經驗正交展開的原理和應用

馬　汝　安

摘　要

一般探索性研究考慮的變數相當多，使得研究者無法很有效率的處理。我們如何利用這些變數間的相依結構將這些許多的變數濃縮，但還能夠把原來變數能解釋的變異由濃縮後所得的主要分量來解釋。

研究大氣環流與氣候之關係最有用的一種正交空間函數就是經驗正交函數（簡稱EOF）。而EOF分析的目的就是討論如何透過較少數的主要分量（原變數之線性組合）以解釋協方差結構（協方差矩陣或稱共變異數矩陣能夠表現原來觀測之變異情形）。在此目的下本文就其原理和應用加以探討。

一、前言

一般探索性的研究（Exploratory studies）考慮的變數均會太多而無法一一處理。例如要探討東亞地區天氣與氣候現象的特徵，經過調查後也許可得幾十個，幾百個變數（特徵），例如X_1＝氣壓，X_2＝高度，X_3＝溫度，X_4＝雨量，X_5＝風，……。以致研究者有時候會因變數太多而無法有效的處理。如何利用這些變數間的相依結構（dependent structure），將這許多的變數縮減，但是還能夠把原來變數能夠解釋的變異由縮減後所得的主要分量（principal components，或稱主要成分）解釋呢？只好借助統計的方法來做有效的分析，求得接近正確結果的近似值。

吾人引用適當的數學函數，常可表示某一氣象要素在空間分佈的概況。即任一氣象要素之空間變化可選用正確的數學模式表示之。如果此模式之特性與該要素實際分佈情形關係密切，則吾人可經由數值方法，透過此模式研究較複雜之現象。（Barry & Perry，1975）。

經驗正交函數（Empirical Orthogonal Function，簡稱EOF）以及把一個函數按經驗正交函數展開，這是近十多年來發展出來的數學方法之一，現在已廣泛地應用在氣象學、海洋學，以及地球物理中。它有顯示氣象要素空間分佈特徵之能力，即將問題留給大自然自己解決，較吾人以預定方式處理未定之事件爲佳，如緯向調和分析（劉1976）。

EOF（主要分量）分析的目的就是討論如何透過較少數的主要分量（原來變數之線性組合）以解釋協方差結構（Covariance Structure）（協方差矩陣或稱共變異數矩陣能表現原來觀測之變異情形）。即依原來變數（X_1，X_2，………，X_p）以建立較少數的線性組合，其能解釋原來變數之大部分變異（variation），這些線性組合在某些條件下有最大的變異數，吾人稱之爲主要分量，其中以固有向量（固有函數）表示主要分量係數，而固有值表示分量之變異數。主要分量是隨機變數之線性組合，亦是一隨機變數，一般用變異數表示其特性。也就是說吾人想要利用少數幾個變數來表示空

間場隨時間變化的重要性。我們所需要的變數個數遠少於觀測點（站）的個數。能否達到這個目的就要看我們所分析之空間場的特性而定。

由前所述，可知協方差矩陣之固有值與固有向量是經驗正交函數（EOF）分析之精華。這些固有函數決定N個觀測極大變異（Maximum Variability）之方向，而有固值載明此最大變異數。當前面少數幾個固有值遠大於其餘者時，總變異數之大部分可由這少數（$\ll P$）個主要分量解釋。

理論上，雖然由P個變數能求得P個主要分量，而且此P個主要分量可再生原來的P個變數所產生的總變異，但是大部份的變異數能由較少數的q（$\ll P$）個主要分量解釋，如果是如此的話，這q個主要分量所含的資訊（information）幾乎會與原來P個變數一樣多。因此，以較少數的q個分量取代原來的P個變數，並將P個變數的N個觀測所組成的資料集合（資料矩陣）縮減成只有q個主要分量之N個觀測，這種將資料之構面性（dimensionality）縮減（濃縮），稱爲資料之精簡彙總（Parsimonious Summarization）。

一般假設用某種方式定義了函數$X=X_1$，X_2，……，X_p之後（X爲高度或溫度函數），發現所有各站高度或溫度變異數（隨時間的）之80％可由函數X_1，X_2，……，X_q來解釋（其中$q\ll p$），而剩下的20％則要靠其他函數來解釋。如果我們認爲只要能表示出隨時間變異量的80％就已經滿足，那麼就可以將X用X_1，X_2，……X_q精簡式來估計。這就表示僅僅靠q個時間序列就能夠近似地描述p個測站的高度（或溫度）場隨時間變化的情形。

二、基本原理

1. 經驗正交向量（函數）

用正交向量來代表一個氣象場，有好幾種不同的觀念來說明。設$f(x, k)$是空間點x和參數k的函數，其中x代表區間D中的一點，k代表樣品空間Ω中的一點。當參數k取一個給定的值時，函數$f(x, k)$就是空間點的函數，此時這個函數稱爲一個樣品。在一定的空間範圍D內取出所有這些樣品，稱其全體爲樣品集合F。故可寫爲

$$f(x, k)\in F \qquad x\in D,\ k\in\Omega$$

例如探討東亞地區500 mb高度場的問題，那麼500mb高度場就是函數f，測站位置就是空間點x，時間就是參數k，D就是需要考慮的東亞地區，取東亞地區各個測站數年的500mb高度場資料，就組成了樣品集合F，而樣品空間就是所有的觀測時間。

爲了簡便起見，只討論一維空間的情況，其結果也適用於二維空間的問題。假設x和k是離散的，即x只有有限個點x_n，$n=1, 2, \ldots\ldots, N$，而且只取有限個樣品$k=1, 2, \ldots\ldots, k$。其中N是空間點的個數，k代表樣品序號，而k代表樣品總數。換句話說，要針對離散變量的函數

$$f(x_n, k)\in F$$
$$n=1, 2, \ldots\ldots, N$$
$$k=1, 2, \ldots\ldots, \mathrm{k}$$

進行統計分析。在此情形下，將$f(x_n, k)$用N維空間的k個樣品向量$\underset{\sim}{f}(k)$表示比較方便，即

$$\underset{\sim}{f}(k)=[\,f_1(k)\quad f_2(k)\cdots\cdots f_N(k)\,]^{*}$$
$$k=1, 2, \cdots, \mathrm{k} \qquad (1)$$

其中星號*表示矩陣的轉置

$$f_n(k)=f(x_n, k) \qquad n=1, 2, \cdots, N$$

例如探討某個測站上500個時間的500mb上高度場分布時，$N=1$，$K=500$。總共有500個向量$\underset{\sim}{f}(k)$，$k=1, 2, \cdots, 500$，這些向量的分量就是某站500mb上的高度。

希望求得N個標準化正交向量$\underset{\sim}{u}_n$，$n=1, 2, \ldots\ldots, N$。所謂標準化就是$\underset{\sim}{u}_n$的長度等於1，即

$$\underset{\sim}{u}_n^{*}\underset{\sim}{u}_n=1 \qquad n=1, 2, \cdots, N \qquad (2)$$

所謂正交就是這N個向量互相垂直，即

$$\underset{\sim}{u}_n^{*}\underset{\sim}{u}_m=0 \qquad n\neq m \qquad (3)$$

N個標準化正交向量求出後，將$\underset{\sim}{f}(k)$，對$\underset{\sim}{u}_n$展開

$$\underset{\sim}{f}(k)=\sum_{n=1}^{N}C_n(k)\,\underset{\sim}{u}_n \qquad (4)$$

其中$C_n(k)$是展開係數，∵$\underset{\sim}{u}_n$是正交向量，故$C_n(k)$

就是$f(k)$在u_n上的投影，

$$C_n(k) = f^*(k)\, u_n \tag{5}$$

將$f(k)$對一組正交向量展開，最大的好處是很容易的就可求出展開係數，這就是為什麼要用正交向量的原因。

本來$f(k)$一定要用N個標準化正交向量u_n來展開，可是我們希望只用前面M個（$M<N$）來展開就足夠精確了。換句話說，只用N個中的M個標準化正交向量就足以同時表達所有的觀測向量$f(k)$了。因為u_n，$n=1,2,\cdots\cdots,N$ 是待求的向量，所以可將要用到的M個全放在前面。若只用(4)式右邊的前面M項，則

$$\hat{f}(k) = \sum_{n=1}^{M} C_n(k)\, u_n \tag{6}$$

當然就和$f(k)$並不完全一樣，總有一些誤差。設誤差向量$f(k)-\hat{f}(k)$的長度是$\delta(k)$，即

$$[\delta(k)]^2 = (f-\hat{f})^*(f-\hat{f}) \tag{7}$$

由(4)(6)式可知，$f-\hat{f}$和$\hat{f}$正交（圖一所示），故

$$(f-\hat{f})^*\hat{f} = 0$$

因此(7)式變為

$$[\delta(k)]^2 = (f-\hat{f})^* f = f^*f - \hat{f}^*f \tag{8}$$

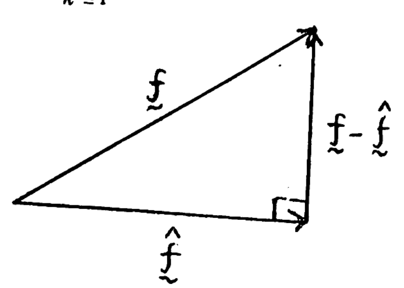
又 $\because \ \hat{f}^*f = \hat{f}^*(f-\hat{f}+\hat{f}) = \hat{f}^*\hat{f}$

故(8)式可改寫為

$$[\delta(k)]^2 = f^*f - \hat{f}^*\hat{f} \tag{9}$$

需要指出的是，上述結果可從圖一中利用畢氏定理得到。∵誤差向量長度$\delta(k)$與k有關，∴不是表達誤差的最好度量。因此誤差最好度量該是平均誤差δ_M^2

$$\delta_M^2 = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{k}[\delta(k)]^2 = \overline{[\delta(k)]^2}$$



圖一、$f-\hat{f}$和$\hat{f}$正交圖。

現在的問題就是要決定合適的u_n，使得δ_M^2為極小。將(9)式代入上式得到

$$\delta_M^2 = \overline{f^*f} - \overline{\hat{f}^*\hat{f}}$$

再將(6)式代入上式得到

$$\delta_M^2 = \overline{f^*f} - \sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\overline{c_n c_m}\, u_n^* u_m$$

$$= \sum_{n=1}^{n}\overline{f_n^2} - \sum_{m=1}^{M}\overline{c_m^2} \tag{10}$$

由(5)式可知 $c_m^2 = u_m^* f f^* u_m$

故(10)式變為

$$\delta_M^2 = \sum_{n=1}^{N}\overline{f_n^2} - \sum_{m=1}^{M} u_m^*\overline{ff^*}\, u_m$$

$$= \sum_{n=1}^{N}\overline{f_n^2} - \sum_{m=1}^{M} u_m^* c_f u_m \tag{11}$$

其中c_f就是$f(k)$的協方差矩陣

$$c_f = \overline{ff^*} = \begin{bmatrix} \overline{f_1f_1} & \overline{f_1f_2} & \cdots\cdots & \overline{f_1f_N} \\ \overline{f_2f_1} & \overline{f_2f_2} & \cdots\cdots & \overline{f_2f_N} \\ \overline{f_Nf_1} & \overline{f_Nf_2} & \cdots\cdots & \overline{f_Nf_N} \end{bmatrix} \tag{12}$$

必須注意，在本節中均假設$f(k)$的樣品平均為零，即

$$\overline{f}(k) = 0$$

假如$f(k)$的樣品平均不為零，可將$f(k)$減去其樣品平均，就可得到一個樣品平均為零的觀測向量了。

因為協方差矩陣是正定的，即對任何分量不全為零的向量u_m來說，

$$u_m^* c_f u_m > 0$$

故由(11)式可知，求δ_M^2為極小就是求正定二次形$u_m^* c_f u_m$在約束條件

$$u_m^* u_m = 1$$

下達極大值。我們知道使正定二次形$u_m^* c_f u_m$在約束條件下達極大值的向量就是c_f的固有值u_m，即

$$c_f u_m = \lambda_m u_m \tag{13}$$

此時二次形的值是 $u_m^* c_f u_m = \lambda_m$ (14)

c_f是$N\times N$方陣，它有N個固有值λ_m，$m=1,2,\cdots\cdots,N$，∵ c_f是對稱正定方陣，故其固有值均大於零，對應於不同固有值的固有向量都互相正

交。這些固有向量u_m，$m=1,2,\cdots\cdots N$ 就是經驗正交向量。因為是由實際資料得到的，所以叫經驗正交向量。

在實際問題中，這些固有值很少相等的，現按大小次序排列，$\lambda_1>\lambda_2>\cdots\cdots>\lambda_N>0$

則前面M個固有向量就是所要求的M個經驗正交向量，而按(5)式算得的c_n，$n=1,2,\cdots\cdots M$就是這M個展開係數。另外由(11)和(14)式，可得到平均誤差為

$$\delta_M^2 = \sum_{n=1}^{M}\overline{f_n^2} - \sum_{m=1}^{M}\lambda_m \tag{15}$$

δ_M^2 就是用M個展開係數來線性表示觀測向量的最小平均誤差。

∵方陣的迹（trace）等於其固有值之和，即

$$\sum_{n=1}^{N}\overline{f_n^2} = \sum_{m=1}^{N}\lambda_m$$

故由(15)式，得 $\delta_M^2 = \sum_{m=M+1}^{N}\lambda_m$ (16)

由(16)式可知，即使用經驗正交展開，要準確無誤的表示每一個樣品，必須用N個參數，因為只有當$M=N$時，

$$\delta_M^2 = 0$$

換句話說，若樣品$f(k)$有N個分量，則需用N個參數c_m，$m=1,2,\cdots\cdots N$來準確無誤的表示這樣品向量$f(k)$。但因這些樣品之間多少有某一定的關係，就是$f(k)$隨空間的變化有一定的規律性，這就使得只用$M<N$個參數來表示每個樣品，在統計意義上是可取的。

寫到這裏，經驗正交向量的定義就非常清楚了。一個變數$f_n(k)$的經驗正交向量就是其協方差矩陣$c_f=\{\overline{f_if_j}\}$的$N$個固有向量$u_n$，$n=1,2,\cdots\cdots N$。$c_f u_n = \lambda_n u_n$ 其中λ_n，$n=1,2,\cdots\cdots N$是它的固有值。因為協方差矩陣c_f是對稱正定方陣，它的固有值都是正數，且對應於不同固有值的固有向量都是正交的，此外這些固有向量也可變為標準化。換句話說，這些固有向量是標準化正交向量：$u_m u_n = \delta_{mn}$，其中δ_{mn}為克羅內克符號（Kronecker delta）

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m=n \\ 0, & m\neq n \end{cases}$$

將樣品向量$f(k)$對u_n展開就叫經驗正交展開：

$$f(k) = \sum_{n=1}^{N} c_n(k)\, u_n$$

其中$c_n(k)$是展開係數，它就是$f(k)$在u_n上的投影：

$$c_n(k) = f^* u_m$$

對某一個固定的n而言，$c_n(k)$是k的函數，它就叫第n個固有向量u_n的主要分量（或稱主要成分）。因為k是樣品序號，在氣象問題中，k通常代表時間，故$C_n(k)$通常是一個時間序列。

2 經驗正交向量及主要分量的幾何意義

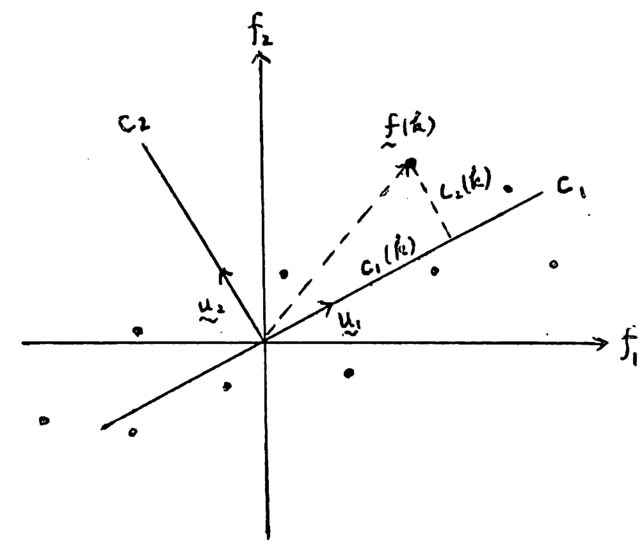
$$f(k) = \sum_{n=1}^{N} c_n(k)\, u_n$$

$$c_n(k) = f^*(k)\, u_n \tag{2}$$

為了解釋方便起見，考慮$N=2$的情形

由(1) $f(k) = c_1(k)\,u_1 + c_2(k)\,u_2$ (3)

∴ $c_1(k)$和$c_2(k)$就是$f(k)$在正交單位向量u_1，u_2上的投影。如圖二所示，以f_1和f_2分別為橫坐標和縱坐標，將$f(k)=(f_1(k)\ f_2(k))^*$，$k=1,2,\cdots\cdots K$等K個點畫在圖上，得到了一個散布圖。原點可放在$f(k)$的平均值上，即$\overline{f}_1(k)=0$，$\overline{f}_2(k)=0$。現在將f_1f_2坐標軸轉動一個角度就得到新坐標軸c_1c_2，其單位向量分別為u_1，u_2。



圖二、f_1f_2散佈圖。

故 $c_1(k)$ 和 $c_2(k)$ 就是 $f(k)$ 在新坐標軸上的投影。也就是說，這 K 個點若用新坐標表示就是 $c_1(k)$，$c_2(k)$。

我們可以證明，若要求 $c_1(k)$ 的變異數爲極大，則 u_1 就是第一個經驗正交向量，因爲 $c_1(k)$ 的變異數爲

$$\overline{c_1^2(k)}=\overline{(u_1{}^*f)(f^*u_1)}=\overline{u_1ff^*u_1}$$

現要求 $u_1^*\,c_f\,u_1$ 在 $u_1{}^*u_1=1$ 的條件下達極大值。此時 $c_fu_1=\lambda_1u_1$ 故 u_1 就是第一個經驗正交函數，而 λ_1 是最大的固有值，又 $\overline{c_1^2(k)}=\lambda_1$。換句話說，若 u_1 爲第一個經驗正交函數，則 $c_1(k)$ 的變異數爲極大，這個極大的變異數等於對應的固有值。

$f(k)$ 的總變異數爲 $\overline{f_1^2(k)}+\overline{f_2^2(k)}=\sum_{n=1}^{2}\overline{f_n^2(k)}$

$=\sum_{n=1}^{2}\overline{c_n^2(k)}$，現在 c_1 軸已解釋了其中 $\overline{c_1^2(k)}$ 的變異數，剩下的變異數是 $\overline{c_2^2(k)}$，若要求剩下的變異數 $\overline{c_2^2(k)}$ 在 $u_1{}^*u_2=0$，$u_2^*u_2=1$ 的條件下達極大值，此時 u_2 就是第二個經驗正交函數。

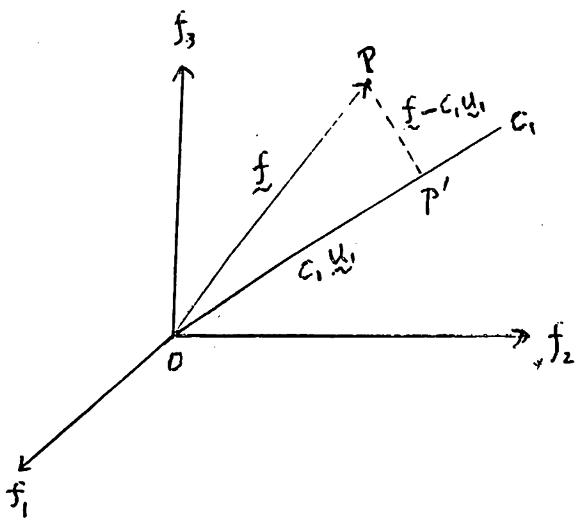
一般的情形，即 $f(k)$ 有 N 個分量的情形，也有類似的解釋。總結的說，若將 $f(k)$ 的協方差矩陣 c_f 的固有值按大小次序排列

$$\lambda_1>\lambda_2>\cdots\cdots>\lambda_N$$

而 $u_1, u_2\cdots\cdots u_N$ 爲對應的固有向量，則經驗正交展開

$$f(k)=\sum_{n=1}^{N}c_n(k)u_n$$

相當於將 $f_1, f_2\cdots\cdots f_N$ 坐標做剛體轉動到 $c_1\ c_2\cdots\cdots c_N$ 坐標。新坐標軸的單位向量分別爲 $u_1, u_2\cdots\cdots u_N$。於是主要分量 $c_n(k)$，$n=1, 2, \cdots N$ 就是向量 $f(k)$ 的新坐標，也就是 $f(k)$ 在 u_N 上的投影。我們選擇 c_1 軸及單位向量 u_1 使得 $c_1(k)$ 的變異數爲極大，c_2 軸及單位向量 u_2 使得 $c_2(k)$ 的變異爲極大，但 c_2 軸必須與 c_1 軸正交。如此類推下去。$c_n(k)$ 的變異數的極大值爲 λ_n。此外新坐標中，這此觀測資料是不相連的，即 $\overline{C_m(k)C_n(k)}=\lambda_n\delta_{mn}$。亦即 $c_n(k)$ 的協方差矩陣是對角矩陣，其對角矩陣就是按大小排列的固有值 $\lambda_1, \lambda_2\cdots\cdots\lambda_N$。



圖三、P 點在 c_1 軸上的投影，其均方距離爲極小。

新坐標軸還有另一個特性。我們所選擇的 c_1 軸會使所有點到它們在 c_1 軸上的投影間的均方距離爲極小，如圖三所示，P 點在 c_1 的投影爲 p' 點，其間的距離平方爲

$$(pp')^2=f^*f-c_1^2(k)$$
$$=f^*f-u_1{}^*ff^*u_1$$

故均方距離爲

$$\overline{f^*(k)f(k)}-u_1^*\overline{f(k)f^*(k)}u_1$$
$$=\sum_{n=1}^{N}f_n(k)f_n(k)-u_1^*c_fu_1$$

亦即要求 $u_1^*\,c_fu_1$ 在 $u_1^*u_1=1$ 條件下達到極大值。我們已知，此時 u_1 就是對應於 c_f 最大固有值 λ_1 的固有向量，而這個極大值就是 λ_1。

三、應用

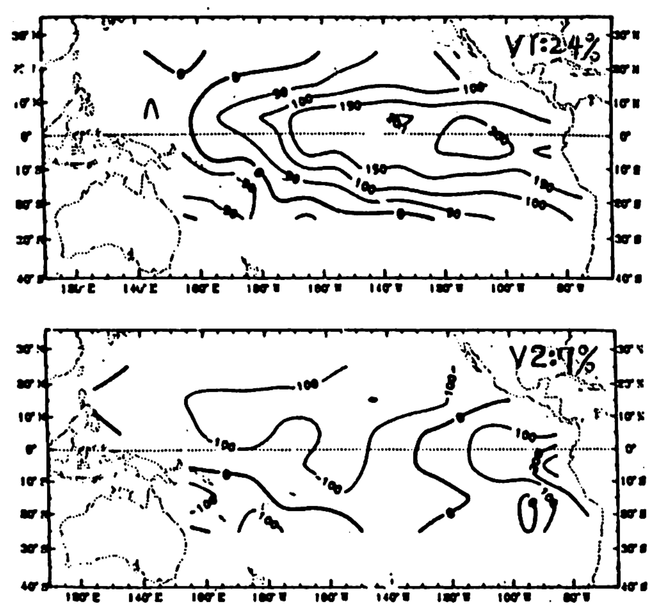
經驗正交函數的形式是根據分析之資料樣品推導出來的。在分析某氣象變數時，我們如將每一個經驗正交函數畫在取得資料的二度空間區域上，就會發現所獲得的圖，和此區域一段長時間的氣候圖上所顯示的該變數的異常型式非常相似。亦即每一個經驗正交函數可以表示導致變數產生異常的一種方式或一種物理機制。因此，經驗正交函數通常都具有比較明顯的物理意義。關於經驗正交函數的應用方面將做下述的說明：

1　氣象異常型式之空間分布情形。

如探討某地區地面氣溫、降水量、海平面氣壓及高度場等之異常型式。邱爾文（1981）利用經驗正交函數分析台灣地區氣象異常型式，結果顯示地面氣溫、降水量及海平面氣壓異常型式之空間分布情形，能由最主要之各有關經驗正交函數來表示。另外 Grimmer 1963，Kutzbach 1967，Sellers 1968，Stidd 1967，Walsh 1980，DIAZ 1981，LYONS 1982 等之研究亦有相同的看法。

2　有效的濃縮資料及研究大氣環流與氣候之關係最有用。

我們選用經驗正交函數分析研究大尺度環流與氣候型態時，解釋隨時間變異的 80％或 80％以上，所需的函數個數，往往只有觀測個數的三分之一左右。由此可以看出經驗正交函數分析乃是求大區域氣候變動指數的理想方法。而經驗正交函數分析的目的就是討論如何透過較少數的主要分量以解釋原來觀測的變異情形，以便達到有效濃縮資料的目的。



圖四、熱帶太平洋區SST之經驗正交函數分布

(a)第一個經驗正交函數。

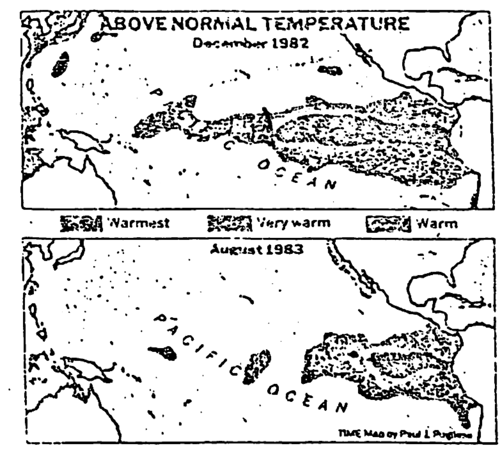
(b)第二個經驗正交函數。

（WEARE, 1982）

3　顯示綜觀氣候型態之能力。

CRADDOCK & FLOOD 1969，Kutzbach 1967，Rinne 1971，Walsh & Mostek 1980 等均認爲經驗正交函數有顯示綜觀氣候型態之能力。

Weare 1982年用 1957-1976 年月平均海面溫度（SST），範圍在 30°N～30°S，120°E～80°W，作經驗正交函數分析厄爾尼紐（Elnino）與熱帶太平洋海面溫度的關係。結果第一、二個經驗正交函數如圖四所示。通常在耶誕節前後，太平洋赤道水域近南美洲國家的外海，會出現一股似乎極度加溫的溫暖洋流，吾人稱爲厄爾尼紐，如圖五所示。我們將圖四(a)與圖五(a)比較，圖四(b)與圖五(b)比較，可發現經驗正交函數有顯示氣候型態之特徵能力，兩者在型態（Pattern）上非常接近。



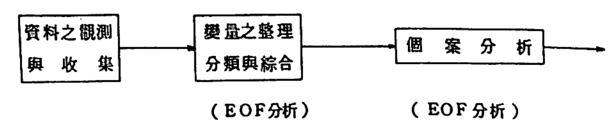
圖五、厄爾尼紐（圖中最黑的區域）

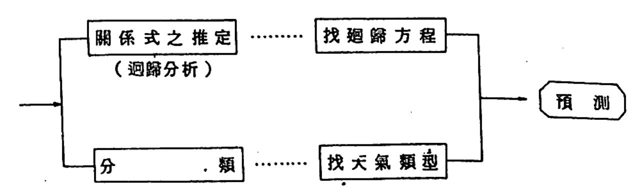
(a) 1982年12月 Elnino 異常暖海溫的分布。

(b) 1983年8月 Elnino 異常暖海溫的分布。

4.　預測上之可能性

(1)





⑵ CRADDOCK & FLOOD 1969 ，BRIER &MELTESEN 1976 ，PAEGLE & HASLAM 1982 等均提出經驗正交函數可做綜觀氣候和長時間的天氣預報。前面幾個經驗正交函數可解釋綜觀氣象型態。

⑶熱帶低壓路徑預報

SHAFFER & ELSBERRY 1982 年所做的研究，其結果顯示使用經驗正交函數做颱風路徑 12 小時到 84 小時預報要比美國海空軍聯合颱風警報中心（JTWC）的預報誤差小 15 %。故其認爲經驗正交函數基本廻歸近似在預報颱風移動是一個簡單且價廉的方法。

四、結論

經驗正交函數是研究大氣環流與綜觀氣候之關係最有用的一種正交空間函數，它有顯示氣象要素空間分布特徵之能力，將問題留待大自然自己解決，不須以預定之方式來處理未定之事件。故近年來常被廣泛地應用在氣象學上。

本篇乃筆者修習經驗正交函數之心得，其中錯誤之處，尚冀師長、長官、先進指正。

致　　謝

本文得以順利完成，首應感謝台大大氣科學研究所曾教授忠一的熱心指導及提供卓見。並感謝專題討論課堂上教授及同學們的討論及建議，使我獲益良多。

參考文獻

1. 劉廣英，1976：緯向調和及其在氣象要素表示上之應用。氣象預報與分析第六十七期，p37～40。
2. 曾忠一，1983：大氣遙測原理與應用。第五章。中央氣象局出版。
3. 曾忠一，1984：客觀分析，第四、五章。理論氣象講座第 32 卷。
4. 邱爾文，1984：經驗正交函數在氣象上之應用。華岡氣象第七期，p37～39。
5. Barry, R. G., and Perry, 1975: Synoptic Climatology Methods and Applications. 104-106, 109-111, 268-274. 歐亞書局出版社。
6. Chiou Er-woon, 1981: Eigenvector Analysis of Meteorological Anomaly Pattern in Taiwan. Bulletion of Geaphysics. No.22, 55-67.
7. Craddock & Flood, 1969: Eigenvectors for representing the 500 mb geopotential surface over the Northern Hemisphere. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., 95, 576-593.
8. Diaz, H. F. and D. C. Fulbright., 1981: Eigenvector Analysis of seasonal temperature, Precipitation and Synoptic-scale system Frequency over the contiguous United States. Part I: Winter. Mon. Wea. Rev., 109, 1267-1284.
9. Grimmer, M., 1963: The space-filtering of monthly surface temperature anomaly data in terms of pattern, using empirical orthogonal functions. Quart. J. Roy. Meteor. Soc., Vol. 89, 395-408.
10. Kutzbach, J., 1967: Empirical eigenvectors of sea level pressure, surface temperature, and precipitation complexs over North America, J. Appl. Meteor., Vol. 6, 792-802.
11. Lyons, S. W., 1982: Empirical arthogonal Function Analysis of Hawaiin Rainfall. J. Appl. Meteor., 21, 1713-1729.
12. Meltesen, G. T., and Brier, 1976: Eigenvector Analysis for prediction of time series. J. Appl. Meteor., 15, 1307-1312.
13. Paegle, J. N. and R. B. Haslam., 1982: Empirical orthogonal Function Estimates of Local Predictability, J. Appl. Meteor., 21, 117-126.
14. Rinne, J., 1971: Investigation of the forecasting error of a simple barotropic model with the aid of empirical arthogomal function. Part II. This issure of Geophysica, 214-239.
15. Shaffer, A. R. and R. L. Elsberry 1982: A statistical-climatological Tropical cyclone Track prediction Technique Using an EOF Representation of Synoptic Forcing. Mon. Wea. Rev., 110, 1945-1954.

（下接第 9 頁）