

# 大氣密度層流中背面波形成之研究

黃榮鑑

中央研究院 物理研究所  
台灣大學造船工程研究所

(中華民國七十三年十二月四日收件，七十四年一月十日修正)

## 摘要

本文經由連續方程式、芮維-史托克運動方程及密度擴散方程式，利用數值分析以變向隱式法 (alternative direction implicit scheme) 的差分方法建立數值模式，探討二維密度層變流體通過半橢圓之柱體及半圓柱體等障礙物時背面波之形成及流場流況的變化情形。引生的流場變化分三區 (即形成於障礙體上游的阻滯區，形成於障礙體下游之分離區以及上述二區外之場內區) 分別加以研討。

結果顯示背面波的形成及發展受流場的密度福祿數  $F$ 、雷諾數  $R$  及障礙體的高寬比  $\epsilon$  所影響。 $F$  值減小將使分離區的發展受到壓抑，背面波的發展也將加快，容易造成流場的不穩定，並且使阻滯區向上游延伸。 $\epsilon$  小的障礙體，分離區不容易形成，背面波的發展也較快，同時流況受  $R$  值的影響相當明顯。減小  $\epsilon$  及  $R$  值，阻滯區的長度將增長，但並不十分明顯，而  $R$  值及  $\epsilon$  值的增加將促使近分離區的發展，有助於流場的穩定。

## 一、緒言

存在於地球表面的流體如大氣、海洋及湖泊等，由於受日光的照射及重力的作用，其密度均隨高度的增加而減小，呈穩定的層變性質。在密度層變之流場中，如遭受擾動，由於重力的作用將產生內重力波 (internal wave)，如大氣中的山岳波 (lee wave) 即為其例之一。當密度層變流體通過一障礙體時，在其前方將形成阻滯區。而在障礙體後方所形成的分離區則將因密度較大之流體的沉降作用而受壓抑，同時在流場中也將由於內重力波的存在，在某些情況下波狀的流線可能發展為旋渦而呈不穩定。層變流場中由於受重力、慣性力及粘滯力的同時作用而使流場的特性與密度均勻流場不同，層變的情形愈明顯其性質的差異也愈大。

層變流通過障礙物的理論探討，始於 Long 氏 (1953, 1954, 1955) 無粘滯性假設的一連串研

究，Long 氏由非線性之 Euler 運動方程式，演繹出線性的 Helmholtz 方程式，以探討二維層變流通過障礙物的流場，並利用適當的邊界條件得出 Long 氏模式。根據 Long 氏模式，Drazin & Moore 二氏 (1967) 以繞射理論計算流體通過 Dipole 及垂直薄壁的流況；Miles 氏 (1968, 1969) 以變分近似解法求解流體通過各種不同形狀障礙物的流況，並說明其阻力係數及流況穩定之臨界條件；Jones 氏 (1970) 以逆轉法求解層變流體通過一階梯狀障礙物之流況。

近期在數值方面，Lin & Apelt 二氏 (1972) 考慮粘滯性的影響以計算層變流通過垂直薄壁的流況；Furukawa 氏 (1973) 計算層變流體通過三角形障礙物的流況，但在障礙物面上令其旋量為零，因此不會發生流線分離的情形；Hausling 氏 (1977) 使用二種適合 Navier-Stokes 運動方程式的特殊流速分佈工作為上下游之邊界條件，然後計

算橢圓形障礙物的流況，其文中所採用的密度福祿數 (densimetric Froude number) 較本文為大，故流況始終處於穩定狀況之下，而其所謂的旋螺 (rotor) 尺度甚小，似乎是因流線分離所產生的 bubble，而非真正由重力波扭曲過度的流線所產生。

本文由連續方程式、運動方程式及擴散方程式，利用變向隱示法的數值方法以探討二維密度層變流通過半圓形、半橢圓形 (含高橢圓及扁橢圓) 柱體時背面波的形成與發展以及流場流態的變化情形。本文為基本現象之探討模擬氣流通過山脈受阻所發生的效應，對於背面波的發展，片狀雲層越過山脈後的現象，飛航路線的擇定均極具參考價值。

## 二、基本假設與理論基礎

基本假設如下：

1. 流場流體為非壓縮性流體。
2. 流場為二維線性密度層變者。
3. 動力粘滯係數及擴散係數為常數。
4. 渠底水平，其上水深無限大。
5. 流場為層流 (laminar flow)。
6. 採 Boussinesq 近似法，即密度變化所引起之慣性變化可予忽略。

由上述基本假設，則控制密度層變流通過障礙體之流場的連續方程式、運動方程式及密度擴散方程式可寫為：

$$\nabla \cdot \vec{U}' = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{D\vec{U}'}{Dt'} = -\frac{1}{\rho'_0} \nabla P' + \frac{\rho'}{\rho'_0} \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{U}' \dots\dots(2)$$

$$\frac{D\rho'}{Dt'} = D_m \nabla^2 \rho' \dots\dots\dots(3)$$

式中撇號表示具有因次之變數， $\vec{U}'$  為流速， $\rho'$  為密度， $\rho'_0$  為參考密度， $P'$  為壓力， $\nu$  為流體的運動粘滯係數， $D_m$  為流體的擴散係數。

為分析方便起見，將(2)式取其旋度以消去其壓力項，並由連續方程式定義流線函數，將流線函數和流速的關係式代入旋量之定義式，則可得旋量方程式及流線函數——旋量關係式為：

$$\frac{D\vec{\zeta}'}{Dt'} = -\frac{1}{\rho'_0} \nabla \times (\rho' \vec{g}) + \nu \nabla^2 \vec{\zeta}' \dots\dots\dots(4)$$

$$\nabla^2 \psi' = -\zeta' \dots\dots\dots(5)$$

式中  $\vec{\zeta}' = -\nabla \times \vec{U}'$  為旋量 (vorticity)， $\psi'$  為流線函數。 $\psi'$  在不同座標之定義如下：

(1) 在扁橢圓柱體時，取橢圓座標 ( $\alpha'$ ,  $\beta'$ ) 與直角座標 ( $x'$ ,  $y'$ ) 之關係為：

$$x' = A' \cos h \alpha' \cos \beta'$$

$$y' = A' \sin h \alpha' \sin \beta'$$

則連續方程式(1)可寫成

$$\frac{\partial H' U'_\alpha}{\partial \alpha'} + \frac{\partial H' U'_\beta}{\partial \beta'} = 0$$

因而定義流函數滿足上式為

$$U'_\alpha = \frac{1}{H'} \frac{\partial \psi'}{\partial \beta'}, \quad U'_\beta = -\frac{1}{H'} \frac{\partial \psi'}{\partial \alpha'}$$

式中， $A'$  為橢圓之焦距， $H' = A' (\sin^2 h^2 \alpha' + \sin^2 \beta')^{1/2}$ ，為座標轉換因子。

(2) 在高橢圓柱體時，取橢圓座標 ( $\alpha'$ ,  $\beta'$ ) 與直角座標 ( $x'$ ,  $y'$ ) 之關係為：

$$x' = A' \sin h \alpha' \cos \beta'$$

$$y' = A' \cos h \alpha' \sin \beta'$$

則由連續方程式可定義流函數為

$$U'_\alpha = \frac{1}{H'} \frac{\partial \psi'}{\partial \beta'}, \quad U'_\beta = \frac{1}{H'} \frac{\partial \psi'}{\partial \alpha'}$$

座標轉換因子： $H' = A' (\sin^2 h^2 \alpha' + \cos^2 \beta')^{1/2}$ 。

(3) 在圓柱體時，取圓柱座標 ( $\gamma'$ ,  $\theta'$ ) 與直角座標 ( $x'$ ,  $y'$ ) 之關係為：

$$x' = \gamma' \cos \theta', \quad y' = \gamma' \sin \theta'$$

則定義流函數為

$$U'_r = \frac{1}{\gamma'} \frac{\partial \psi'}{\partial \theta'}, \quad U'_\theta = -\frac{\partial \psi'}{\partial \gamma'}$$

方程式(3)、(4)及(5)為探討密度層變流通過障礙體受阻之流場變化的控制方程式，為簡化數值分析，將控制方程式無因次化。各座標系統之無因次數定義如下：

(1) 扁橢圓柱體障礙物

取橢圓柱體焦距  $A'$ ，上游遠方之水平流速

$U'$  及  $\Delta\rho' = \rho'_0 - \rho'_a$  分別為特性長度、速度及密度，以定義下列無因次變數，其中  $\rho'_a$  為障礙物遠方與障礙物焦距等高處之密度。

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha', \quad \beta = \beta', \quad t = t' / (A' / U') \\ U_\alpha &= U'_\alpha / U', \quad U_\beta = U'_\beta / U', \\ \psi &= \psi' / (U' A') \quad \dots\dots\dots(6) \\ \zeta &= \zeta' / (U' / A'), \quad \rho = (\rho' - \rho'_0) / \Delta\rho' \end{aligned}$$

經無因次化後，扁橢圓柱體流場之控制方程式可寫為：

$$\begin{aligned} h^2 \frac{D\zeta}{Dt} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \beta^2} \right) \\ &+ \frac{1}{F^2} \left( \cos h \alpha \sin \beta \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \right. \\ &\left. - \sin h \alpha \cos \beta \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \right) \quad \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \psi = -\zeta \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$h^2 \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{RS_c} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \beta^2} \right) \quad \dots\dots\dots(9)$$

式中  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla$ ， $U_\alpha = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \beta}$ ， $U_\beta = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$ ， $h = (\sin h^2 \alpha + \sin^2 \beta)^{1/2}$ ， $R = U' A' / \nu$  為雷諾數 (Reynolds number)， $F^2 = U'^2 / (g' A')$  為密度福祿數 (densimetric Froude number)， $g' = g \Delta\rho' / \rho'$  及  $S_c = \nu / D_m$  為史密士數 (Schmidt number)。

(2)高橢圓柱體障礙物

高橢圓柱體流場中之無因次參數的定義與扁橢圓形障礙物相同，控制方程式經無因次化後可寫為

$$\begin{aligned} h^2 \frac{D\zeta}{Dt} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \beta^2} \right) \\ &+ \frac{1}{F^2} \left( \sin h \alpha \sin \beta \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \right. \\ &\left. - \cos h \alpha \cos \beta \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \right) \quad \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \psi = -\zeta \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$h^2 \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{RS_c} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \beta^2} \right) \quad \dots\dots\dots(12)$$

式中  $h = (\sin h^2 \alpha + \cos^2 \beta)^{1/2}$ 。座標  $(\alpha, \beta)$  在扁、高橢圓柱體流場之座標如圖(一)所示。

(3)圓柱體障礙物

層變流通過圓柱體障礙物的流場，取障礙體半徑  $a$  為特性長度，各無因次參數之定義為：

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma' / a, \quad \theta = \theta', \quad t = t' / (a / U') \\ U_r &= U'_r / U', \quad U_\theta = U'_\theta / U', \\ \psi &= \psi' / (U' a) \quad \dots\dots\dots(13) \\ \zeta &= \zeta' / (U' / a), \quad \rho = (\rho' - \rho'_0) / \Delta\rho' \end{aligned}$$

經無因次化後，圓柱體流場之控制方程式可寫為：

$$\begin{aligned} \frac{D\zeta}{Dt} &= \frac{1}{R} \left\{ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \gamma \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma} \right) + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} \right\} \\ &+ \frac{1}{F^2} \left( -\cos \theta \frac{\partial \rho}{\partial \gamma} + \frac{\sin \theta}{\gamma} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} \right) \quad \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

$$\nabla^2 \psi = -\zeta \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{RS_c} \frac{1}{\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \gamma \frac{\partial \rho}{\partial \gamma} \right) + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial^2 \rho}{\partial \theta^2} \right\} \quad (16)$$

式中  $U_r = \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}$ ， $U_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial \gamma}$ ， $R = \frac{U' a}{\nu}$ ， $F^2 = \frac{U'^2}{g' a}$  及  $S_c = \frac{\nu}{D_m}$ 。

基於運算方便，將柱面座標  $(\gamma, \theta)$  經下列的轉換成直角不等比座標  $(\alpha, \beta)$ 。其關係式為：

$$\gamma = e^{\pi \alpha}, \quad \theta = \pi \beta \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$\begin{aligned} h^2 \frac{D\zeta}{Dt} &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \beta^2} \right) \\ &+ \frac{h}{F^2} \left( -\cos \pi \beta \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} + \sin \pi \beta \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \right) \quad \dots\dots\dots(18) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} = -h^2 \zeta \quad \dots\dots\dots(19)$$

$$h^2 \frac{D\rho}{Dt} = \frac{1}{RS_c} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \beta^2} \right) \quad \dots\dots\dots(20)$$

式中  $h = \pi e^{\pi \alpha}$ ， $U_r = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \beta}$  及  $U_\theta = -\frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}$

三、數值解析與運算程序

控制方程式經前述之無因次化及座標轉換後，流場之控制方程式(7)~(9)，(10)~(12)及(18)~(20)均具同

一形式，可整理歸納為：

$$\begin{aligned}
& h^2 \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \frac{\partial \zeta}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial \beta} \\
&= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \beta^2} \right) \\
&+ \frac{1}{F^2} \left( C_1 \frac{\partial \rho}{\partial \beta} - C_2 \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} \right) \dots\dots\dots(21)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} = -h^2 \zeta \dots\dots\dots(22)$$

$$\begin{aligned}
& h^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \beta} \frac{\partial \rho}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \frac{\partial \rho}{\partial \beta} \\
&= \frac{1}{RS_c} \left( \frac{\partial^2 \rho}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial \beta^2} \right) \dots\dots\dots(23)
\end{aligned}$$

$$\text{及 } U_\alpha = \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \beta}, U_\beta = A \frac{1}{h} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \dots\dots\dots(24)$$

式中，當障礙物形狀為扁橢圓柱體時

$$\begin{aligned}
& h = (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta)^{1/2}, \\
& c_1 = \cos h \alpha \sin \beta, c_2 = \sin h \alpha \cos \beta
\end{aligned}$$

高橢圓柱體時

$$\begin{aligned}
& h = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta)^{1/2}, \\
& c_1 = \sin h \alpha \sin \beta, c_2 = \cos h \alpha \cos \beta
\end{aligned}$$

圓柱體時

$$h = \pi e^{\alpha}, c_1 = h \sin \pi \beta, c_2 = h \cos \pi \beta$$

以有限差分法求解上述方程式之數值解析，對空間之變化採用中心差分，對時間變化則以前進差分，並運用變向隱示之變向掃描原則將偏微分方程式化為差分方程式如下：

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{\Delta t/2} \rho_{i,j}^{n+1} + \frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2 \Delta \beta} \frac{\rho_{i,j+1}^{n+1} - \rho_{i,j-1}^{n+1}}{2 \Delta \alpha} \\
&- \frac{1}{RS_c} \left( \frac{\rho_{i,j+1}^{n+1} - 2 \rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \alpha^2} \right) \\
&= \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2 \Delta \alpha} \frac{\rho_{i+1,j}^n - \rho_{i-1,j}^n}{2 \Delta \beta} \\
&+ \frac{1}{RS_c} \left( \frac{\rho_{i+1,j}^n - 2 \rho_{i,j}^n + \rho_{i-1,j}^n}{\Delta \beta^2} \right) \\
&+ \frac{h^2}{\Delta t/2} \rho_{i,j}^n \dots\dots\dots(25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{\Delta t/2} \rho_{i,j}^{n+1} - \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2 \Delta \alpha} \frac{\rho_{i+1,j}^{n+1} - \rho_{i-1,j}^{n+1}}{2 \Delta \beta} \\
&- \frac{1}{RS_c} \left( \frac{\rho_{i+1,j}^{n+1} - 2 \rho_{i,j}^{n+1} + \rho_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta \beta^2} \right) \\
&= - \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2 \Delta \beta} \frac{\rho_{i,j+1}^n - \rho_{i,j-1}^n}{2 \Delta \alpha} \\
&+ \frac{1}{RS_c} \left( \frac{\rho_{i,j+1}^n - 2 \rho_{i,j}^n + \rho_{i,j-1}^n}{\Delta \alpha^2} \right) \\
&+ \frac{h^2}{\Delta t/2} \rho_{i,j}^n \dots\dots\dots(26)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{\Delta t/2} \zeta_{i,j}^{n+1} + \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2 \Delta \beta} \frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1} - \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{2 \Delta \alpha} \\
&- \frac{1}{R} \left( \frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1} - 2 \zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \alpha^2} \right) \\
&= \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2 \Delta \alpha} \frac{\zeta_{i+1,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{2 \Delta \beta} \\
&+ \frac{1}{R} \left( \frac{\zeta_{i+1,j}^n - 2 \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta \beta^2} \right) \\
&+ \frac{h^2}{\Delta t/2} \zeta_{i,j}^n + \frac{1}{F^2} \left( -C_2 \frac{\rho_{i,j+1}^{n+1} - \rho_{i,j-1}^{n+1}}{2 \Delta \alpha} \right. \\
&\left. + C_1 \frac{\rho_{i+1,j}^{n+1} - \rho_{i-1,j}^{n+1}}{2 \Delta \beta} \right) \dots\dots\dots(27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{h^2}{\Delta t/2} \zeta_{i,j}^{n+1} - \frac{\psi_{i,j+1}^n - \psi_{i,j-1}^n}{2 \Delta \alpha} \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+1} - \zeta_{i-1,j}^{n+1}}{2 \Delta \beta} \\
&- \frac{1}{R} \left( \frac{\zeta_{i,j+1}^{n+1} - 2 \zeta_{i,j}^{n+1} + \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta \beta^2} \right) \\
&= - \frac{\psi_{i+1,j}^n - \psi_{i-1,j}^n}{2 \Delta \beta} \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{2 \Delta \alpha} \\
&+ \frac{1}{R} \left( \frac{\zeta_{i,j+1}^n - 2 \zeta_{i,j}^n + \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta \alpha^2} \right) \\
&+ \frac{h^2}{\Delta t/2} \zeta_{i,j}^n + \frac{1}{F^2} \left( -C_2 \frac{\rho_{i,j+1}^{n+1} - \rho_{i,j-1}^{n+1}}{2 \Delta \alpha} \right. \\
&\left. + C_1 \frac{\rho_{i+1,j}^{n+1} - \rho_{i-1,j}^{n+1}}{2 \Delta \beta} \right) \dots\dots\dots(28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_{i,j}^{n+1} &= \psi_{i,j}^n + \frac{\omega_1}{2(1+m_1^2)} \{ \psi_{i,j+1}^n + \psi_{i,j-1}^{n+1} \\
&+ m_1^2 \psi_{i+1,j}^n + m_1^2 \psi_{i-1,j}^n - 2(1+m_1^2) \\
&- 2(1+m_1^2) \psi_{i,j}^n + h^2 \Delta \alpha^2 \zeta_{i,j}^{n+1} \dots\dots\dots(29)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{i,j}^{n+1} = & \phi_{i,j}^n + \frac{\omega_2}{2(1+m_1^2)} \{ \phi_{i+1,j}^n + \phi_{i-1,j}^{n+1} \\ & + m_2^2 \phi_{i,j+1}^n + m_2^2 \phi_{i,j-1}^{n+1} \\ & - 2(1+m_2^2) \phi_{i,j}^n + h^2 \Delta \beta^2 \zeta_{i,j}^{n+1} \} \quad (30) \end{aligned}$$

$$U_\alpha = (\phi_{i+1,j}^{n+1} - \phi_{i-1,j}^{n+1}) / 2h \Delta \beta$$

$$U_\beta = -(\phi_{i,j+1}^{n+1} - \phi_{i,j-1}^{n+1}) / 2h \Delta \alpha \quad \dots\dots(31)$$

上列式中  $n$  為時間之增量， $i$  表  $\beta$  向之格點， $j$  表  $\alpha$  向之格點。由於擴散及旋量方程式(23)，及(24)皆為拋物線形方程式，利用變向隱示法採用雙向掃瞄法，將擴散方程式及旋量方程有限差分化，故各有兩式分別為(25)、(26)、(27)及(28)式。流線函數—旋量關係式(29)為卜松形方程式，除採用 SOR 方法加速其收斂外，又混合以變向隱示法之概念以雙向掃瞄之，此式經展開後列如(29)及(30)兩式，式中之  $\omega_1$  及  $\omega_2$  為加速收斂之係數介乎 1、2 之間，取其值為 1.8。此外， $m_1 = \Delta \beta / \Delta \alpha$ ， $m_2 = \Delta \alpha / \Delta \beta$ ，流速則由(24)式展開得如(31)。

當起始條件及邊界條件決定後，控制方程式即可求解。而流函數之起始條件由勢能流決定，密度起始條件為  $\rho = -4$ ，旋量之起始條件除在障礙體

表面外，各處均為零。

流場之邊界條件如圖(-)所示，就其邊界位置分別列述如下：

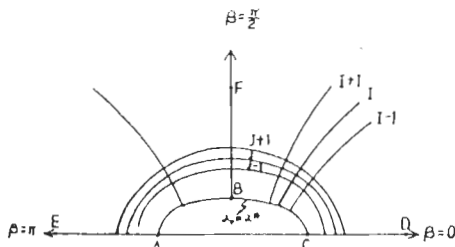
(1)在障礙體表面 ABC 上(對應於橢圓柱體為  $\alpha_0$ ，圓形柱體之  $\alpha_0 = 0$ )， $\psi_{i,1} = 0$ ， $\rho_{i,1} = 0$ ， $(U_\alpha)_{i,1} = 0$ ，表面上之旋量  $\zeta_{i,1}$  可由  $\psi_{i,3}$  以泰勒級數分別對  $\psi_{i,1}$  展開至三次項，化簡得之，即

$$\zeta_{i,1} = -\frac{1}{h^2} \frac{8\psi_{i,2} - \psi_{i,3}}{2\Delta\alpha^2} \quad \dots\dots\dots(32)$$

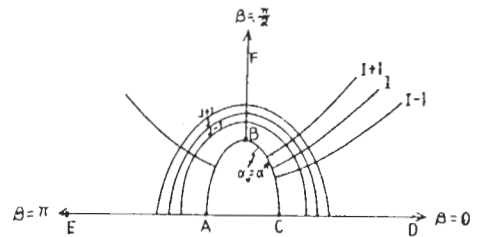
(2)在二側渠床上，AE 及 CD (對應於橢圓柱體之  $\beta = 0$  及  $\pi$ ，圓形柱體之  $\beta = 0$  及 1)， $\psi = 0$ ， $\rho = 0$  及  $\zeta = 0$ 。

(3)在離障礙體無窮遠處 FED 上， $\alpha \rightarrow \infty$ ， $\zeta = 0$ ，密度及流函數皆為起始條件之數值。

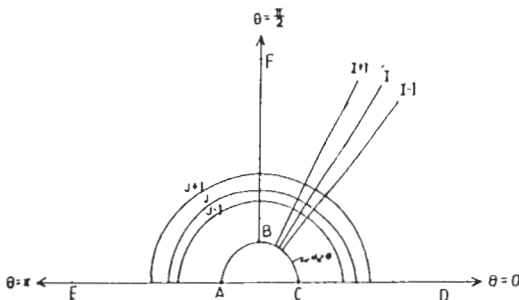
起始條件及邊界條件決定後，控制方程式之求解由下列步驟經數值差分法之方程式寫成電腦程式後，利用高速電子計算機解出。(1)由流函數之拉普拉方程式解出勢能流流場。(2)利用起始條件由擴散方程式(25)與(26)分別對  $\alpha$  及  $\beta$  雙向掃瞄以得出新時段



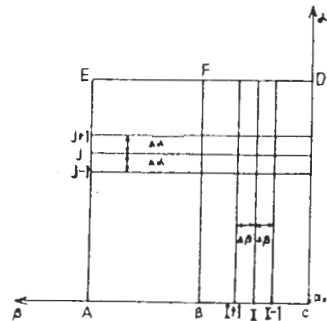
(a)扁橢圓座標



(b)高橢圓座標



(c)極座標



(d)轉換後座標(a)、(b)、(c)經轉換後均轉換為(d)

圖(-) 座標轉換示意圖

的密度值  $\rho^{n+1}$ 。(3)由(3)式求得在障礙體表面上之旋量,  $\zeta$  值。(4)解旋量方程式(27)及(28)分別對  $\alpha$  及  $\beta$  方向雙向掃瞄, 加入邊界條件求得新時段的旋量  $\zeta^{n+1}$ 。(5)由求得之旋量  $\zeta^{n+1}$  代入流函數—旋量關係式(29)及(30), 利用 SOR 法循序收斂以求得該新時段的流函數  $\psi^{n+1}$ , 收斂之是否完成, 則由是否滿足下式為判斷依據

$$ABS[(\psi_{i,j}^{n+1} - \psi_{i,j}^n) / \psi_{i,j}^n] \leq 0.005 \quad (33)$$

(6)新時段之速度則由(31)式求得。(7)重覆步驟(2)至(6)以求解在各個不同時段流場的變數值。

本文對三種形狀的障礙體分別取  $\epsilon = 0.5$  (半扁橢圓), 1.0 (半圓形) 及 2.0 (半高橢圓) 的流場進行數值計算。各種形狀障礙體的  $\alpha_0$ 、 $\Delta\alpha$  及  $\Delta\beta$  列如下表:

$\epsilon$	$\alpha_{max}$	$\alpha_0$	$\Delta\alpha$	$\Delta\beta$
0.5	5	0.5493	5/60	$\pi/30$
1.0	1.6	0	1.6/60	1/30
2.0	5	0.5493	5/60	$\pi/30$

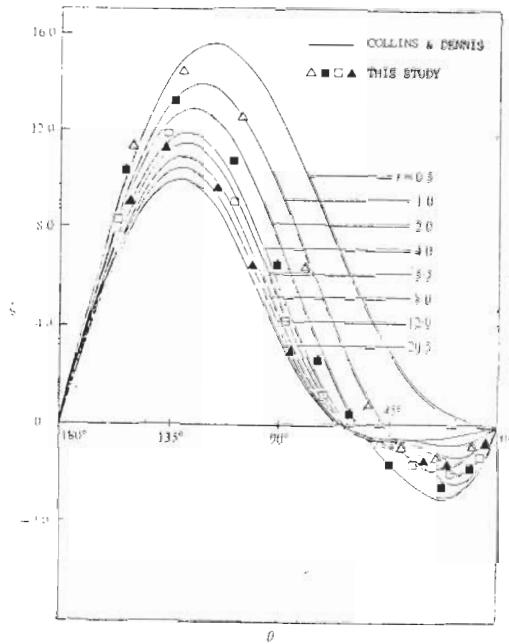
計算中時間增量  $\Delta t$  的選取並未固定, 其變化如下

$$\Delta t = \begin{cases} 0.005 & t = 0 \\ 2 \times \Delta t_f & 0 < t < 0.2 \\ 0.2 & t \geq 0.2 \end{cases}$$

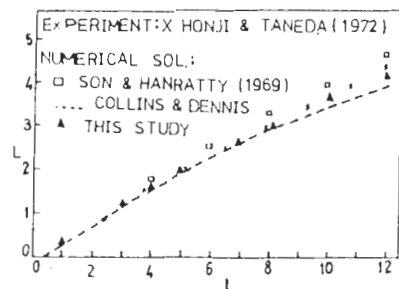
式中  $\Delta t_f$  為前一時段所用之  $\Delta t$ 。時間的增量  $\Delta t$ , 曾取 0.01、0.02、0.05、0.1 及 0.2 比較, 發現當  $t > 0.2$  後以  $\Delta t = 0.2$  其誤差尚可容忍。

#### 四、結果與討論

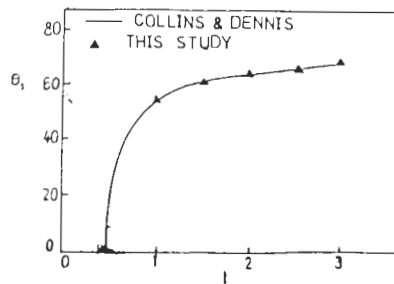
為印證本文數值模式計算之準確性, 將密度福祿數  $F$  趨近一很大值, 以探討密度均勻流體流過一圓柱體障礙物之流場變化。將計算所得結果與 Honji & Taneda 二氏之實驗結果及 Son & Hanratty 二氏 (1969), Collins & Dennis 二氏 (1973) 等之數值結果比較以驗證本文數值模式之準確性。圖(二)、圖(三)及圖(四)所示分別為障礙體表面渦度分佈, 分離區長度及分離點位置之比較, 結果顯示本文之數值計算所得與前人之實驗和計算結果甚為吻合。



圖(二) 表面渦度之比較  $\epsilon = 1.0$ 、 $R = 100$



圖(三) 分離區長度之比較  $\epsilon = 1.0$ 、 $R = 100$



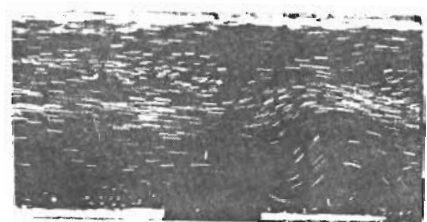
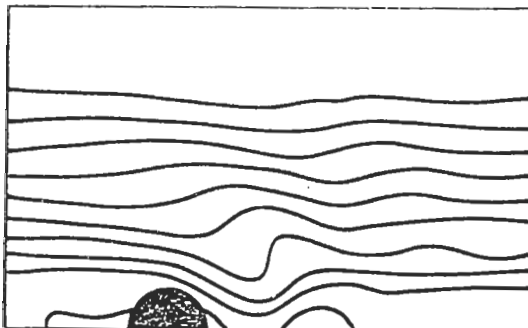
圖(四) 分離點之比較  $\epsilon = 1.0$ 、 $R = 100$

二維密度層變流通過半橢圓柱體及半圓形柱體受阻的流場分析，經系列數值計算結果，就阻滯區、分離區以及場內區分別研討其發展情形以及密度福祿數  $F$ 、雷諾數  $R$  和障礙體形狀。對流場產生的影響。

(1)阻滯區

層變流越過一障礙體時，在  $F$  值較小（密度層變梯度較大）的情況下，由於流體所具有的慣性力不足於克服黏滯力及重力，有部份流體滯留於臨近障礙體的上游方，而不隨主流向下游流動，形成一阻滯區。圖(五)所示為層變流， $F = 0.48$  通過半圓柱體時，數值計算所得的流場流線變化情形。在障礙體之上游面形成一阻滯區，下游面形成一近分離區及一遠分離區，場內區之流線則形成波狀變化的背面波。

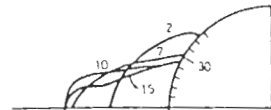
阻滯區的形成可從流場中渦度分佈的情形加以說明，障礙體表面由於粘滯性所生的負渦度（順時針方向）藉擴散項向流場中擴散，而密度梯度項，



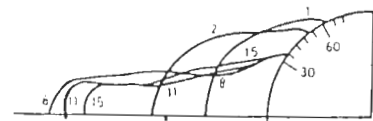
圖(五) 密度管變流通過障礙體的流況示意

$\partial \rho / \partial x$ ，在障礙物上游，因流體越過阻礙體時爬升之故，同一高程上右邊流體密度較左邊為大，因而滋生順時針方向之負渦度，而使渦度在障礙體上游面產生負渦度之區域而形成阻滯區。阻滯區流體之流速很小，數值計算結果顯示此區內的流速在

$10^{-2}$  大小次序左右。阻滯區的形成為密度層變流中的特性之一。 $F$  值小， $\frac{1}{F^2} \frac{\partial P}{\partial x}$  所引生之負渦度自然較強，因而阻滯區比較容易形成。 $F$  值對於阻滯區之形成與發展的影響，可由圖(六)結果顯示。一般而言， $F$  值小之流場阻滯區較易發生，且阻滯區長度較長，最大分離點 ( $\theta_{max}$ ) 較快發生，其值亦較  $F$  大者為高，如圖(七)及(八)所示



(a)  $R = 100 \quad F = 0.60$



(b)  $R = 100 \quad F = 0.48$

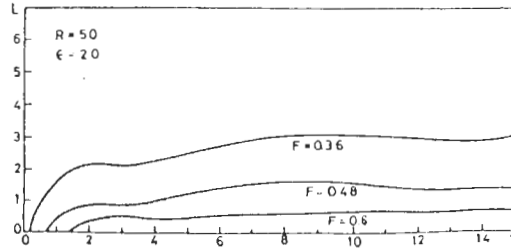
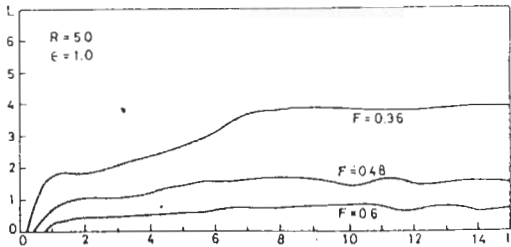
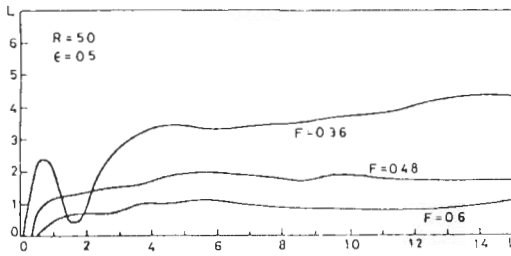
圖(六) 阻滯區之形成與發展

阻滯區之形成與發展受  $R$  及  $\epsilon$  之影響比受  $F$  之影響小得多，如圖(九)及(十)所示， $R$  值的增大將使流體的慣性力增大，因而影響阻滯區之形成與發展。 $\epsilon$  值小的障礙體因具前沿到頂點的距離較長，坡度較緩， $|\partial \rho / \partial x|$  較小，因此衍生之負渦度也較弱，阻滯區之分離點較  $\epsilon$  值大者為低，但並不顯著，數值之計算結果示如圖(七)及(八)。

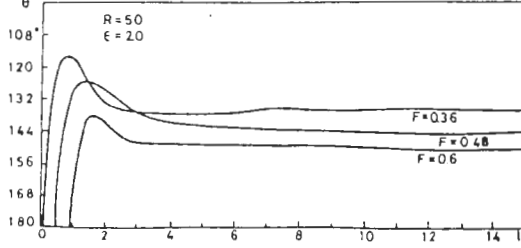
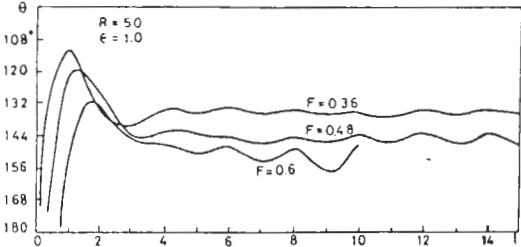
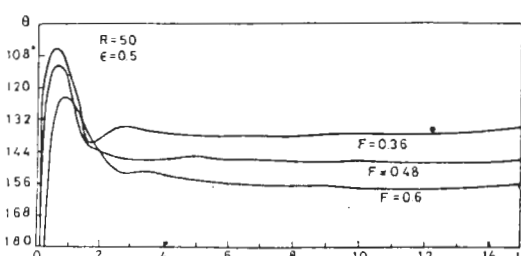
(2)分離區

流體通過障礙物後，由於流域突然擴大，部份動能無法立即轉換為壓能，遂在障礙體下游側引生了流線的分離而形成分離區，在層變流場中，因背面波形成的影響，而有多個分離區的形成。定義緊靠障礙物之分離區為近區，其餘為遠區。層變流場中，當流體越過障礙體下降後，在同一高程上，右邊流體密度較左邊為小，因而  $\partial \rho / \partial x$  引生逆時針向之正渦度而壓抑了近分離區的形成，使分離區的時間延後，尺度也小很多，分離點的位置亦較低。

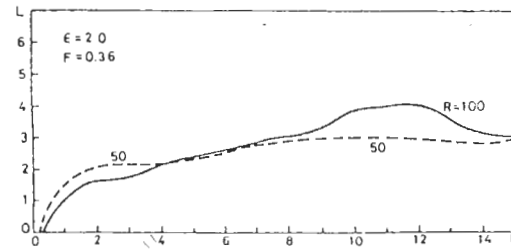
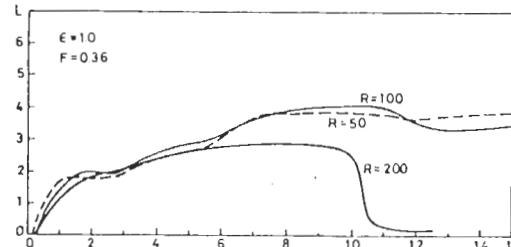
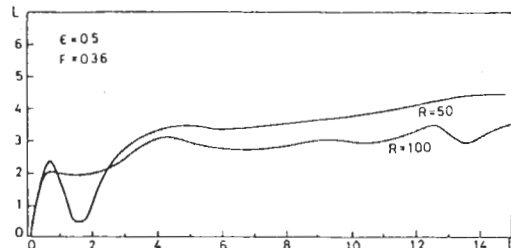
圖(七)示為  $\epsilon = 1$  的障礙體在不同  $F$  及  $R$  的流場中分離區之形成與發展情形。(a)圖為  $R = 100$  及  $F = 0.6$  的  $t = 8$  時近區開始發生，然尺度甚小



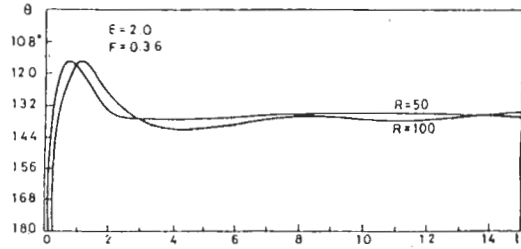
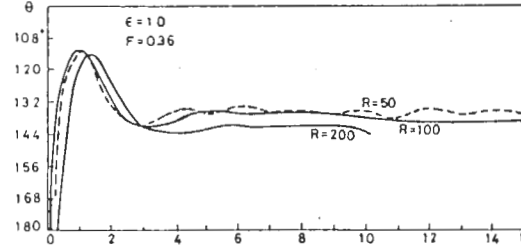
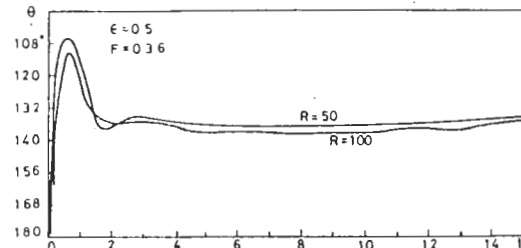
圖(七) 阻滯區長度受  $F$  值之影響



圖(八) 阻滯區分離點受  $F$  值之影響

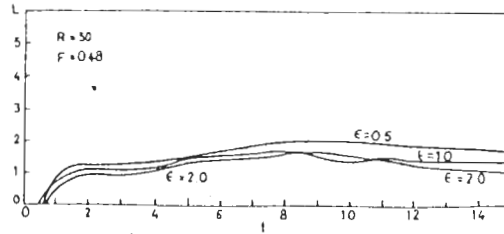
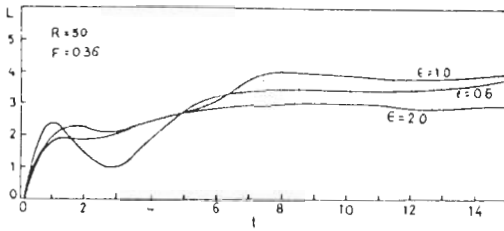


圖(九) 阻滯區長度受  $R$  值之影響

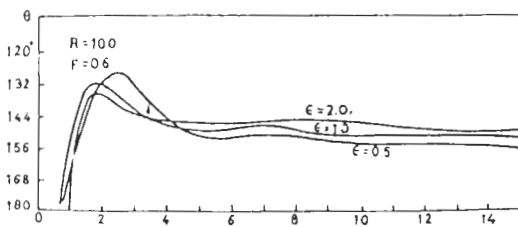
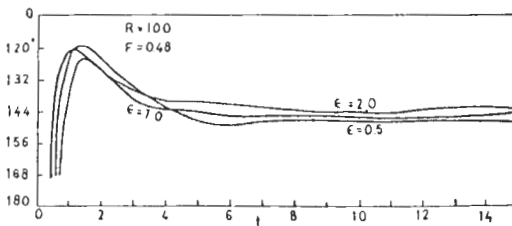


圖(十) 阻滯區分離點受  $R$  值之影響



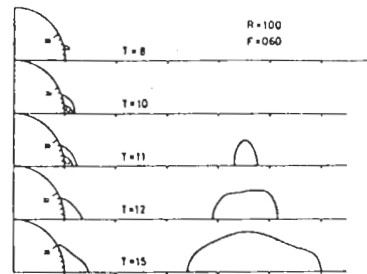


圖(土) 阻滯區長度受障礙體形狀之影響

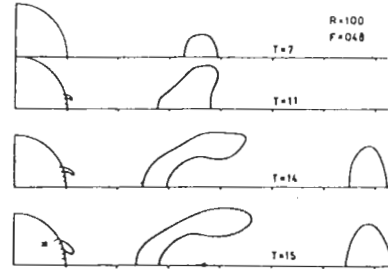


圖(土) 阻滯區分離點受障礙體形狀之影響

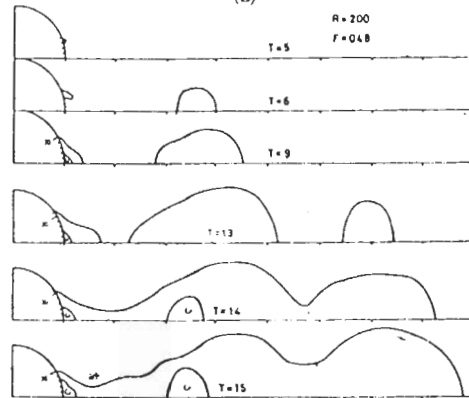
，弧懸在  $15^\circ$  左右而不與底床接觸，此種現象在 Haussling 氏 (1977) 的計算中也曾經發生。此近區逐漸增長而在  $t = 10$  時與底床相接，此時一反時針轉動之小漩渦則被鎖在接角處。 $t = 11$  時遠分離區發生，近區則繼續增大； $t = 12$  時；反時針轉動之小漩渦被大漩渦給消滅。 $t = 15$  時近區之分離點提高至  $30^\circ$ ，而其遠區之長度則達 2.65 單位。(b) 圖為  $R = 100$ ， $F = 0.48$  之算例， $t = 7$  時遠區



(a)



(b)



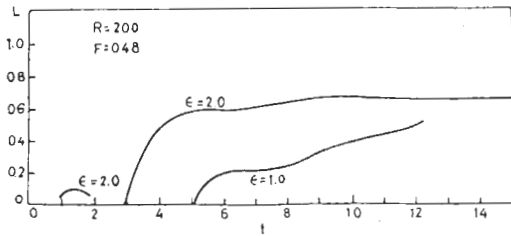
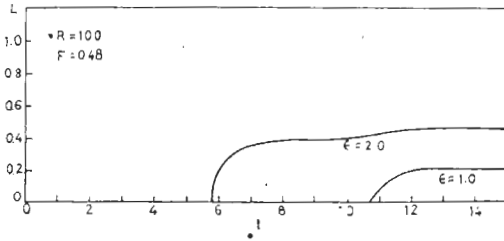
(c)

圖(土) 分離區之比較

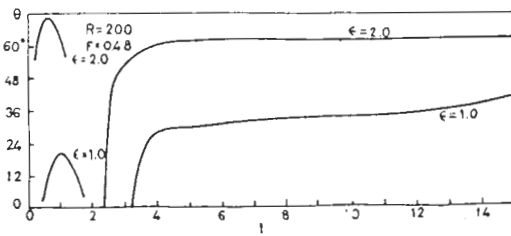
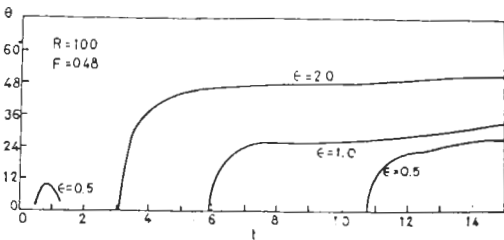
先發生； $t = 11$  時近區出現，遠區則繼續增大。若與前算例比較，當可知  $F$  小時，其近區之尺度較小，又因遠區發生在內重力波之波峯下，因此可以知道  $F$  小時其內重力波之波長較小，振幅較大較易引生遠區。(c) 圖為  $R = 200$ ， $F = 0.48$  之算例， $t = 5$  時近區發生，孤懸於  $20^\circ$  左右， $t = 6$  時遠區發生， $t = 9$  時孤懸之近區與底床相接，在接角處有一逆轉之小漩渦。 $t = 13$  時第二遠區發生，此時近區之分離點最高約在  $37^\circ$  左右，之後逐漸下降； $t = 14$  時近區，第一遠區與第二遠區相連成爲一極大的分離區，在第一遠區之下產生另一逆轉之漩渦，除近區分離點下降外，各區普遍成長，而在  $t = 15$  時其成長並未有停止的趨勢，此時相連之分

離區到達7.6單位。若與前算例比較可知 $R$ 值對分離區影響極大， $R$ 值大者不僅分離點位置較高，且在發生分離區後又較易連成一極大之分離區。由於分離區發生之位置大略相同，故可知 $R$ 值對內重力波之波長影響不大。

圖(四)及(五)為分離區的發展受障礙體形狀 $\epsilon$ 不同的影響。 $\epsilon$ 大的障礙體由於形狀突出，較易導致流線的分離； $\epsilon$ 小者則較不易引生分離區，但其受層



圖(四) 分離區長度受障礙體形狀之影響



圖(五) 分離區分離點受障礙體形狀之影響

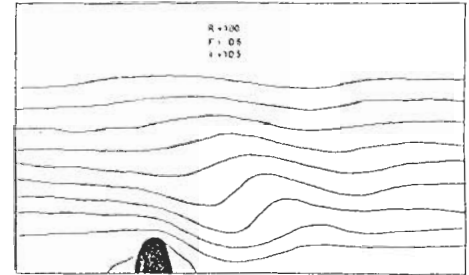
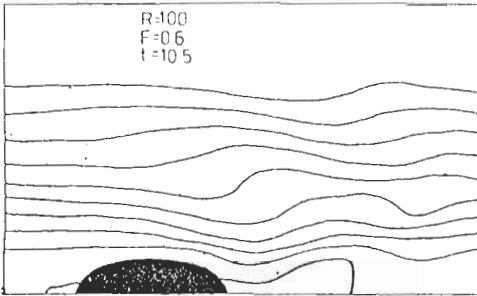
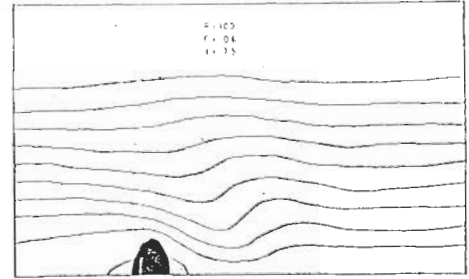
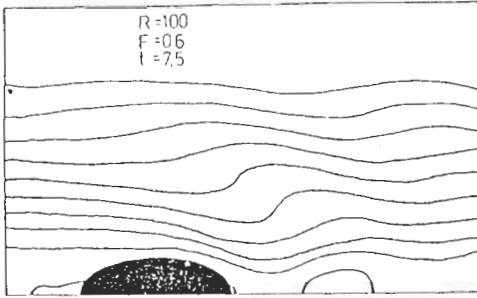
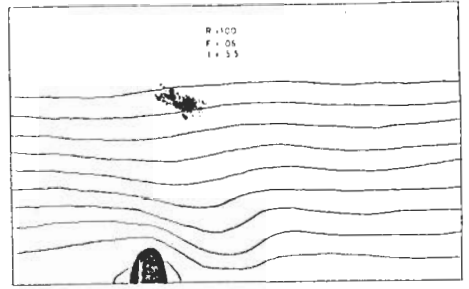
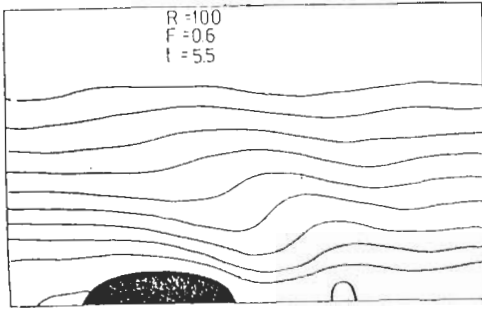
變作用的影響遠較 $\epsilon$ 大者為大。分離點的位置以 $\epsilon$ 大者較高，分離區長度也較長。另外， $\epsilon$ 大的流場由於流體越過障礙體後的沉降力較強，阻礙了遠分離區向上游的擴展，因而遠區的發展以 $\epsilon$ 小者較速。

(3)場內區

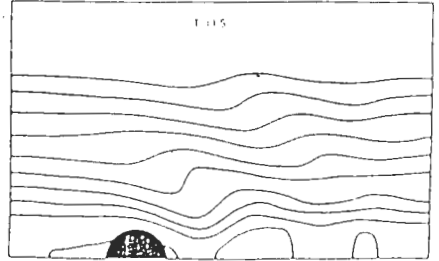
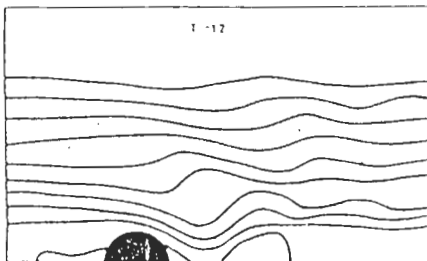
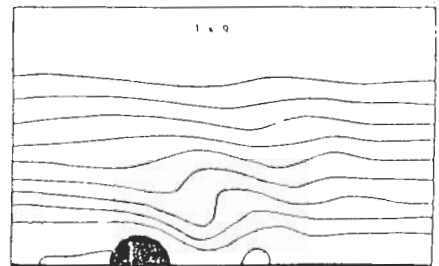
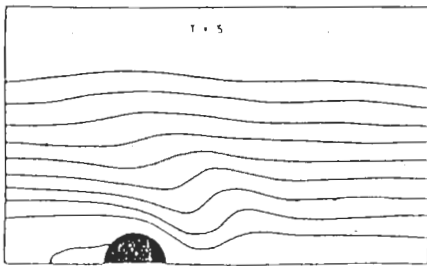
場內區是指除去阻滯與分離兩區外的流場區域。本區討論背面波之形成與發展、渦度的變化以及障礙體上方之水平流速和渦量等。圖(六)及圖(七)分別表示 $R=100$ ， $F=200$ ， $F=0.46$ 流場流過扁橢圓及圓形柱體時背面形成及流線變化情形。流況的變化由初始條件之勢能流，隨着時間增加，由於密度層變所產生之旋量作用，使上爬流線之旋量趨向順時針旋轉，而下落流線之旋量趨向反時針旋轉，因而產生背面波。波形流線將隨時間變化的發展而有逐漸扭曲的趨勢。分離區的形成和發展，將吸收場內區之部分動能，而使波形的扭曲再趨緩和。由於流線之扭曲由密度層變所引起，當分離區的形成及發展不足於減緩背面波波形的扭曲，則扭曲區域將形成一旋螺(rotor)。有關旋螺之特性詳見Hwang等氏(1982)之實驗研究。

背面波之形成與發展受密度層變所影響， $F$ 值小者波形之形成與發展較快，流況較為不穩定。如上述分離區的存在一方面消耗了主流之部分能量，一方面則加長了流體越過障礙體之後沉降的水平距離，而使 $\partial\rho/\partial x$ 減小而有助於流場的穩定。 $F$ 值小者將壓抑分離區之形成和發展，同時其本身的重力浮昇作用也較明顯，使波形流線較易扭曲成不穩定。數值計算的結果顯示 $R$ 值增加將導致分離區的形成，此現象以 $\epsilon$ 小者最為明顯， $\epsilon$ 小的障礙體較不易引生流線的分離，當 $R$ 值增加形成分離區後，背面波的流線扭曲易趨於穩定； $\epsilon$ 大的障礙體因分離區較易發生所以流況的穩定性受 $R$ 值的影響，不如 $\epsilon$ 小者為明顯。

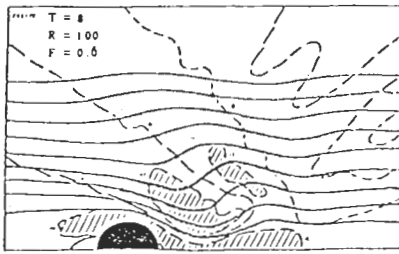
圖(六)係將流線與等旋量線畫在一起之情形，圖中顯示旋量為零之處為流線之反曲點，圖(六)為其等密度線分佈，圖(七)及(八)係對應圖(六)算例層變流通過不同形狀之橢圓柱體，等密度線分佈及旋量分佈的變化情形。圖中顯示場內區零渦度旋量線的變化，



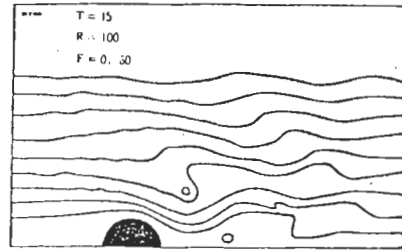
圖(庚) 層變流過扁橢圓柱體之流線變化  $R=100$  ,  $F=0.6$



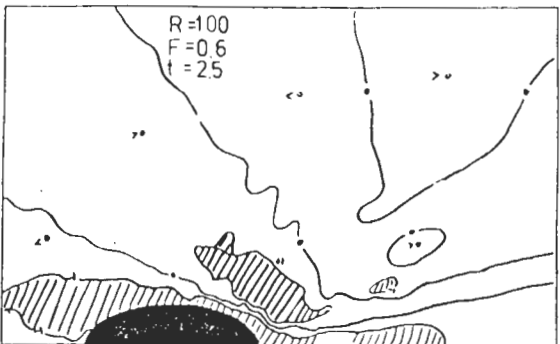
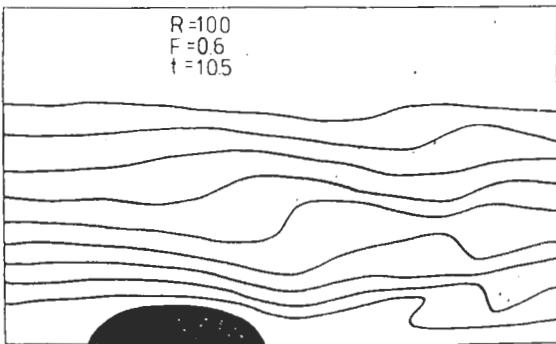
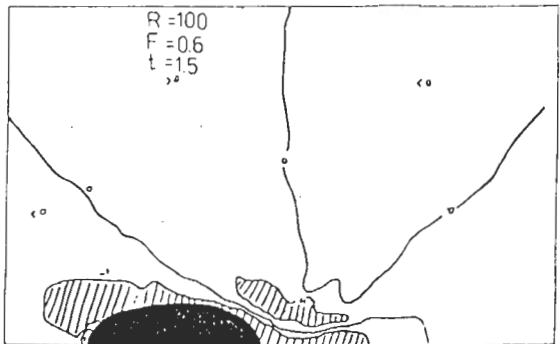
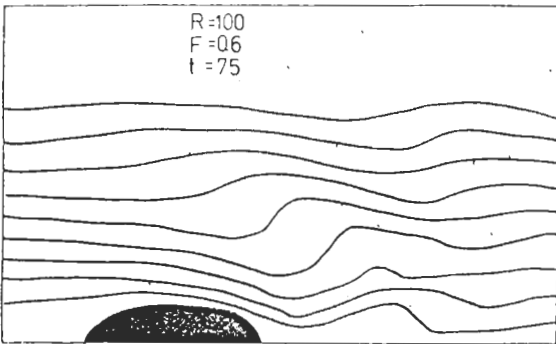
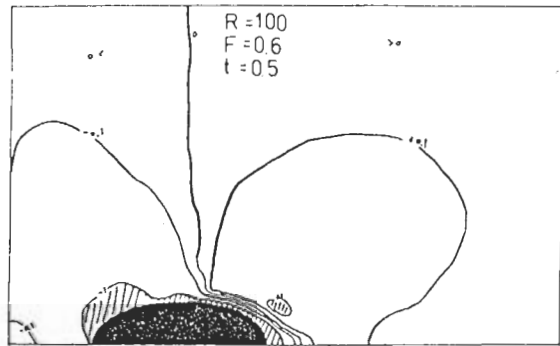
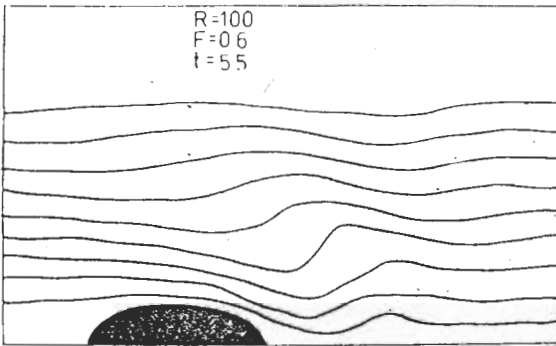
圖(辛) 層變流越過圓柱體之流線變化  $R=100$  ,  $F=0.48$



圖(內) 渦旋量與流線之關係



圖(外) 等密度線圖



圖(內) 相對應於圖十六流場之等密度線變化

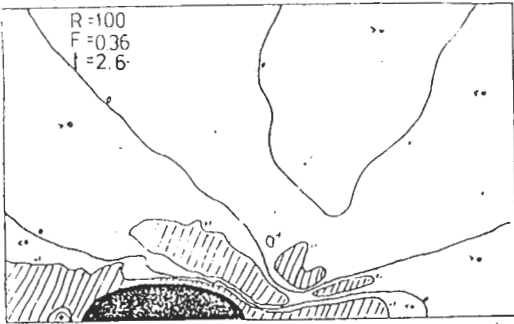
圖(外) 相對應於圖(內)流場之渦旋量變化

因時間的增加而有所變化，圖(四)為層變流通過不同橢圓柱體之渦旋量分佈，因而顯見背面波的波長係隨高程及時間的不同而變化。另外由圖中可看出背面波的發展以  $\epsilon$  小時為速， $\epsilon$  小者旋量之絕對值較大，亦即其流線會有較劇烈之扭曲，此外，旋量為零之線相隔較近，亦即說明流線之波長較短。

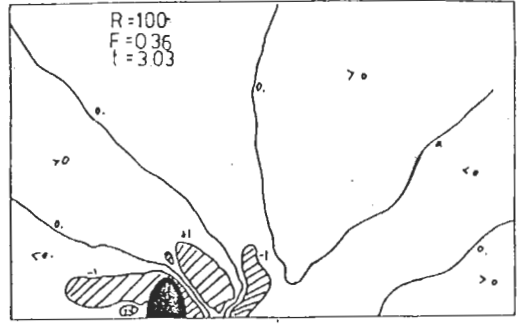
圖(五)(a)為由數值計算所繪出在障礙物垂直上方之水平流速隨時間的變化，起始流速僅有一相對極大（以下簡稱極大）值，在障礙物面上，其值為 2，隨高度增加其流速趨近於 1。 $t = 5$  時，有二個極大，一個極小。 $t = 10$  時，增為三個極大，二個極小， $t = 15$  時，極大極小之數目不變。各極值，除第一極大（自下方算起）外，皆自上方發生後逐漸往下方移動且趨近一固定值，且在此固定值

左右跳動。 $R$  值對此水平流速的影響不很顯著，故不加以比較。圖(五)(b)顯示  $F$  值小者，其極值個數較多，極值與極值之間距也較小，此外，第一極大也較  $F$  值大者為大。因而在層變流受阻的流場中可以看出在障礙體上方有一近似射流的現象發生，其速度隨着密度梯度的增大（ $F$  值小）而增大。圖(五)(c)為障礙體形狀對頂點上方水平向流速的影響。 $\epsilon$  小者因其表面黏滯性的影響較大，最大速度發生的位置較高，其值也較小，流速分佈的振動情形則無顯著的差別。

圖(六)為幾個算例在障礙物表面上之旋量大小，折線以下與折線以上之比例尺，為了較明確的顯示旋量的差異而略有不同。左方顯示阻滯區內之旋量隨  $F$  之變化較大，停滯點的位置隨  $R$ 、 $F$  之增加而

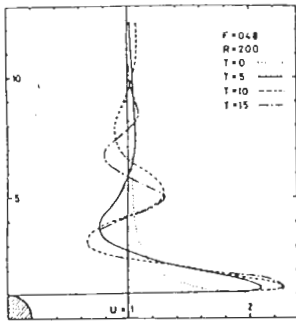


(a)

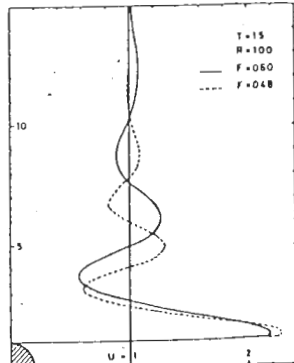


(b)

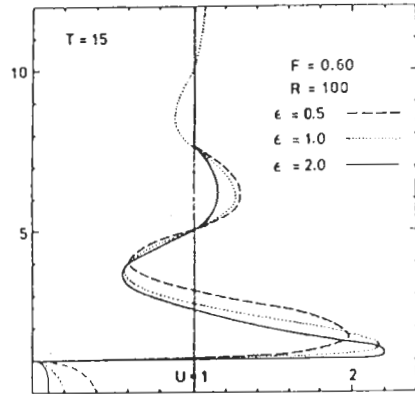
圖(五) 不同形狀之橢圓柱體流場之渦旋量分佈



(a)

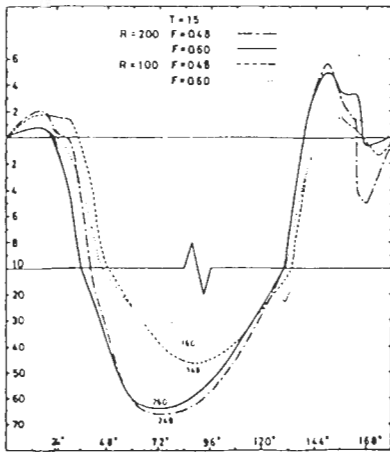


(b)



(c)

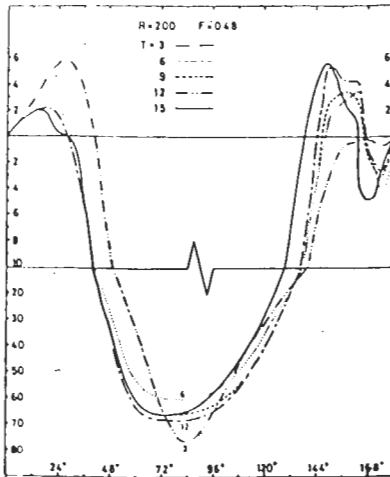
圖(六) 障礙體頂點上方水平速度之分佈



圖(10) 障礙體表面渦旋量之比較,  $\epsilon = 1$

有降低之趨勢。右方分離點似乎不受  $F$  之影響, 分離區內之旋量受  $R$  值影響較大, 唯在接角處所產生之第二漩渦的強度因  $F$  值減小而加大。在  $90^\circ$  附近旋量有一極大值,  $R$  值愈大其值愈大, 且發生之點較近上游方;  $F$  值愈小其值愈大, 且發生之點較近下游。

圖(10)為障礙物上的旋量隨時間的變化情形。圖中顯示左側阻滯區內之旋量隨時間增加而減少, 停滯點則逐漸降低。 $90^\circ$  左右的極值似隨時間作一漸弱之振盪現象, 發生極值之位置則漸向上游移動。分離區之旋量隨時間漸增, 分離點也同樣隨時間昇



圖(11) 表面渦旋量隨時間之變化,  $\epsilon = 1$

高。角區之旋量也似乎有一漸弱的振盪現象。

## 五、結論

本文以有限差分法求解密度層變流通過半橢圓及半圓柱體之流場變化, 經由一連串的計算結果, 獲致下列之結論:

(1) 阻滯區的發展以  $F$  為主要影響因素,  $R$  值及  $\epsilon$  值的大小, 影響並不明顯。阻滯區內之流速很小, 約在  $10^{-2}$  次序左右, 其停滯點隨  $R$  值之增加而降低,  $F$  值的減小而升高。阻滯區長度隨  $F$  值之增加而減小。

(2) 分離區可分為近區與遠區,  $F$  值小者將壓抑分離區的發展, 而  $\epsilon$  及  $R$  值的增加, 則有助於近區的形成。遠區的發展則以  $F$  小、 $\epsilon$  小及  $R$  大時發展較速。

(3) 背面波的形成與發展受密度層變影響甚大,  $F$  值小之流場, 其波長較小, 波形流線之彎曲較大易於形成旋螺之不穩定流況。 $R$  值增加將使流況較趨穩定,  $\epsilon$  值小者流況之穩定性受  $R$  值影響較大。

(4) 障礙體上方的水平流速, 其最大流速以  $F$  小者較大, 發生的位置也較低, 振盪也較劇。 $\epsilon$  小者的障礙體最大流速較小, 流速分佈的振動情形受  $R$  及  $\epsilon$  值之影響並不顯著。

## 參考文獻

- Collins, W. M. and S. C. R. Dennis, 1973: Flow past an impulsively started circular Cylinder, *J. Fluid Mech.*, vol. 60, Part 1, pp. 105-127.
- Drazin, P. G. and D. W. Moore, 1967: Steady two-dimensional flow of fluids of variable density over an obstacle, *J. Fluid Mech.*, vol. 28, pp. 353-370.
- Furukawa, T., 1973: Numerical experiments of the airflow over mountain; I. Uniform current with constant static stability, *J. Meteor. Soc. Japan*, vol. 6, pp. 400~418.
- Haussling, H. J., 1977: Viscous flow of

- stably stratified fluids over barriers , J. Atmos. Sci. , vol. 34 , pp. 589~602.
- Hwang , R. R. and S. W. Jang , 1982 :  
Laboratory study on the two-dimensional flows of stratified fluids over barriers , J. Chinese Inst. of Eng. , vol. 5 , No. 3 , pp. 167~177.
- Jones , O. K. , 1970 : The flow of a stratified fluid over a vertical step , Tellus , vol. 12 , pp. 481-492.
- Lin , J. T. and C. J. Apelt , 1972 :  
Stratified flow over a vertical barrier , Lecture Notes in Physics , vol. 19 , pp. 176-183.
- Long , R. R. , 1953 : Some aspects of the flow of stratified fluids I , Tellus , vol. 5 , pp. 42-48.  
——, 1954 : Some aspects of the flow of stratified fluids II , Tellus , vol. 6 , pp. 97-115.  
——, 1955 : Some aspects of the flow of stratified fluids III , Tellus , vol. 7 , pp. 341-357.
- Miles , J. W. , 1968 : Lee waves in a stratified flow I , J. Fluid Mech. , vol. 32 , pp. 549-567.  
——, 1968 : Lee waves in a stratified flow II , J. Fluid Mech. , vol. 33 , pp. 803-814.  
——, 1969 : Lee waves in a stratified flow III , J. Fluid Mech. , vol. 35 , pp. 481-525.
- Son , J. S. and T. J. Hanratty , 1969 :  
Numerical solution of flow around a cylinder , J. Fluid Mech. , vol. 35 , pp. 369-386.

## Lee-Waves in Atmospheric Stratified Fluid Flows

Robert R. Hwang

Institute of Physics, Academia Sinica

### ABSTRACT

Numerical techniques of ADI method for integrating the time-dependent Navier-Stokes equations, which have proven useful in the study of homogeneous viscous flows, have been extended in this study to investigate the flows of stably stratified viscous fluids over a ridge of semielliptical cylinder of infinite length with the different ratio of height to half-width of the obstacle. Various properties of the flow field and the characteristics of the lee waves formulated are investigated.

Results show that the stratification tends to encourage the development of overturning flow regions on the upstream slope (blocking effect) and downstream from the ridge. Lee waves produced for viscous flows of stratified fluid past over obstacles depend on the internal Froude number and the Reynolds number of the flow, and the aspect ratio (i. e. the ratio of height to half-width) of the obstacle to some extent. The existences of upstream influence and the flow separation induced by the obstacle have a great effect on the development of the lee-wave field for cases of small value of internal Froude number.