

球面二維亂流探討

蔡禹明¹ 郭鴻基²

¹ 空軍氣象中心

² 國立臺灣大學大氣科學研究所

摘要

太陽系中的類木行星，由可見光照片可看出其表面有明顯緯向帶狀的結構，以及大渦旋存在；地球中緯度的高層區域存在著西風噴流，顯示帶狀噴流是行星風系的重要特徵之一。此動力特徵和球面上二維亂流合併的過程，以及背景的行星渦度梯度有關，系統經向的尺度受到萊茵斯尺度（Rhines scale）限制，緯向上可無限制成長，最終形成帶狀的結構，甚至出現如大紅斑的大渦旋。

地球上存在著渦旋與地形，二者皆會造成局部的位渦擾動，不同的地方在於：渦旋會移動，地形則靜止。本文延續前人的研究，使用全球波譜模式為研究工具，進一步探討渦旋與地形對於噴流結構的影響。研究結果顯示：（1）渦旋與地形的附近均出現西風加速的現象。（2）渦旋對於亂流的組織能力與渦旋本身結構有關。（3）地形愈規則，有助於動能在較短時間內反串跌到大尺度，約可減少一半的時間。

關鍵詞：二維亂流、球面諧函數、萊茵斯尺度。

一、前言

航海家 2 號（Voyager 2）所拍攝的木星照片，如圖 1（a）所示，可看出其表面有明顯緯向帶狀的結構，以及位於南半球反時鐘旋轉的大紅斑（great red spot）。圖 1（b）為哈伯太空望遠鏡（Hubble space telescope, HST）所拍攝的土星照片，同樣可看出許多緯向帶狀的結構。地球中緯度的高層區域存在著西風噴流，顯示帶狀噴流是行星風系的重要特徵之一。Huang and Robinson（1998）（以下簡稱 HR98），認為這種現象是球面上二維亂流在合併的過程中，經向上受到萊茵

斯尺度的限制，緯向上可無限制成長，而形成帶狀的結構。他們的實驗模擬在物理空間及波譜分析中，均看出渦度及能量場有呈緯向分佈的現象。

地球上的渦旋會造成位渦擾動。圖 2（a）為 2005 年 8 月 17 日 09Z 的紅外線衛星雲圖，僅於低緯度地區有些零星對流擾動。（b）為 2005 年 8 月 31 日 12Z 的紅外線衛星雲圖，左側是強烈颱風泰利，右側是超級強烈颱風娜比，其周圍由於颱風外圍的下沈氣流，大氣是相當穩定無雲的。因此我們想延續 HR98 的工作，探討渦旋這種高渦度聚集，並隨時

間移動的系統對於噴流的影響。此外，HR98 的工作並沒有地形的效應，地形會造成其周圍位渦的擾動，不同於渦旋的效應在於：地形是靜止的。因此我們亦想要探討這種固定的位渦擾動對於噴流結構的影響。

二、理論工作回顧

f plane 上，正壓強旋轉的二維亂流，在考慮黏滯作用的情況下，其基本方程式如下：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \zeta)}{\partial(x, y)} = \nu \nabla^2 \zeta \quad (1)$$

$$\zeta = \nabla^2 \psi \quad (2)$$

(1) 式為正壓渦度預報方程式，等號左側第二項為渦度平流項，等號右側為黏滯項。(2) 式則為渦度場和流函數之間的關係式。

Batchelor (1969) 由 (1) 及 (2) 式，在考慮近似無黏滯性流體，即 ν 很小的情況下，動能將近似保守，而渦度擬能將往小尺度串跌 (cascade)。這種現象稱為「二維亂流之選擇性衰減」(selective decay of 2-D turbulence)。Kuo et al. (2004) 由模式驗證了這個理論。

二維亂流隨時間會合併成較大尺度的渦旋 (McWilliams, 1984)。當系統尺度不斷增加，將逐漸感受到背景的行星渦度梯度，而激發 β 羅士比波 (β Rossby wave) 將能量由系統中帶走，則系統尺度無法再繼續成長。Rhines (1975) 定義這個最大的尺度稱做萊茵斯尺度 (Rhines scale)，並經由尺度分析，

得到：

$$k_{\beta}^R = \sqrt{\frac{\beta}{V_{rms}}} \quad (3)$$

其中 k_{β}^R 是以波數表示的萊茵斯尺度， V_{rms} 是整個區域中速度場的均方根 (root mean square)，對球體來說，由於只有經向方向上存在行星渦度梯度，因此萊茵斯尺度僅存在於經向方向上，所以萊茵斯尺度是不等方向性的 (anisotropic)。

二維亂流可使用一維能量波譜法分析其特性。由科莫平衡定理 (Kolmogorov equilibrium theory)，定義 ε 為單位質量動能的串跌率，由因次分析，可推導出：

$$E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3} \quad (4)$$

接著，定義 η 為單位質量渦度擬能的串跌率，同樣由因次分析，可推導出：

$$E(k) = C'\eta^{2/3}k^{-3} \quad (5)$$

其中 C 與 C' 為常數。由 (4) 式及 (5) 式，在雙對數座標 (log-log coordinate) 上，動能與渦度擬能串跌的能量波譜，將分別以 $-5/3$ 及 -3 的斜率呈現。分析系統的一維能量波譜可幫助我們瞭解系統是否已達成穩定平衡。Vallis and Maltrud (1993)，在淺水模式中植入無經向變化的餘弦函數地形，實驗結果顯示在地形西側出現南風，東側出現北風，此現象可由位渦守恒解釋。Grose and Hoskins (1979)，在線性化後的淺水模式中植入理

想的緯向風場及地形，可看出在地形下游處出現正渦度，以及一連串向東南方傳遞的波列。

三、模式介紹

本研究使用的模式，是 Kuo et al. (2001) 之球面諧函數全球波譜模式 (spherical harmonics global spectral model)。選用全球模式來作模擬，優點是可以不需要處理邊界條件。球面諧函數：

$$Y_l^m(\lambda, \phi) = P_l^m(\mu) \cdot e^{im\lambda} \quad (6)$$

其中 m 是緯向波數， l 是經向波數， P_l^m 是勒壤得多項式 (Legendre polynomials)。球面諧函數是二維拉普拉斯運算子 (Laplacian operator) 的特徵函數 (eigenfunctions)，如下所示：

$$\nabla^2 Y_l^m = -\frac{l(l+1)}{a^2} Y_l^m \quad (7)$$

因此，我們將感興趣的變數場，投影到正交的球面諧函數後，計算拉普拉斯運算子的效率將遠高於使用有限差分法 (finite difference method)。

數值模擬的部分，考慮模擬的正確性及計算效率，採用 T64，三角形截斷於第 64 個波。東西方向微分運算使用快速傅立葉轉換 (fast Fourier transform, FFT)，以 32 個正弦波和 32 個餘弦波當作基本函數 (basis functions)。南北方向微分運算使用勒壤得多項式轉換，以 64 個勒壤得多項式當作基本函數。同時，南北方向的積分方法使用高斯求積法

(Gaussian Quadrature)，所以在南北方向上的網格點數可減半。如圖 3 所示，T64 全球共有 192×96 個規則分佈的網格點，網格點間距 (grid spacing) 為 1.875 度，在赤道上約為 208 公里。模擬中所植入的亂流場是參考 HR98 植入的初始場：在總波數 35 到 45 之間的所有緯向波譜係數給亂數。時間積分格式使用跳蛙法，時間積分間距為 300 秒，為避免使用跳蛙法而造成時間積分上「奇偶時步分裂」的現象，我們採用羅貝時間濾波器 (Robert time filter)，所使用的係數值為 0.05。

我們以 HR98 中衰減亂流的實驗，作為測試我們模式表現的工具。實驗參數與 HR98 完全相同。模式積分 80 天，取不同亂數值做十組實驗。圖 4 為其中一組實驗之物理空間渦度場，圖 (a) 為初始亂流渦度場分佈，圖 (b) 為積分 80 天後的結果，因為有擴散項，所以渦度值隨時間減小，圖中可明顯看出最終渦度聚集在緯向帶狀的結構中，而這些東西方向帶狀的結構，其在南北方向上的尺度即為萊茵斯尺度。圖 5 為使用二維能量波譜法之分析結果，取積分 80 天後十組實驗的系集平均。圖 (a) 為初始場的二維能量波譜，可看出能量聚集在總波數 35~45 之間。圖 (b) 為積分 80 天後的結果，可清楚看出能量聚集在一個類似漏斗形狀的區域中，顯示動能反串跌到緯向結構中。實驗結果與 HR98 的實驗結果相同，顯示我們的模式有能力模擬這種能量聚集在緯向帶狀結構的現象。如此我們可進一步探討渦旋及地形對於噴流結

構的影響。

四、植入渦旋之實驗

氣候統計資料顯示，每年全球平均有 80 個颱風，假設每個颱風的生命期大約是 8 天，則平均每天全球有 1.75 個颱風。因此，我們想要探討渦旋這種高渦度聚集的系統對於緯向噴流結構的影響。

模式中所使用的正壓方程式為：

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -J(\psi, \zeta + f) - \kappa \zeta - D_c \quad (8)$$

等號右手邊第二項為線性曳力項，加入這個項的原因是為了避免動能往大尺度反串跌的過程中，在萊茵斯尺度的地方累積。給定 $\kappa = 1.157 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ ，其對於渦度場的 e-folding 時間為 1000 天。第三項為高階擴散項，此項的衰減率對於波數是高選擇性的。加入這個項的目的是為了避免渦度擬能在往小尺度串跌的過程中，在最小尺度的地方累積。給定的值對於最高波數的波來說，其解析出之渦度場的 e-folding 時間是 0.5 天。

所進行的第一組模擬實驗，目的是想要比較植入渦旋與未植入渦旋，對於噴流所造成的影響。在實驗 A 中，植入一亂流場，實驗 B 中，植入相同的亂流場外，同時在南北緯 20 度的地方植入兩個強度類似輕度颱風的渦旋。所植入的亂流場計算出均方根速率為 7.00 ms^{-1} 。實驗 B 所植入的二個渦旋，是 DeMaria and Chan (1984) 所使用，當形狀參數 $b = 1.0$ 的渦旋公式，以下簡稱 DC 渦旋。這

種渦旋外圍存在負渦度區，這與目前一些颱風的觀測資料吻合。在我們的模式中，植入渦旋的風場後，再由非線性平衡方程式計算出所對應的渦度場。植入二個 DC 渦旋，將使整個區域的均方根速率增加 0.01 ms^{-1} 。時間積分的部分，模式積分至 3000 天，一個原因是考慮長期來說，全球一直存在二個颱風；另一個原因是根據 HR98 的實驗結果，積分至 3000 天可達到穩定的模擬結果 (steady state)。

圖 6 (a) 為實驗 A 之初始亂流渦度場。(b) 為實驗 A 積分 3000 天後的渦度場結果，出現大尺度的渦度帶，由於有衰減項，渦度帶很弱。實驗 B 之初始渦度場與實驗 A 相似。(c) 為實驗 B 積分 3000 天後的渦度場結果，在植入渦旋的附近出現二條明顯的渦度帶，推測原因是因為渦旋具有較強的非線性平流效應，有利於組織其附近的亂流形成結構較紮實的渦旋，進而具有更強的組織能力，因此藉由非線性效應可以抵抗線性曳力項和高階擴散項的衰減效應。

Kuo et al. (1994) 研究在比克萊東風噴流 (Bickerly easterly jet) 的環境中，若有小擾動，將產生正壓不穩定，則渦度帶的緯向波長約為經向寬度的 4 倍。由圖 6 (c) 最後渦度場的分佈，北半球的渦度波長約為 45° ，而經向寬度約為 11° ，與 Kuo et al. (1994) 的結果相吻合。

圖 7 為實驗 A 之緯向平均緯向風取 3000 天的時間平均，可看出生成數個微弱風帶。

圖 8 為實驗 B 在 3000 天時的物理空間緯向風，在植入渦旋的附近西風有增強的現象；同時，西風帶南北等風速線的分佈是同相位，此為正壓外模 (external mode) 的特徵，由於只受平均流帶動，移速較斜壓模來得快。圖 9 為實驗 B 之緯向平均緯向風隨時間的變化，可看出風帶往高緯移動，這是由於地球自轉的 β 效應。圖 10 為實驗 B 之緯向平均緯向風取 3000 天的時間平均，可看出在植入渦旋的附近出現明顯的西風分量，這樣的結果與 Ferreira and Schubert (1999) 的實驗結果，渦旋會造成其附近西風加速相吻合。

接著我們探討不同渦旋結構對於噴流所造成的影響。將實驗 B 所植入的 DC 渦旋換成強度相仿的高斯渦旋以及阮肯渦旋。實驗結果並未出現明顯的帶狀結構，推測因為 DC 渦旋外圍有負渦度區，不與亂流中的正渦度合併，因地球旋轉渦旋被拉伸成帶狀，由於區域較小而衰減較慢。高斯與阮肯渦旋由於與周圍亂流合併成較大的尺度，衰減較快，因此最終強度較弱。

五、植入地形之實驗

地球上存在著許多山脈地形，地形的存在會造成周圍流體厚度變淺，由位渦守衡方程式，造成背景的渦度梯度，因此同樣存在萊茵斯尺度，於是我們想要探討地形對於噴流的影響。

實驗所使用的模式是球面諧函數淺水波譜模式，T64。在 (8) 式中給定

$\kappa = 2.315 \times 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ ，其對於渦度場的 e-folding 時間為 500 天，這是因為地形可視為永久之強迫作用，因此所給的衰減率較植入渦旋的實驗大。給定平均深度為 2000 公尺，如此重力波波速為 140 ms^{-1} ，模式積分 90 天。

所植入理想地形的最大高度為 1500 公尺。所植入地形之中心點位於赤道， 180°E 。實驗 A 未植入地形；實驗 B 植入半徑為 4000 公里的圓形地形，其尺度與波數 5 的波長相近；實驗 C 植入的地形橫軸為 2500 公里，縱軸為 8000 公里，其型式類似安地斯山脈；實驗 D 為實驗 C 的地形橫放，其型式類似歐洲的阿爾卑斯山脈及青康藏高原；實驗 E 為實驗 C 的地形以中心點為圓心，右轉 45° ；實驗 F 為左轉 45° ，其型式類似北美洲的落磯山脈。

由積分 90 天後的物理空間渦度場，在沒有植入地形的實驗 A 中，形成的系統尺度較小；在植入橫向地形的實驗 D 中，所產生出的緯向渦度結構較紮實，強度亦較強。圖 11 為實驗 B、E 積分 90 天後的一維雙對數座標能量波譜分析結果。橫軸為總波數 (n)，縱軸為動能波譜 $[E(n)]$ 。圖中短虛線為 $n^{-5/3}$ ，點虛線為 n^{-3} 。可看出實驗 B 出現了完整 -3 及 -5/3 的斜率；實驗 E 則無。實驗 C、D 的結果與實驗 B 相似，實驗 A、F 的結果與實驗 E 相似。經過測試，實驗 A、E 及 F 需積分至 180 天才會出現完整 -5/3 及 -3 的斜率，所需時間約為規則地形 (軸與經緯線平行之地形) 的 2 倍，這樣的結果顯示規

則地形有助於動能在較短時間內反串跌到大尺度。圖12為實驗積分90天後，實驗A、C及D之緯向平均緯向風取時間平均的結果。可看出在植入地形的附近有明顯的西風分量，其尺度與地形的尺度相近。

六、結論

球面上的二維亂流由於其經向方向上之成長受到萊茵斯尺度限制，緯向方向上可無限制成長，因此會形成帶狀的結構。本文延續HR98的工作，探討渦旋與地形對於緯向噴流結構的影響。研究結果顯示：(1) 渦旋與地形的存在均有使其周圍出現西風加速的現象。(2) 渦旋對於亂流的組織能力與渦旋結構有關。(3) 規則地形(軸與經緯線平行的地形)，有助於動能在較短時間內反串跌到大尺度，約可減少一半的時間。(4) 植入渦旋與地形所得到的時間平均緯向平均緯向風不如HR98中的圖4平滑。

地球南北的溫度梯度是造成中緯度西風帶的主要原因，斜壓不穩定使緯流可用位能轉換為渦流可用位能，會扮演使西風減弱的角色。未來將進一步探討地形配置與波數間的關係；並植入追蹤參數，探討被動純量(passive scalar)波譜的分佈。

七、參考文獻

- Batchelor, G. K., 1969: Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. *Phys. Fluids*, **12**(Suppl. II), 233-239.
- DeMaria, M., and J. C. L. Chan, 1984: Comments on "A numerical study of the interactions between two

tropical cyclones." *Mon. Wea. Rev.*, **112**, 1643-1645.

Ferreira, R. N., and W. H. Schubert, 1999: The role of tropical cyclones in the formation of tropical upper-tropospheric troughs. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 2891-2907.

Grose, W. L., and B. J. Hoskins, 1979: On the influence of orography on large-scale atmospheric flow. *J. Atmos. Sci.*, **36**, 223-234.

Huang, H.-P., and W. A. Robinson, 1998: Two-dimensional turbulence and persistent zonal jets in a global barotropic model. *J. Atmos. Sci.*, **55**, 611-632.

Kuo, H.-C., and C.-H. Hornig, 1994: A study of finite amplitude barotropic instability. *JAO*, **5**, 199-243.

Kuo, H.-C., R. T. Williams, Jen-Her Chen, and Yi-Liang Chen, 2001: Topographic effects on barotropic vortex motion: no mean flow. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 1310-1327.

Kuo, H.-C., L.-Y. Lin, C.-P. Chang, and R. T. Williams, 2004: The formation of concentric vorticity structures in typhoons. *J. Atmos. Sci.*, **61**, 2722-2734.

McWilliams, J. C., 1984: The emergence of isolated coherent vortices in turbulent flow. *J. Fluid Mech.*, **146**, 21-43.

Rhines, P. B., 1975: Waves and turbulence on a beta plane. *J. Fluid Mech.*, **69**, 417-443.

Vallis, G. K., and M. E. Maltrud, 1993: Generation of mean flows and jets on a beta plane and over topography. *J. Phys. Oceanogr.*, **23**, 1346-1362.

八、附圖



圖1 (a) 航海家2號在接近木星時所拍攝的照片。可清楚看出木星表面緯向的噴流結構，以及位於南半球反時鐘旋轉的大紅斑。(b) 哈伯太空望遠鏡所拍攝的土星照片，由圖中可看出許多緯向帶狀的結構。



圖2 (a) 2005年8月17日09Z的紅外線衛星雲圖，僅於低緯度地區有些零星對流擾動。(b) 2005年8月31日12Z的紅外線衛星雲圖。左側是強烈颱風泰利，右側是超級強烈颱風娜比。其周圍由於颱風外圍的下沉氣流，大氣是相當穩定無雲的。

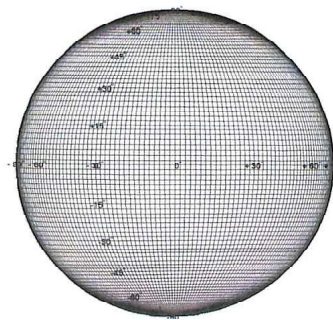


圖3 T64的全球網格點分佈圖。全球共有192×96個網格點，網格點間距為1.875度。

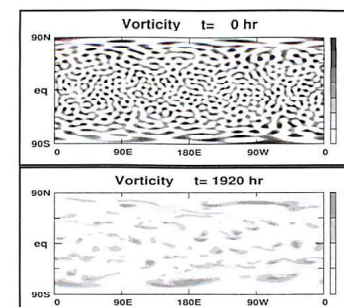


圖4 衰減亂流實驗之渦度場。(a) 為初始亂流場，(b) 為積分80天後的結果。僅繪出正渦度的部分，值為原渦度值乘以 $10^6 \text{ (s}^{-1}\text{)}$ 。在(b)中可明顯看出渦度呈帶狀分佈。

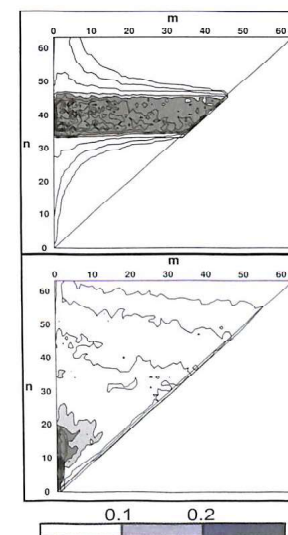


圖5 衰減亂流實驗之初始場，以二維能量波譜分析十組實驗系集平均的結果。圖中橫軸為緯向波數，縱軸為總波數，圖中最大值標準化為1，值超過0.1的區域為淺灰色，值超過0.2的區域為深灰色，可看出初始能量聚集在總波數35~45之間。(b) 為積分80天後的二維能量波譜分析結果，可清楚看出能量聚集在一個類似漏斗形狀的區域中，顯示動能反串跌到緯向結構中。

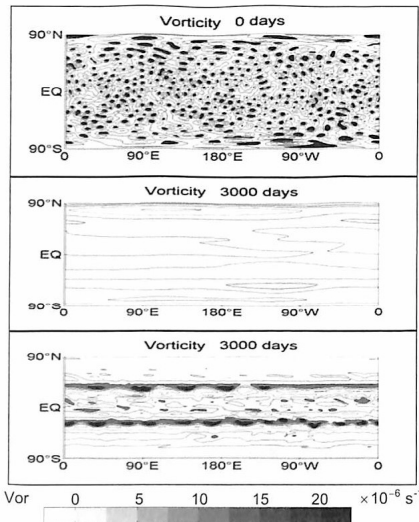


圖 6 (a) 實驗 A 之初始亂流渦度場。(b) 實驗 A 積分 3000 天後的渦度場結果。(c) 實驗 B 積分 3000 天後的渦度場結果。

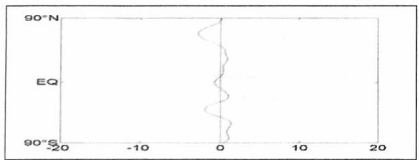


圖 7 實驗 A 之緯向平均緯向風取時間平均。

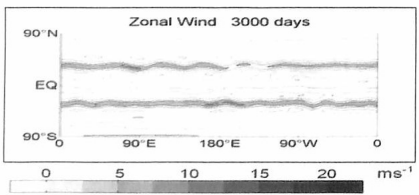


圖 8 實驗 B 積分 3000 天後的緯向風分佈。

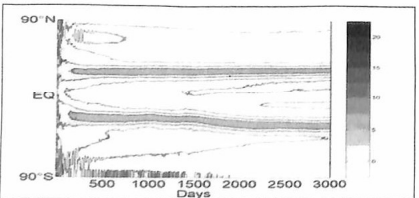


圖 9 實驗 B 緯向平均緯向風隨時間的變化。

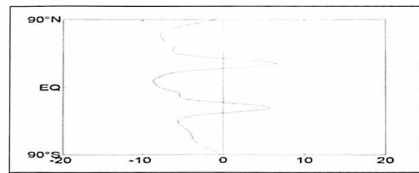


圖 10 實驗 B 之緯向平均緯向風取時間平均。

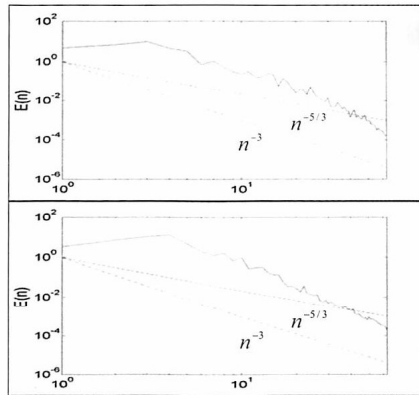


圖 11 理想地形實驗積分 90 天後的一維雙對數座標能量波譜分析結果。橫軸為總波數 (n)，縱軸為動能波譜 $E(n)$ 。圖中短虛線為 $n^{-5/3}$ ，點虛線為 n^{-3} 。

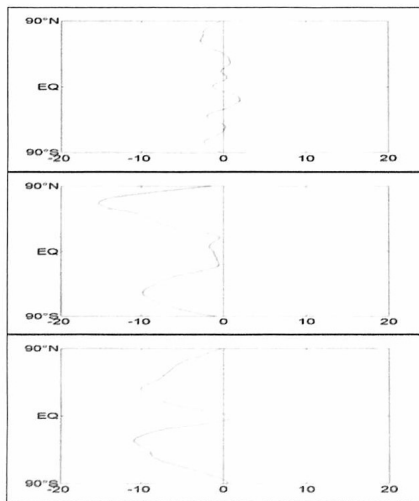


圖 12 理想地形實驗，緯向平均緯向風 (ms^{-1}) 取 90 天的時間平均。

A Study of Two Dimensional Turbulence on a Sphere

Yu-Ming Tsai¹ Hung-Chi Kuo²

¹ Weather Center, Weather Wing, CAF, R.O.C

² National Taiwan University Atmospheric Sciences

Abstract

There are prominent banded structure and big vortex on the earth and Jovian planets. The banded jet structure is an important characteristic of the planetary wind system. Two dimensional turbulence will merge into big vortex until it suffers the Rhines scale limitation in the meridional direction. Since there is no limitation in the zonal direction, finally, the system will form the banded structure on the planet.

Local vortices and topography play the role of local potential vorticity disturbances on the earth. This study uses the global shallow water spectral model to study the influences of vortices and topography to the jet. The results suggest: (1) westerly acceleration appears near vortices and topography, (2) the vortex structure would influence the jet structure, and (3) regular shape topography is beneficial for kinetic energy inverse cascade to larger scales.

Key words: two dimensional turbulence, spherical harmonics, Rhines scale.