大氣能量問題之探討

嚴夢輝

A Discussion of Energy Eguations for the Atmophere

引　　言

大氣能量問題的研究，論歷史，已逾半個世紀，論文獻，可說汗牛充棟。但由於某些物理變數無法直接測量，同時氣象學者也沒有奠立統一的哲學基礎，使這個古老的問題懸而不決，直到今天（以及相當時間以後）還是一個新的問題。因為大氣能量問題一日得不到進展，則整個氣象科學也很難向前邁步，例如大氣環流問題，天氣預報問題等等的最重要關鍵實在只有一個——那就是大氣能量的變換問題。本文所介紹的方程式離應用階段雖遠，但不妨視為氣象科學家努力實現的一幅理想藍圖。

基本能量方程式

在氣象分析上最常用的能量定律，就是「熱力學第一定律」。設所研究的流體系統處於三維歐氏空間之中，並採取卡氏坐標 Z^i，可使問題易於明瞭，因此時逆變及協變張量（Contravariant or covariant tensor）可以彼此互換而不必經過任何變換程序，則熱力學第一定律可寫成下列形式：

$$(1)\quad \frac{d}{dt}(C_v T + L) = Q^I + Q^L + \alpha P^{Ki} V,^i_k$$

上列形式的熱力學第一定律，可應用於容積極小的流體系統，其中包含水汽，但假設其熱能函數與完全氣體相同；此系統對周圍空氣相對的靜止（運動速度和空氣速度相同），惟受有空氣粘力（Viscous force）的影響。上式中 C_v 為混合氣體的定容比熱，T 為絕對溫度，$d(C_vT)/dt$ 為單位質量的熱能變率，dL/dt 為水汽單位質量的潛能（潛熱能量）變率，Q^I 為經過系統邊界，藉輻射或分子傳導加入系統中單位質量的熱能，Q^L 為經過邊界加入系統中的水汽，由其淨通量所產生的單位質量的潛能。(1)式右端最後一項為對系統單位質量所作的功（對抗分子應力），α 為混合氣體的比容，$V,^i_K = \partial V^i/\partial Z^K$，$V^i$ 為粘性流體的逆變分速，P^{Ki} 為分子應力張量，其分量為：

$$(2)\quad P^{Ki} = P^{iK} = -\delta_{iK}\left(P + \frac{2}{3}\mu V,^j_j\right) + \mu\left(V,^i_K + V,^K_i\right)$$

式中 P 為氣壓，δ_{IK} 為基本協變張量，當 $i=k$ 時，$\delta_{IK}=1$；當 $i \neq k$ 時，$\delta_{IK}=0$。μ 為分子粘性係數，如速度梯度小至可以忽略，或流體無粘性（$\mu=$ ），則 P^{Ki} 為：

$$p^{12}=p^{21}=p^{13}=p^{31}=p^{23}=p={}^{32}=0$$

$$p^{11}=p^{22}=P^{33}=-p$$

在轉動地球上，一可壓縮的粘性流體，可以 Newton 第二運動定律表示如下：

$$(3)\quad \begin{cases} \dot{V}^1 + (2\omega\cos\phi)V^3 - (2\omega\sin\phi)V^2 = \alpha P^{K1}_{,K} \\ \dot{V}^2 \qquad\qquad\qquad + (2\omega\sin\phi)V^3 = \alpha P^{K2}_{,K} \\ \dot{V}^3 \qquad\qquad\qquad - (2\omega\cos\phi)V^1 = \alpha P^{K3}_{,K} - g \end{cases}$$

式中 ω 為地轉角速度，ϕ 為緯度，g 為重力加速度，Z^1 軸指東，Z^2 軸指北，Z^3 軸指天頂。如(3)式中各式依次乘以 V^1、V^2、V^3 並相加，則地轉偏向晤即行消去而成為：

$$(4)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{(V^i)^2}{2}\right) = \alpha V^i P^{Ki}_{\cdot K} - V^3 g$$

式中 $(V^i)^2 = (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2$。上式右端第一項係流體系統運動時，因對抗運動方向「淨分子應力」所作的比功，而

$$\alpha V^i P^{Ki}_{,K} = -\alpha P^{Ki} V,^i_K + \alpha(V^i P^{Ki}),_K$$

如重力加速度的變化略去不計，則 $(-V^3 g)$ 可寫為 $-d(gZ^3)/dt$，故(4)式成為：

$$(5)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(V^i)^2 + gZ^3\right) = -\alpha P^{ki} V,^i_k + \alpha(V^i P^{ki}),_k$$

上式 $i,k=1,2,3$，(5)式雖然由運動方程式藉數學變換而來，但可視為方程式(1)普遍能量定律的特例，因兩者所適用的系統完全相同。為了簡單明晰起見，以下各方程式都使用下列各項符號：

$$(6)\quad \begin{cases} E = C_v T\text{，單位質量的熱能} \\ K = \frac{1}{2}(V^i)^2\text{，單位質量的動能} \\ P = gZ^3\text{，單位質量的位能} \\ M = \alpha P^{Ki} V,^i_K \end{cases}$$

使用上列符號，方程式(1)及(5)成為：

$$\frac{d}{dt}(I+L)=[Q^{I}+Q^{L}]_{A}-[-M]_{W} \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}(K+P)=-[M-\alpha(V^{i}P^{ki})_{,k}]_{W} \tag{8}$$

註脚 A 表示對系統加入能量， W 表示系統本身作功。 M 所代表的功，係由動能與位能總和中所取出的能量，使熱能與潛能的總和對應的增加，也就是由分子應力的力學作用變換而來的能量，故稱 M 爲分子變換函數。對氣象問題可以適用的能量方程式，藉某些簡化的假設，及溼空氣的物理性質，可自(7)、(8)二基本能量方程式用純數學的方法推演出來。

能量方程式的普遍化

基本能量方程式對一龎大的非均質系統，不論邊界面（Boundary Surface）的運動及形態如何變化，都可對其容積予以積分，由連續方程式

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\rho V^{k})_{,k}=0$$

式中之 ρ 爲容積極小混合氣體的密度，乘以 (K+P)，與(8)式乘以ρ後相加，則

$$\frac{\partial}{\partial t}(K^{*}+P^{*})=-\left[\int_{\sigma}V^{n}\rho(K+P)d\sigma\right]_{A}-\left[M^{*}-\int_{\sigma}V^{i}P^{ni}d\sigma\right]_{W} \tag{9}$$

附有星號的各項，表示乘以 ρ 後並對容積予以積分，例如 $K^{*}=\int_{v}\rho KdV$ 。上式右端的體積分已由 Green 定理變換爲面積分，$d\sigma$ 爲構成邊界面的元素，V^{n} 爲由系統向外垂直於邊界面的空氣分速， P^{ni} 爲作用於邊界面切面方向的應力分量 。 經過邊界面進入系統的能量（K+P） ，應爲局部變率加上因邊界面運動而起的淨通量（邊界面向外運動的法線速度爲Vn） ：

$$\frac{D}{Dt}(K^{*}+P^{*})=\frac{\partial}{\partial t}(K^{*}+P^{*})+\int_{\sigma}V^{n}\rho(K+P)d\sigma \tag{10}$$

因此，(9)式成爲

$$\frac{D}{Dt}(K^{*}+P^{*})=\left[\int_{\sigma}u\rho(K+P)d\sigma\right]_{A}-\left[M^{*}-\int_{\sigma}v^{i}p^{ni}d\sigma\right]_{W} \tag{11}$$

式中 $u=V^{n}-v^{n}$， 即邊界面對空氣的相對速度。同理，(7)式成爲：

$$\frac{D}{Dt}(I^{*}+L^{*})=\left[\int_{\sigma}[u\rho(I+L)-q_{n}^{I}-q_{n}^{L}]d\sigma\right]_{A}-[-M^{*}]_{W} \tag{12}$$

式中 q_{n}^{I} 及 q_{n}^{L} 各爲熱能通量 q_{k}^{I} 及潛能通量 q_{k}^{L} 垂直於邊界面的分量，其方向自系統向外。通量 q_{k}^{I} 及 q_{k}^{L} 與Q^{I} 及Q^{L} 的關係如下：

$$\rho Q^{I}=-q^{I}_{k,k}，\rho Q^{L}=-q^{L}_{k,k} \tag{13}$$

將⑪式與⑿式相加，即得「總能」方程式：

$$\frac{D}{Dt}(I^{*}+L^{*}+K^{*}+P^{*})=\left[\int_{\sigma}[u\rho(I+L+K+P)-q_{n}^{I}-q_{n}^{L}]d\sigma\right]-\left[-\int_{\sigma}v^{i}p^{ni}d\sigma\right]_{W} \tag{14}$$

因⒁式中的 M^{*} 項已經消去， 所以縱然系統內部的程序絲毫不知，只須由邊界的測量即可計算「總能」的變化。

能量方程式的平均化

通常氣象觀測值，必須經過一種平均程序（Averaging Processes），才能代入基本能量方程式中，獲得正確的計算， 否則誤差很大 。一組觀測 S，可分爲平均值 $\overline{S}$ 及對平均值的偏差 S' 兩部分，即：

$$S=\overline{S}+S' \tag{15}$$

所謂平均值，就是對「時空」的積分：

$$\overline{S}=\frac{\int_{v}\int_{t}sdtdV}{V\,t} \tag{16}$$

式中 V 爲觀測儀器所佔空間的容積，t 爲由於儀器的惰性，自動調整讀數（平均）所需的時間。應用分析程序，熱力學第一定律的平均性，可聯合連續方程式使(7)式變換爲下列形式：

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho I+\rho L)+(v^{k}\rho I+v_{k}\rho L)_{,k}=\rho Q^{I}+\rho Q^{L}+\rho M \tag{17}$$

如以 $\overline{V^{k}}+V'^{k}$ 代替 V^{k}， 並用⑯式將各項以 $\overline{V^{k}}$ 所屬的時空予以平均，則

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\overline{I}+\rho\overline{L})+(\overline{V^{k}}\rho\overline{I}+\overline{V^{k}}\rho\overline{L}+\rho\overline{V'^{k}I}+\rho\overline{V'^{k}L})_{,k}=\rho\overline{Q}^{I}+\rho\overline{Q}^{L}+\rho\overline{M} \tag{18}$$

式中之

$$\overline{M}=\alpha\overline{p}^{ki}\overline{V}^{i}_{,k}+\alpha\overline{p'^{ki}v'^{i}_{,k}}+\alpha\overline{p'^{ki}\overline{V}^{i}_{,k}}+\alpha\overline{\overline{p}^{ki}v'^{i}_{,k}}$$

如上式最後二項略去不計，前二項分別以 M_{m} 及 M_{e} 表示之，並將能量方程式對任意系統的總容積求其積分，則：

$$\frac{D}{Dt}(\overline{I}^{*}+\overline{L}^{*})=\left[\int_{\sigma}[\overline{u}\rho(\overline{I}+\overline{L})-\overline{\rho v'^{n}(I+L)}-\overline{q}_{n}^{I}-\overline{q}_{n}^{L}]d\sigma\right]_{A}-[-M^{*}_{m}-M^{*}_{e}]_{W} \tag{20}$$

此處之 $\overline{u}$ 爲邊界面相對於 $\overline{v}^{n}$ 的法線方向分速，即 $V^{n}-\overline{v}^{n}$ 。$\overline{u}\rho(\overline{I}+\overline{L})$ 爲平均熱能與平均潛能的通量，與邊界的速度相同；$\rho\overline{v'^{n}(I+L)}$ 是在「面積分」以前所作的局部平均，因其速度 v'^{n} 係垂直於邊界面的空氣「渦速」(eddy velocity)，故可稱爲熱能與潛能的「渦流通量」(eddy flux) 。$\overline{q}_{n}^{I}$ 及 $\overline{q}_{n}^{L}$ 爲通量的平均值，其意義與⑿中所出現的相同， M^{*}_{m} 及 M^{*}_{e} 爲分子變換函數的體積分，前者係對平均應力與速度而言，後者對平均應力和速度的偏差而言。

由運動方程式使能量方程式平均化的推導方法有二種：先將方程式經過平均程序，再換算爲僅包含平均運動動能的方程式；或先換算成能量方程式再行平均，成爲一個包含平均運動與渦流運動二種動能的方程式。

第一法，用連續方程式將(3)式換算爲動量的形式，再以⒃式將各項予以平均化。(3)式中各式依次乘以 $\overline{v}^{1}$，$\overline{v}^{2}$，$\overline{v}^{3}$， 並將平均化的連續方程式乘以（$-\frac{1}{2}(\overline{v}^{i})^{2}$，然後四式相加，其結果爲：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sigma(\overline{v}^{i})\frac{2}{2}+\overline{\rho gZ^{3}}\right)+\left(\overline{v}^{k}\rho\frac{(\overline{v}^{i})^{2}}{2}+\overline{v}^{k}\overline{\rho gZ^{3}}\right)_{,k}=\overline{v}^{i}T^{ki}_{,k}+\overline{V}^{i}\overline{p}^{ki}_{,k} \tag{21}$$

式中 T^{ki} 代表「渦流應力」張量，即：

$$T^{ki}=T^{ik}=-\rho\overline{v'^{i}v'^{k}} \tag{22}$$

這一項由加速度項的平均而來，但仍可視爲對抗平均運動的應力。㉑式的普遍化方程式如下：

$$\frac{D}{Dt}(K^{*}_{m}+\overline{p}^{*})=\left[\int_{\sigma}\overline{u}\rho(K_{m}+P)d\sigma\right]_{A}-\left[M^{*}_{m}+E^{*}-\int_{\sigma}\overline{v}^{i}(\overline{p}^{ni}+T^{ni})d\sigma\right]_{W} \tag{23}$$

式中 $K_{m}=\frac{1}{2}(\overline{v}^{i})^{2}$，爲平均運動中單位質量的動能，$\overline{p}=\overline{gz^{3}}$，相當於未平均的 gz^{3}， 或 P、E 爲渦流變換函數，即

$$E=\alpha T^{ki}\overline{V}^{i}_{,k} \tag{24}$$

其他各項與前述意義完全相同。

第二法，先將基本動能方程式(8)變換爲單位容積，再以 $\overline{v}^{i}+\overline{v}'^{i}$ 及 $\overline{p}^{ki}+\overline{p}'^{ki}$ 分別代替 v^{i} 及 p^{ki}，則各項即被平均化，而方程式中已包含渦流運動與平

均運動二種動能，再由此方程式減去㉑式，並變換普遍系統，得：

$$\frac{D\overline{K^{*}_{e}}}{Dt}=\left[\int_{\sigma}(\overline{u}\rho\overline{K_{e}}-\rho\overline{v}'^{n}K_{e})d\sigma\right]-\left[M^{*}_{e}-E^{*}+\int_{\sigma}\overline{v'\ p'^{ni}}d\sigma\right]_{W} \tag{25}$$

式中 $K_{e}=\frac{1}{2}(v'^{i})^{2}$， $\overline{K_{e}}=\frac{1}{2}(v'^{i})^{2}$，函數 E^{*} 在㉓式與㉕式中符號相反， 此即稱 E 爲渦流變換函數的原因，E^{*} 爲正時，將減少平均運動的能量而增加渦流運動的能量。

討　　論

方程式⒇、㉓、㉕等三式構成大氣普通能量方程式的一個系列，各種不同的特殊方程式都可由此三式導出。例如在均質而無擾動的膜流(Laminar flow)系統中，若系統的邊界隨空氣而運動，則㉕式即行消失，而⒇式及㉓式就變成方程式(7)及(8)。

設㉕式應用於均質系統，各項消失後而成爲下列形式：

$$\frac{D\overline{K^{*}_{e}}}{Dt}=-M^{*}_{e}+E^{*} \tag{26}$$

右端第一項爲渦流能量轉變成熱能時的耗失量；第二項 E^{*}, 對摩擦層而言，主要爲下式的體積分：

$$E^{*}=\rho E=-\rho\overline{v'^{1}v'^{3}}\ \overline{v}^{1}_{,3}-\rho\overline{v'^{2}v'^{3}}\ \overline{v}^{2}_{,3} \tag{27}$$

普遍能量方程式有四種不同的結合：三式全部相加，或其中任何二式相加。如三式同時結合，可得一「總能」方程式如下：

$$\frac{D}{Dt}(\overline{I}^{*}+\overline{L}^{*}+\overline{K}^{*}_{m}+\overline{P}^{*}+\overline{K}^{*}_{e})=\left[\int_{\sigma}[\overline{\overline{u}}\rho(\overline{I}+\overline{L}+\overline{K}_{m}+\overline{p}+\overline{K}_{e})-\rho\overline{v'^{n}(I+L+K_{e})}]d\sigma\right]_{A}-\left[-\int_{\sigma}[\overline{v}^{i}(\overline{p}^{ni}+T^{ni})+\overline{v'^{i}p'^{ni}}]d\sigma\right]_{W} \tag{28}$$

若在邊界面上沒有「能通量」或「功」發生，則系統內的總能保持不變，此即能量不滅定律。

如方程式㉘中略去擾動及邊界運動，即得 Margules 氏的大氣能量變換模式：

$$\frac{D}{Dt}(I^{*}+L^{*}+K^{*}+P^{*})=0 \tag{29}$$

此模式對氣象思想雖有很大影響，但與實際情況比較，仍有一段遙遠的距離。如略去擾動，粘性應力，潛

（下接第16頁）