新顯函法在原始方程式積分上之應用

簡 來 成
中央研究院物理研究所

（中華民國七十二年二月二十三日收件）

摘 要

一種新嘗試的顯函數值方法，空間的微分用modified differential quarature，時間積分用 rational Runge-Kutta法，其運算與顯函法一樣的簡便，不需解代數聯立方程式。在不影響計算的穩定性與精確度下，其時間積分增量可放大，有如同隱含法之長處，但不需用反矩陣之運算。以相同的初始條件與邊界條件，用原始方程式計算 24 小時後的天氣形勢，用本文的方法與顯函法所預測的結果，有效數字三位完全相同。

一、前 言

描述大氣運動現象的方程式，皆為一組非線性聯立的偏微分方程式。在實際情況下，不管將其統御方程式如何簡化，欲得到其解析解（ analytic solution ）的機會幾不可能，因此，解大氣現象的問題，數值方法普遍地為學者所採用。

儘管近年來，各種數值方法日新月異地推出，但各種方法僅針對個別問題提出特別的解法。到目前為止，解一般化問題之偏微分方程，其軟體程式（ software package ）尚在萌芽階段，可以說尚未發展成熟供使用（ Malgaad and Sincovec, 1981 ）。

近年來，各種高效率數值方法的發展，在數值天氣預報上佔一重要角色。傳統的 explicit 法，在七十年代普遍地受歡迎（ Shuman and Hovermale 1968, Busbby and Timpson, 1967 ）。但為考慮計算的穩定性與精確度，所用的時間增量不能太大。隨後有 implicit 法之發展，以滿足上述之要求。Robert（ 1969 ）將 implicit 法用於原始方程式模式，其時間增量為 10 分鐘。但此法計算複雜，須較多的計算時間，缺乏作業上的實用價值。隨後有 semi-implicit 法的發展（ McPherson, 1971 ），縮短 implicit 法之作業時間。英國將之用於日常作業（ Burridge, 1975 ）。Gadd（ 1978 ）嘗試用 split explicit 法，以英國的十層原始方程式模式試驗之，其計算時間較 Semi-implicit 法節省三分之一。最近 Chao（ 1982 ）發展 explicit-multiple-time-step 時間積分法，應用於 UCLA 模式，以 72 小時預報，證實此為穩定、有效且準確之方法。

本文嘗試用 modified differential guarature 法應用於原始方程式模式，以寒潮爆發時期東亞地區的天氣形勢當初始條件，作 24 小時之數值天氣預報，其結果與 explicit 法，Semi-implicit 法比較。在不影響精確度情況下，時間增量可與 Semi-implicit 法相等。

二、基本方程式與數值方法

為將 modified differential quarature 法應用於預報方程式。我們採用最簡單的有限地區原始方程式模式。運動方程式與連續方程式之 invariant 形式（ Shuman and Stackpole, 1969; Chien, 1981 ）為：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial x}-fv=\zeta v-\frac{\partial k}{\partial x} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial \phi}{\partial y}+fu=-\zeta u-\frac{\partial k}{\partial y} \tag{2}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+gH_0m^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$=-m^2\left[\frac{\partial(u\phi)}{\partial x}+\frac{\partial(v\phi)}{\partial y}\right] \tag{3}$$

上式中m爲地圖因數，u，v分別爲東向與北向之 scaled 速度分量（速度除以地圖因數），ϕ爲重力位與其平均量gH_0 之變化量，ζ，k分別爲水平相對渦旋度與動能，

$$\zeta=m^2\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{4}$$

$$k=\frac{1}{2}\left[(mu)^2+(mv)^2\right] \tag{5}$$

假設方程式(1)—(3)中，變數u，v，ϕ之空間變化相當平滑，則其微分可寫爲

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}\cong\sum_{j=1}^{N}a_{ij}u_j(t)\text{，}i=1\text{，}2\text{，}\cdots\text{，}N \tag{6}$$

上式$u_i(t)=u(x_i,t)$。係數a_{ij} 可由各種不同方法決定之，在本文中，選用類似 Lagrangian 內插公式之型式

$$\psi_j(x)=\pi(x)/[(x-x_j)\pi'(x_j)] \tag{7}$$

$\pi(x)$爲x之N次多項式。

$$\pi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_N) \tag{8}$$

如是，則(7)式$\psi_j(x)$爲x之$N-1$次多項式。若$u(x)$在網格點上$x=x_1$，x_2，…，x_N諸點皆爲已知值，則我們可建立一個$N-1$次的多項式$u(x)$，來表示原來$v(x)$之值。

$$u(x)=\sum_{j=1}^{N}\psi_j(x)u(x_j) \tag{9}$$

上式對x之微分爲

$$u'(x)=\sum_{j=1}^{N}\psi_j'(x)u(x_j) \tag{10}$$

(10)式與(6)式比較，可知

$$a_{ij}=\pi'(x_i)/[(x_i-x_j)\pi'(x_j)] \qquad i\neq j \tag{11}$$

若$i=j$，運用 l'Hospital's 法則，可得

$$a_{ij}=\pi''(x_j)/[2\pi'(x_j)] \tag{12}$$

將上所述，代入式(5)式，則可得到物理量在某一網格點上之微分值。今考慮一平面上有$M\times N$點，則(1)式可寫爲$M\times N$個對時間之微分方程，以矩陣形式表之爲

$$\vec{u}'=F(\vec{u},\vec{v},\vec{\phi}) \tag{13}$$

$$\vec{u}=(u_{11},u_{12},\cdots,u_{1N},u_{21},\cdots,u_{2N},\cdots,u_{M1},\cdots,u_{MN})^T$$

同理(2)，(3)式可寫成

$$\vec{v}'=G(\vec{u},\vec{v},\vec{\phi}) \tag{14}$$

$$\vec{\phi}'=H(\vec{u},\vec{v},\vec{\phi}) \tag{15}$$

(13)至(15)式之數值解，用 rational Bunge-Kutta（Wambecq, 1978）時間積分法，

$$\vec{g}_1=\Delta t\,\vec{F}(\vec{u},\vec{v},\vec{\phi}) \tag{16a}$$

$$\vec{g}_2=\Delta t\,\vec{F}(\vec{u}^n+c_2\vec{g}_1) \tag{16b}$$

$$\vec{u}^{n+1}=\vec{u}^n+[2\vec{g}_1(\vec{g}_1,\vec{g}_3)-\vec{g}_3(\vec{g}_1,\vec{g}_1)]/(\vec{g}_3,\vec{g}_3) \tag{16c}$$

上式中$\vec{g}_3=b_1\vec{g}_1+b_2\vec{g}_2$，$b_1+b_2=1$，$(\vec{d},\vec{e})$表二向量$\vec{d}$，$\vec{e}$之純量乘積。若$b_2c_2<-0.5$，Wambecq（1978）證實此完全 explicit 之積分，計算穩定性甚高。則由初始條件$t=n\Delta t$可計算得$t=(n+1)\Delta t$之物理量。

除初始條件外，尚需邊界條件，爲了減少邊界反射波及短波之擾動，我們採用多孔海棉阻尼之邊界條件（Perkey and Kreitzberg, 1976），邊界上之物理量隨計算場內的新值而更新，如速度u在邊界上之值，由下式求之

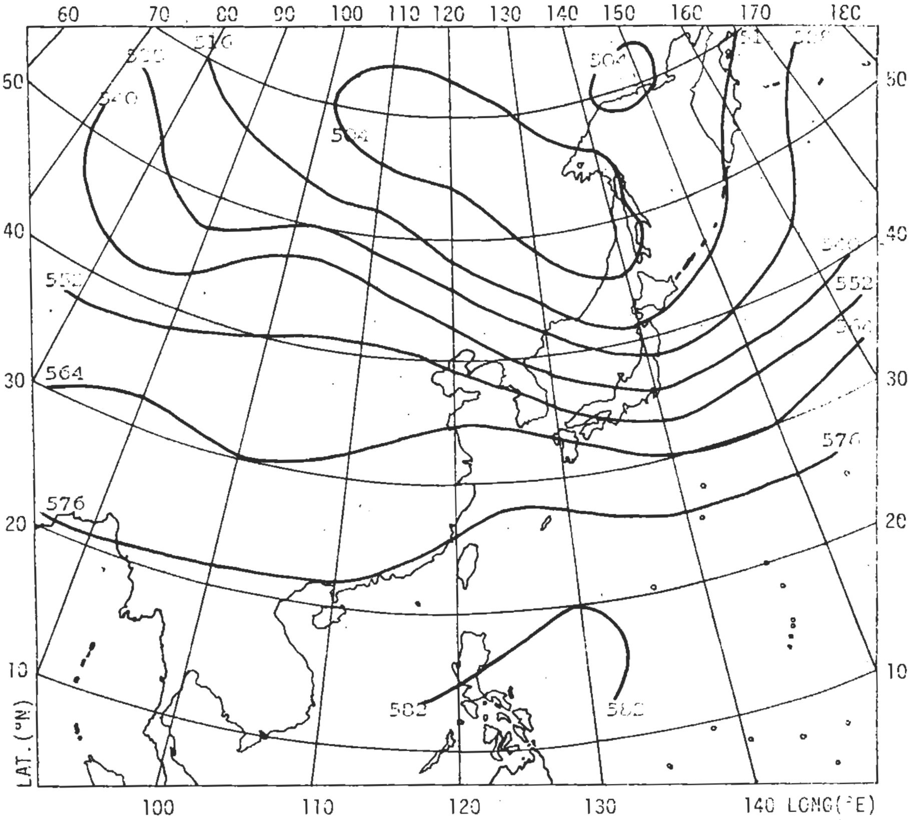
$$u_{ij}^{n+1}=u_{ij}^{n}+0.5\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij}^{n}\Delta t \tag{17}$$

同樣，我們可依此方法求v及ϕ之邊界值。

三、數值實驗

本文探討以上節所提出的新 explicit 法，空間之微分用 modified differential quarature，時間的積分用 rational Runge-Kutta 法，其24小時預報高度場與 explicit 比較，以評估其效益。

數值實驗，以民國 69 年 1 月寒潮爆發期間的天氣系統爲初始資料，探討其低氣壓中心，槽線等之運動。圖一爲民國69年1月27日500 mb. 0000 z 之天氣圖，在105°E，35°N附近，即青康藏高原的東側有一槽線向西南延伸到100°E，25°N附近。另有一槽線在新準噶爾盆地75°E，



圖一 79年1月27日00Z 500 mb高度場

50°N附近向西南延伸到75°E，40°N 附近。高氣壓中心在西伯利亞，即130°E，55°N附近。

24小時後，即1月28日00°E，青康藏高原東側之橫線向東移，由110°E，30°N向西南延伸至105°E，20°N。中緯度之橫線亦向東移，由110°E，50°N向西南延伸至90°E，35°N。在日本附近的槽線亦向東移動（圖二）。

於數值實驗，首先用explicit法，$\Delta t = 6$分鐘，計算24小時之天氣型態。由於此模式爲單層原始方程式模式，沒考慮能量項，故其天氣系統之移動較實際情況緩慢，但是其天氣型態大致符合（圖三）。

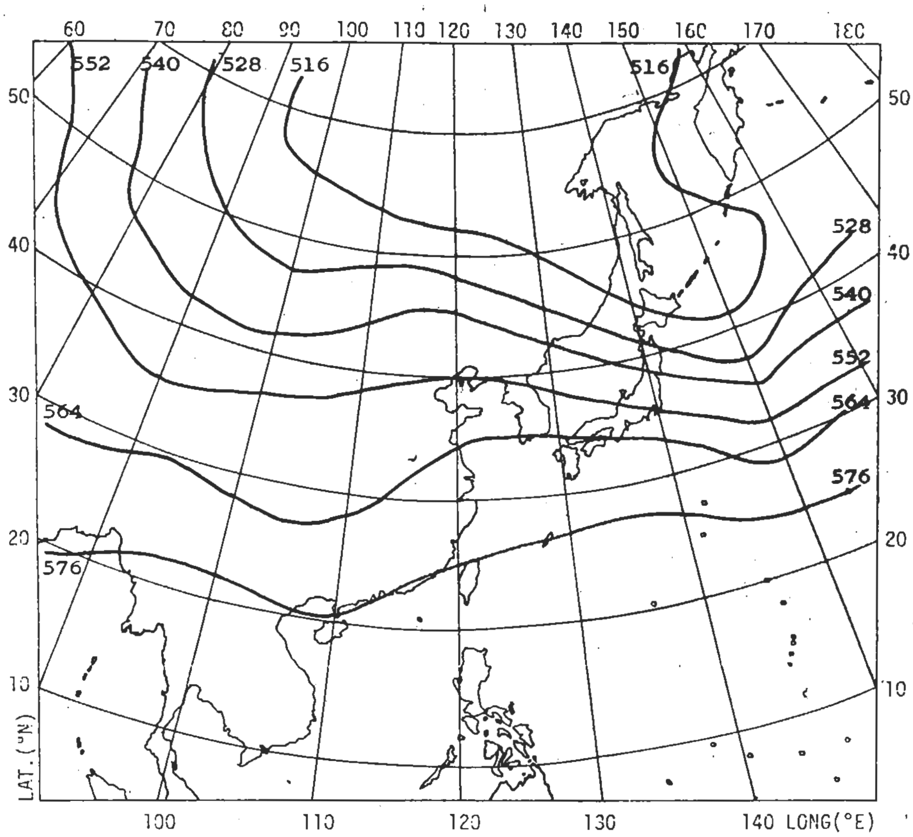
爲了比較，用相同的初始條件與邊界條件，以本文的方法，用30分鐘的時間增量，24小時後的天氣型態大致與explicit法所預測者一致，其計算機印製的報表上三位有效數字完全一樣。

Explicit法計算誠方便，但在原始方程式模式中，用了很多平均程序，本文的modified differential quarature，考慮物理量之空間分布爲平滑（Smooth），無形中用了平均的程序。

Explicit法因時間增量較小，預報24小時之計算次數較多，本文的方法雖計算較複雜，但時間增量可放大。24小時的預報，用CYBER 170-760，explicit法用9.94秒。用本文的方法所需之計算時間爲6.95秒，節省近三分之一的作業時間。

四、結 論

以新的explicit法，空間微分爲modified differential quarature，時間積分用rational Runge-Kutta法，應用於有限地區單層原始方程式模式，爲印證其計算之準確性，先以explicit法，以時間增量爲6分鐘預報24小時以後之高度場。由於本文用簡單的單層原始方程式模式，沒有能量



圖二 79年1月28日00Z 500 mb 高度場

項加進去計算，故天氣系統的運動較實際情況爲慢。槽線等較實際情況移動緩慢。

Explicit 法誠方便，但爲顧慮其計算之穩定與準確度，時間增量不能太大。用本文的方法，運用相同的初始與邊界條件，時間增量用6分鐘時，24小時的預報天氣型態完全與 explicit 法所求者一致。時間增量放大到 30 分鐘時，計算機印出來的結果，有效數字三位完全一樣，即繪製的天氣圖與 explicit 法時間增量爲6分鐘之預報圖無甚差別。

本文所用的空間微分用modified differential quarature 在微分方面提高其精確度，其效果與高階的差分法效果相同。在時間的積分，用 rational Runge-Kutta 法，亦提高其計算之精確度（Wambecq, 1978）。

由本文的探討，可見此發展之 explicit 法應用於原始方程式模式，與 Semi-implicit法一樣，不影響計算之準確度情況下，時間增量可放大。因此，此法值得推廣應用於多層原始方程式模式。

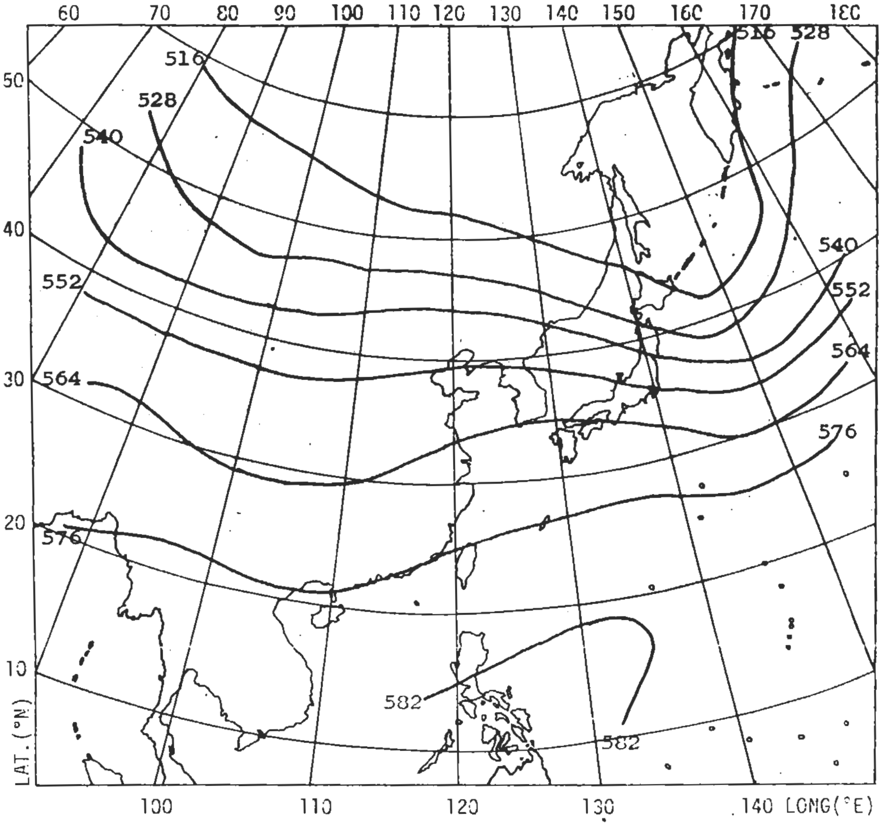
參考文獻

Burridge, D.M. (1975). A split semi-implicit reformulation of the Busbby-Timpson 10-level model. Quart. J. R. Met. Soc., Vol. 101, pp. 777-792.

Busbby, F.M. and M.S. Timpson (1967). A 10-level atmospheric model and frontal rain. Quart. J. R. Met. Soc., Vol. 93, pp.1-17.

Chao, W.C. (1982). Fermulation of an explicit-multiple-time-step time integration method for use in a global primitive equation model. Mon. Weath. Rev., Vol. 110, pp.1603-1617.

Chien, L.C. (1981). On the integration



圖三 79年1月28日00Z 500 mb 預報高度場

schemes for one-level primitive equation model. Atm. Sci., Vol. 8, pp.19-25.

Godd, A.J. (1978). A split explicit integration scheme for numerical weather prediction. Quart. J.R. Met. Soc., Vol. 104, pp.569-582.

McPherson, R.D.(1971). Note on the semi-implicit integration of a fine-mesh limited-area prediction model on an offset grid. Mon. Weath. Rev., Vol. 99, pp. 242-246.

Melgaad, D.K. and R.F. Sincovec (1981). General software for two-dimensional nonlinear partial differential equations. ACM Trans. Math. Softw., Vol. 7, pp. 106-125.

Shuman, F.G. and J.B. Hovermale (1968). An operational six-layer primitive equation model. J.Appl. Met., Vol. 7. pp. 525-547.

Shuman, F.G. and stackpole, J.D. (1969). The currently operational NMC model. Proc. WMO/IUGG Symp. Num. Pred. Tokyo, Nov. 26-Dec. 4, 1968, Japan Met. Agen., Tokyo, pp. II-85—II-98.

Wambecq, A. (1978). Rational Runge-Kutta method for solving systems of ordinary equations, Computing, Vol. 20, pp.333-342.

A New Explicit Method for One-Level Primitive Equation Model

Lai -Chen Chien

Institute of Physics, Academia Sinica

Abstract

A new numerical algorithm is devised for solving primitive equations for numerical weather prediction. The method is based on a combination of modified differential quarature method with rational Runge-Kutta time integration scheme. It is fully explicit, require no matrix inversion, and is stable at much larger time step than the usual explicit method. Prediction prepared by the new algorithm and forecast produced by explicit method agree to three significant figures in twenty-four hours forecast.