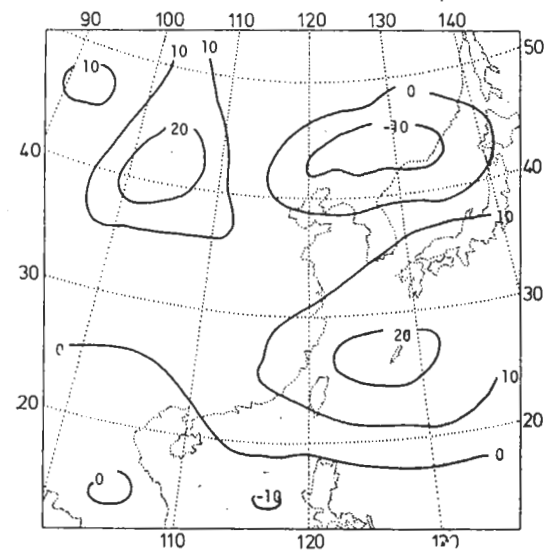


圖 5 (b)

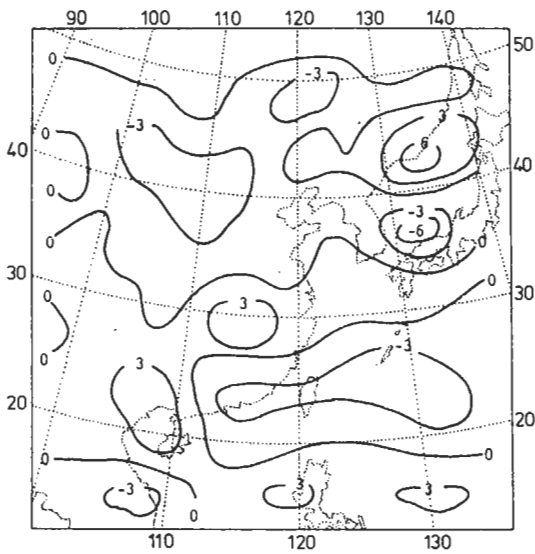


圖 5(c)

圖 5 (a)校正前 500mb 風速分量 \tilde{v} 。
 (b)校正後的風速分量 v 。
 (c)校正前後的風速分量差值 $\tilde{v} - v$ 。
 單位皆為 m/sec。

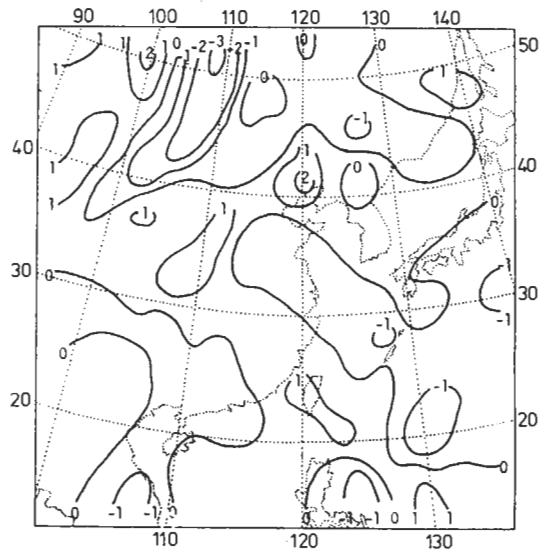


圖 6(b)

輻散場校正前後分布型態和強弱情形，並無多大改變，以 500 mb 層（圖 6）的數值最小。就渦度場而言，850 mb 層校正後的渦度場中，氣旋型渦度貫穿日本南方海，經琉球、台灣北部到達長江流域一帶，呈連續分布狀態，最大值位於琉球附近

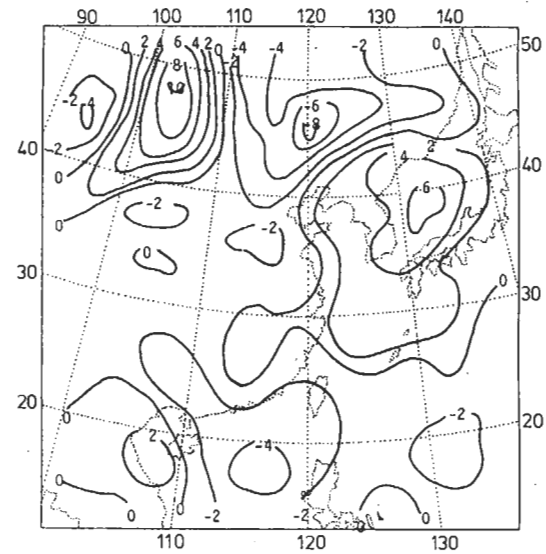


圖 6(c)

圖 6 500mb 的輻散場和渦度場
 (a)校正前的渦度場（實線，單位為 10^{-5} sec^{-2} ）和輻散場（虛線，單位為 10^{-5} sec^{-1} ）。
 (b)校正後的輻散場。
 (c)校正後的渦度場。

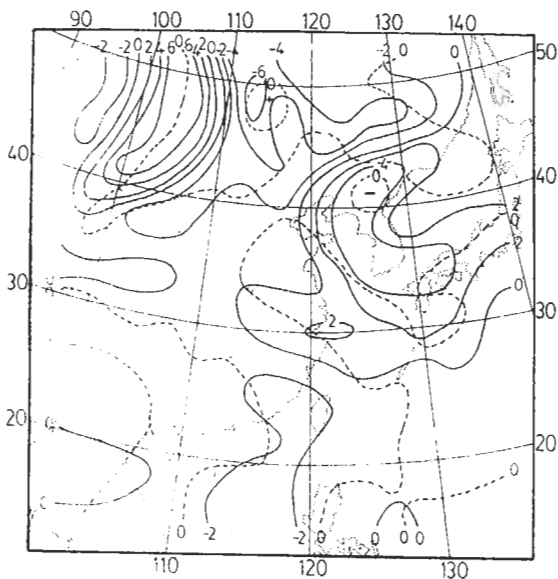


圖 6(a)

，也有氣旋型渦度，強度比校正前略為增加。除低緯度的西太平洋海面為反氣旋渦度區域外，中國東北和華北一帶亦為反氣旋渦度涵蓋的區域。在中南半島及海南島上空，校正後的渦度場出現明顯的封

閉氣旋渦度中心，顯然與 850mb 高度場同位置等高線氣旋曲率互相對應。700mb 層渦度場的分布型態在校正前後並無很大的差異，但是校正後的渦度場不論是氣旋或反氣旋渦度中心均較校正前為強。同時在中南半島上空仍然有氣旋型渦度場出現。

500 mb 層 (圖 6) 日本附近的氣旋型渦度中心較 850mb 及 700 mb 的位置略向北移，而校正後的中心位置又比校正前的位置東移，強度愈見加深。涵蓋中國東北的反氣旋渦度中心在校正後東移。另外海南島及中南半島上空，仍然出現封閉的氣旋中心。而對應於中緯槽的氣旋渦度場，其強度也在校正後有顯著的增強。在 300 mb 層，日本附近的氣旋渦度中心在校正後略有東移並有加強的現象。低緯度區域則完全被反氣旋渦度所涵蓋，其中心位置除了比校正前有顯著的南移之外，強度亦見加大。同時在校正後的渦度場分布圖 (未附在本文中)，仍可發現中南半島上空的封閉氣旋渦度中心。除此之外，整個分布情形與校正前大致相似；不論氣旋型渦度或反氣旋渦度均比校正前加強。200 mb 和 100 mb 兩層的渦度場，情形仍和低層渦度場類似，即校正前後的分布大致相似。綜觀整個天氣系統，經過變分初值化以後的渦度場和輻散場的分布情形大致能與槽線、脊線以及高低壓系統互相配合。

爲了要驗證初值化後的高度場和風場是否能滿足平衡方程式的強勢約束條件，我們把校正前後的高度場分別代入平衡方程式(8)式中，看看 $B(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\phi})$ 和 $B(u, v, \phi)$ 是否爲 0，500 mb 層這兩個畫在圖 7。此圖顯示，校正前後正負值的分布並無很大的差異，但經過變分初值化以後，所得到的誤差 $B(u, v, \phi)$ 較小，也就是說校正後的高度場和風場更能滿足線性平衡方程式。本來根據我們前面所提出的理論，誤差 $B(u, v, \phi)$ 應該是完全等於零的。但由於數值計算的截斷誤差的存在，無法使 $B(u, v, \phi)$ 完全等於零，但已經比用觀測值得到的 $B(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\phi})$ 小得很多了。在低緯度的西太平洋區，校正前後的誤差並無多大變動，且誤差值較小；而誤差值最大的地方，多在各槽脊線及高低壓中心，尤其是位於蒙古附近的低緯槽中心處，誤差值在 200 mb 處達到最高點。

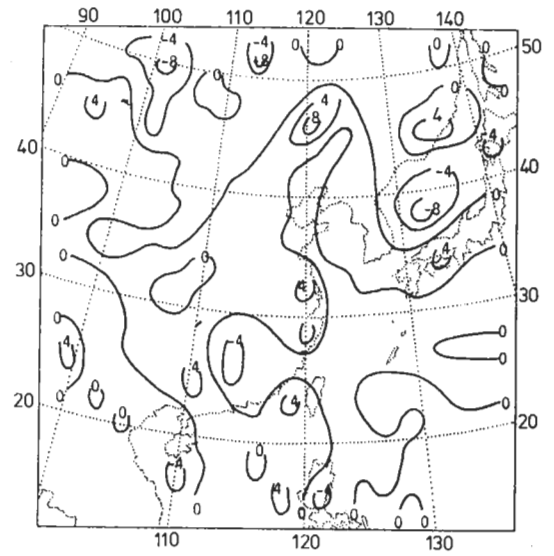


圖 7(a)

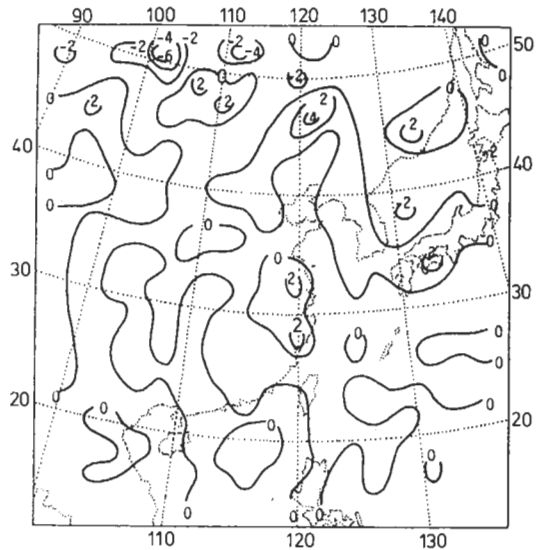


圖 7(b)

圖 7 500 mb 的 $B(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\phi})$ 值, (a) 和 $B(u, v, \phi)$ 值, (b) 單位爲 10^{-9} sec^{-2} 。

爲了要了解以平衡方程式爲強勢約束條件進行高度場和風場的變分初值化是否具有濾波的功能，我們對高度場進行二維的富氏分析，以便觀察高度場在波數域上強度的分布情形。圖 8 表示高度的變異數在波數域上的分布，圖中曲線上的數字代表 10 的冪次，也就是代表高度場在波數域上的數量級。由

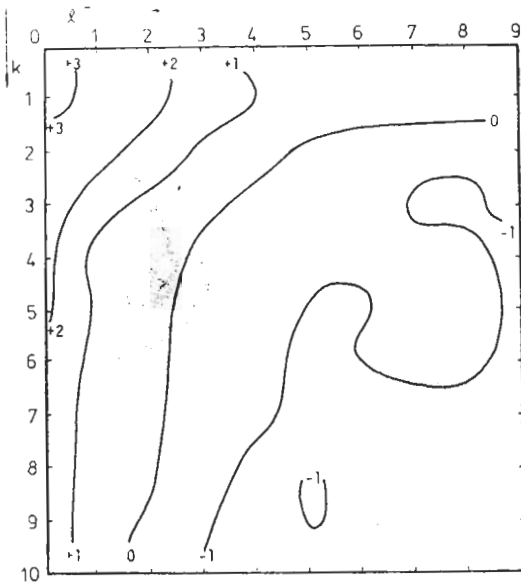


圖 8 (a)

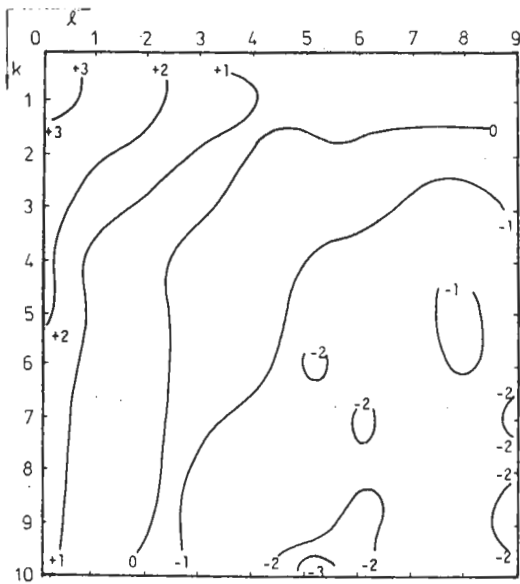


圖 8 (b)

圖 8 500mb 高度場的變異數在波數域的分布 (a) 為校正前的高度場的分布 (b) 為校正後的高度場的分布。圖中曲線上的數字代表 10 的幕次。

圖中可知，500mb 高度場，其長波的強度分布校正前後沒有什麼變化，但是短波的強度在校正以後就減低很多，短波的強度在初值化以後幾乎比校正

之前減少一到兩個數量級。從這裏我們可以看出來，利用變分最佳化原理，使初值化後的高度場和風場滿足平衡方程式的強勢約束條件，的確會濾除短波，並使高度場和風場達到一定的平衡狀態。

四、結 語

初值化到現在為止，仍然是數值天氣預報主要的問題之一。由於觀測技術的限制，以及中小尺度運動的影響，不易得到能代表大氣大尺度運動的初值場。在數值預報過程中，若初值場未能保持準地轉平衡，就會激發慣性重力波，影響預報的精度，甚至得到完全不合理的結果。現在一般原始方程式預報通常直接用平衡方程式，由高度場求得風場，完全不用風場的觀測值。風場的觀測值一般說來精度較差，但仍然是一個重要的資訊。本研究針對初值化問題，同時利用高度場和風場的觀測值，以線性平衡方程式為強勢約束條件，進行變分最佳分析來校正高度和風場，以作為數值天氣預報的初值之用。

以線性平衡方程式為約束條件，利用變分原理可得到兩個分析方程式。這是兩個聯立的橢圓型偏微分方程式，可用緩和法來求解。一般說來，變分最佳分析最大的問題在於如何選用合理的權重值。雖然我們用了兩個權重，但是實際上只有一個獨立的權重。先給出一個權重值，然後再求出新的權重值，如此重複運算十次，若權重值變動不大，就採用這個值當作合理的權重值。用這個合理的權重值，就可得到校正後的高度場和風場了。我們在這裏提出的權重值合理的求法，在例行初值化時也可使用，這樣可以解決了若干變分最佳分析的問題。

校正後的高度場和風場和原來的觀測值，在分布的型態方面沒有什麼差異，但兩者在數值上當然會有不同，因為校正後的高度場和風場是完全滿足線性平衡方程式的。我們發現，校正前後氣象場的差值在高低氣壓中心、槽脊線以及梅雨鋒面帶等處較大。這是因為在這些地區，線性平衡方程式較不能描述大氣大尺度運動的特性。使用完全的非線性平衡方程式來進行初值化，改進上述的缺點，將是未來研究的目標。

本研究對高度場進行二維的富氏分析。研究結果顯示，高度場的長波的強度分布在校正前後並無差異，但是短波的強度在校正以後就顯著的減小了。從這裏可以看出，進行變分最佳初值化，使校正後的高度場滿足線性平衡方程式，可以濾除氣象場中的短波。

致 謝

本研究是在行政院國家科學委員會專題計畫“數值天氣預報變分初值化之研究”支持下完成的。中央研究院資訊研究所提供電子計算機使用上的方便，本研究才得以順利的完成全部複雜的計算工作。最後中央研究院物理研究所陳鈞珍小姐協助圖表的繪製工作，在此一併致謝。

參 考 文 獻

- 王金慶，1981：線性平衡之有限元素變分佳化分析。大氣科學第八期，27～41，中華民國氣象學會。
- Benwell, G. R. R., and F. P. Bretherton, 1968: A pressure oscillation in a 10-level atmospheric model. *Quart. J. Roy. Met. Soc.*, 94, 123～131.
- Charney, J. G., 1955: The use of the primitive equations of motion in numerical prediction. *Tellus*, 1, 22～26.
- Chester, C., 1977: *Techniques in partial Differential Equations*. McGraw-Hill, 440 pp.
- Haltiner, G. J. and R. T. Williams, 1980: *Numerical Prediction and Dynamic Meteorology*. John-Wiley, New York, 477 pp.
- Hinkleman, K., 1951: Der Mechanismus des meteorologischen Lärmes. *Tellus*, 3, 385～396.
- Phillips, N. A., 1959: An example of nonlinear computational instability. *The Atmosphere and Sea in Motion*, Rockefeller Institute Press, New York, 501～504.
- Ritchie, A. A., 1975: A variational optimization analysis approach to continuous data assimilation. Ph.D. Dissertation, University of Oklahoma, Norman, Oklahoma, 98 pp.
- Sasaki, Y., 1955: An objective analysis based on the variational method. *J. Meteor. Soc. Japan*, 36, 77～88.
- Sasaki, Y., 1969 a: Numerical variational method of analysis and prediction. *Proc. WMO/IUGG Symposium on Numerical Weather Prediction*, Tokyo, Japan, Nov. 26-Dec. 4, 1968, Japan Meteor. Agency, Japan, VII 23～25.
- Sasaki, Y., 1969 b: Proposed inclusion of time variation terms, observational and theoretical, in numerical variational objective analysis. *J. Meteor. Soc. Japan*, 47, 115～124.
- Stefens, J. J., 1970: Variational initialization with the balance equation. *J. Appl. Meteor.*, 9, 732～739.

Variational Initialization in Numerical Weather Prediction

Chung-yi Tseng

Institute of Physics, Academia Sinica
Dept. of Atmospheric Sciences,
National Taiwan University

Meng-jyue Yu

Institute of Geography
Chinese Culture University

Abstract

The variational optimization technique is used to develop an operational scheme for the initialization of meteorological fields in the numerical weather prediction. This scheme considers the linear balance equation as a strong constraint so that the adjusted height and wind fields completely satisfy this equation. The resulting analysis equations are two coupled elliptic equations, which may be solved by the relaxation method. The general pattern of the adjusted height and wind fields is quite the same as the observed fields. However, there is some difference in the numerical values, since the adjusted fields satisfy the balance equation, while the observed fields not. Variance spectrum analysis of the height field indicates that the short wave components have been completely suppressed, while the long wave components remain intact. Thus the dynamic constraint has an effect of smoothing and filtering.