傅立葉轉換在氣象上的應用

申博文 呂木村

空軍氣象中心

摘 要

傅立葉轉換（Fourier Transform)在科學界廣泛地被運用解決各種問題，並且曾被喻爲″數學中美麗的詩篇″。

本文嚐試說明傅立葉轉換（CFT ）和離散傅立葉轉換（DFT ）之間的關係，兩者之間連繫的橋樑——取樣定理（sampling theorem）亦加以剖析研究。文末並說明如何利用快速傅立葉轉換（FFT ）去計算ＣＦＴ的解，並且利用此一步驟求得偶流（doublet），渦漩流（point vortex）的基本流場。

一、前 言

在介紹傅立葉轉換之前，讓我們先看看什麼是廣義傅立葉級數。像這樣的一組方程式再加上邊界條件，我們稱之爲Sturm-Liouille Problem (S-L problem, kreyszig(1983)

$(ry')'+(q+\lambda p)y=0 \qquad a\leq t\leq b$

$k_1y(a)+k_2y'(a)=0 \qquad (k_1,k_2$不全爲０）

$l_1y(b)+l_2y'(b)=0 \qquad (l_1,l_2$不全爲０） (1)

其中P(t)稱之爲權重函數，λ稱之爲特徵值，這個微分方程式的解有以下特性：

(1)解有可數的無限多個（countable infinite）

(2)特徵值λ爲實數

(3)這些解彼此正交（orthogonal）

基於以上特性，這些解的集合可以組成一個完全集（complete set），用以描述一個函數。如f(t)是定義在(a,b)之間的函數，Yn（n=0～∞）是上式的解，則函數可以寫成

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ny_n(t) \quad a_n=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)y_n(t)p(t)dt}{\int_{-\infty}^{\infty}f(t)y_n(t)p(t)dt} \qquad (2)$$

這級數便稱爲廣義傅立葉級數。而f(t)在$\{y_n\}$構成的空間中，以a_n=(n=0～∞）來描述。

而三角級數正是某一特別的S-L problem的解，因此三角級數可以做爲基底用以描述一個函數。

當函數利用三角級數展開時，$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\exp\frac{i2n\pi t}{T}$

，T爲週期，等號右邊可視爲許多不同周期的波動疊加（superposition ）起來，而a_n正是不同頻率（週期的倒數）的波動，其振幅的大小。值得注意的是，這些疊加波動的頻率，是基頻（$\frac{1}{T}$）的整數倍，是離散（discrete）分佈的。因爲a_n與頻率有關，而a_n描述了f(t)，因此我們說函數f(t)由時間域轉到頻率域。

a_n是不同頻率波動的振幅大小，其值愈大代表函數f(t)的性質愈接近該頻率的波。而研究不同頻率的波，其對函數行爲的影響程度，便稱爲波譜分析，至於正模法（normal modes method ）則是用來求取振幅大小（a_n）的。

以上所述大半强調一有限區域的函數或是周期函數，被三角級數表示（展開）的情形，而當函數

既非週期，且定義域亦非有限，則是否仍可以用三角函數表示呢？結果是肯定的，我們可以將此類函數視爲一週期爲To，而To→∞，如此函數便可以有類似（Eq2）的表示式了。但其〞和〞（summation）變成了〞積分〞（integral）了，而頻率不再是離散的，而變爲連續的了。這便是所謂的傅氏積分或逆傅立葉轉換。

稍後我們將會介紹傅立葉轉換的特性，這些特性將有助於我們解決許多問題。工程或科學上有許多問題是以偏微分方程式表示的，若這些方程式本身是線性的（linear），或是經由某種簡化可化成線性的，則我們往往可以利用傅立葉轉換幫助我們求解。 O.D.E（ordinary differential equation）經由傅立葉轉換後可以得到代數方程式，而P.D.E（partial differential equation）經由傅氏轉換則可得到O.D.E 。這些簡化後的方程式，均較原方程式容易求解，求得解析解（analytic solution）後，可求其逆傅立葉轉換而得到眞正的解，若逆傅氏轉換無法獲得解析解，則我們可以利用離散傅氏傳換（D.F.T disarete fourier transform ）去求得數值解。

本文內容如下安排：第一節是前言，第二節則比較傅氏級數與傅氏轉換的異同，第三節介紹褶積（convolution）及其傅氏轉換，第四節說明D.F.T和C.F.T（continuons fourier transform ）的關聯，第五節則是傅立葉轉換的應用，分別與其它學者的研究做定性和定量上的比較。附錄A是討論取樣定理（sampling theorem）的構成，附錄B是介紹D.F.T的特性。

二、傅氏級數和傅立葉轉換

綜合上述，我們將傅氏級數（Fourier series）和傅立葉轉換做一比較，如（表一）所示。周期爲T的函數，或函數的定義域在有限距離內（設定義域長度爲T），則函數可以用傅立葉級數表示Eq(3.1)而其中$\exp\frac{i2n\pi t}{T}$爲基底函數C_n爲係數，代表各頻率波的振幅大小。利用基底函數的正交性可得CnEq(3.2)。選定$\exp\frac{i2n\pi t}{T}$爲基底函數，因此C_n的集合決定了$h_1(t)$，而C_n與頻率有關，因此我們說在時域上的$h_1(t)$函數，亦可由頻率域的C_n大小來描述，這也說明一個函數，我們可以從時域上去討論或從頻率域上去討論。

而當時域上的函數並非週期函數時，如$h_2(t)$，則其可以寫成傅氏積分Eq(4.1)　，又稱爲逆傅立葉轉換），其中$\exp(i2\pi ft)$亦可看做基底，而H(f)則爲振幅大小，由Eq(4.2)決定，而上式又稱爲傅立葉轉換。從Eq(3.1)(3.2)和Eq(4.1),(4.2)的比較，我們知道其外觀非常相似，而其物理意義也相同，只不過前者頻率的爲離散的，後者的爲連續的。

若函數尙滿足其它特性，我們可以發現其傅氏級數和傅氏轉換亦都有一極相似的結果，如（表一）所示。

$$h_1(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n\exp\frac{i2n\pi t}{T} \quad (3.1) \qquad h_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}H(f)\exp(i2\pi ft)\,df \quad (4.1)$$

$$C_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}h_1(t)\exp\frac{-i2n\pi t}{T} \quad (3.2) \qquad H(f)=\int_{-\infty}^{\infty}h2(t)\exp(-i2\pi ft)\,dt \quad (4.2)$$

令i=1,2，其中（4.2）稱爲傅立葉轉換，（4.1）稱爲逆傅立葉轉換。

$h_i(t)$爲實數→　$C_n=C_n^*$　(3.3)　$H(-f)=H(f)^*$　(4.3)

$h_i(t)=h_i(-t)$ →Cn爲實數　(3.4)　H(f)爲實數　(4.4)

$h_i(-t)=-h_i(t)$→Cn爲虛數　(3.5)　H(f)爲虛數　(4.5)

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|h_1(t)|^2dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n|^2 \quad (3.6) \qquad \int_{-\infty}^{\infty}|h_2(t)|^2dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2df$$

表　一

傅立葉轉換的特性：本節我們介紹傅立葉轉換的基本特性，令F代表傅立葉轉換：

(1)線性

$$F\{ah(t)\}+F\{bg(t)\}=aF\{h(t)\}+bF\{g(t)\} \quad (5)$$

(2)時間尺度

$$F\{h(kt)\}=\frac{1}{|k|}F\{h(t)\} \quad (6)$$

(3)位移特性

$$F\{h(t-to)\}=F\{h(t)\}\cdot\exp-(i2\pi fto) \quad (7)$$

(4)180。旋轉

$$F\{F\{h(t)\}\}=h(-t) \quad (8)$$

(5)褶積（請見下節分析）

$$F\{\int_{\infty}^{\infty}h(\tau)g(t-\tau)d\tau\}=F\{h(t)\}F\{g(t)\} \quad (9)$$

(6)Parseval's theorem（能量守恒定理）

$$\int_{-\infty}^{\infty}h(t)g^*(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}F\{h(t)\}F^*\{g(t)\}df \quad (10.a)$$

若g(t)=h(t)，則

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|^2dt=\int_{-\infty}^{\infty}|F\{h(t)|^2df \quad (10.b)$$

(7)
$$F\{\sum_{n=\infty}^{\infty}\delta(t-nT)\}=fo\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(f-fo),fo=\frac{1}{T} \quad (11)$$

脈衝列的傅立葉轉換仍爲脈衝列，（圖１），這種特性在〞取樣定理〞（稍後介紹）中常用到。δ(t)爲廣義函數（delta function）。

三、褶積及其傅立葉轉換

已知x(t)和h(t)，其褶積定義如下：

$$x*h=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

若己圖解方式，我們可以分爲以下步驟，參閱（圖２）：

1.折疊（folding）
2.位移（displacement）
3.相乘（multiplication）
4.積分（integration）

由圖解方式，我們可以比較清楚了解褶積計算的過程，若$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，δ(t)爲廣義函數，而$h(t)=1$當$|t|\le\frac{T}{4}$，$h(t)=0$當$|t|>\frac{T}{4}$，考慮褶積x(t)*h(t)， 根據以上的步驟，我們可以知，我們可以知道將複製許多和h(t)一樣的波形，且平移至廣義函數（δ (t-nT)）的所在位置，（如圖３）。

接著討論褶積的傅立葉轉換，經由計算我們可以了解：

$$F\{x*h\}=F\{x\}F\{h\}$$

也就是說褶積的傅立葉轉換等於函數分別做傅立葉轉換後之積。通常我們所謂的〞濾波〞，是指在頻率域上乘上一函數，例欲將h(t)做band-pass ，則乘上F{x}=1當|f|≦fc,F{x}=0當|f|>fc ，然後再做逆傅立葉轉換，經由上式我們便可以知道濾波除了可以在頻率上進行外，亦可在時間域上進行（即做褶積），其好處是可不必再做一次逆傅立葉轉換，其缺點則是得先知道x(t)。

四、離散傅立葉轉換和連續傅立葉轉換之關係

在某些情況下，連續傅立葉轉換無法求得解析解，而必須藉助電腦求得數值解，因此如何將連續傅立葉轉換，經由〞取樣〞寫成離散（discrete）傅立葉級數，是值得重視的課題，所謂〞取樣〞，便是將連續函數選取“可數的有限個”函數值用以代表原來連續函數的性質，用氣象上的術語就是以網格點的值代表函數，而用數學式子來表示就是函數乘上脈衝列（或謂脈衝級數）$\sum_{n=\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$，如圖(5.3a,b,c)。而取樣是否合理，就在T值大小。

（圖４）和（圖５）是兩種取樣的步驟，取樣(一)，取樣(二)，（圖4.e）和(圖4.5e）是取樣後的離散函數，（圖4.f）和（圖5.f）則是其傅立葉轉換。其分別由（圖4.c）和（圖4.d）、及（圖5.c）和（圖5.d ）的褶積所得。由這兩張圖，我們可以了解當$T>\frac{1}{2fc}$時，T爲取樣間隔，其離散函數的傅

立葉轉換（圖5.f）和原函數的傅立葉轉換（圖5.c）差別很大，有混疊效應（aliasing），因此我們除了直觀的認定取樣時T不可太小外，同時在此也用圖解的方式說明T要小於等於$\frac{1}{2fc}$即$T \leq \frac{1}{2fc}$），此即取樣定理條件。而就物理意義上討論，h(t)爲band-limited，即H(f)=0當｜f｜＞fc，fc爲截斷頻率（cut-off frequency），則其最大的頻率爲fc，相對應最小週期爲$\frac{1}{fc}$。而欲描述一個波動現象（以三角函數波而言），最少需取樣三點即取樣間隔T需是周期的一半，因此欲描述最小周期的波，其$T = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{fc}$，而當採取$T \leq \frac{1}{2} fc$ 這種取樣時，自然不會漏掉任何週期的波，至於取樣定理的數學證明請見附錄A。

取樣（三），$T = \frac{1}{2fc}$（圖6），我們可以發現恰可避免混疊（aliasing），但此離散函數的傅氏轉換（圖6.f），仍與原函數的傅氏轉換（圖6.c）有一段差距。因此若要在頻率上做取樣反求原函數時，爲滿足頻域上的取樣定理，則必須將(圖6.f)的周期性取出一個周期，最直接的方式便是乘上一個Window函數（圖7.b），而其傳氏轉換爲sinc函數（圖7.d），由（圖7.c）和（圖7.d）做褶積，我們可求得函原函數h(t)（圖7.f）。

爲了產生離散傅氏轉換及離散逆傅氏轉換，以h(t)爲例，我們必須在時域及頻域上做“取樣”，而當頻域做取樣時，爲了滿足頻域上的取樣定理，則h(t)須滿足僅在有限區域內有值，即h(t)=0, ｜t｜＞To。若h(t) 不滿足，通常我們得人爲乘上一Window函數。整個流程可以用（圖8）來說明，左半圖爲時域上函數的原貌，右半圖則是頻域上（經傅氏轉換後）的分佈情形。（圖8.a）爲原函數h(t)及其傅氏轉換H(f)，經由時域上的取樣得（圖8.c），再乘上Window函數得（圖8.d）。透過頻域上的取樣，則求得離散傅氏轉換對（圖8.g），至於離散傅氏轉換亦有許多性質和連續傅氏轉換相似，詳細對論請見附錄B。

五、傅立葉轉換的應用

時域經由傅立葉轉換後，是頻域上的函數，而空間函數（x,y,z）經由傅立葉轉換則爲波數（Wave number）上的函數。考慮穩定的（steady），的線性化（linearized）的方程組（申,1992），經由傅立葉轉換，在波數空間可得到解析解（analytic solution），若逆傅立葉轉換可求，則真實空間的解可得，但因爲逆傅立葉轉換不易求得解析解，因此我們藉助離散逆傅立葉轉換（inverse discrete fourier transform）去求得數值解。

考慮申（1992）方程組（3.1）～（3.5），爲討論不同尺度的地形產生的影響，我們將水平方向做尺度轉換，令

x=ax',　　y=ay'

則對應波數空間的尺度轉換爲

$$k=\frac{k'}{a},\qquad l=\frac{l'}{a}$$

我們可求得

$$\eta=\int\int dk'dl'\exp(2\pi i(k'x'+l'y'))F_{x',y'}\{h\}\eta_s \quad (12.1)$$

$$u'=\int\int dk'dl'\exp(2\pi i(k'x'+l'y'))u_oF_{x,y'}\{h\}\tau_s \quad (12.2)$$

$$u'=\int\int dk'dl'\exp(2\pi(k'x'+l'y'))u_oF_{x',y'}\{y\}\tau_s \quad (12.3)$$

$$p'=-\rho\int\int dk'dl'\exp(2\pi i(k'x'+l'y'))p_oF_{x',y'}\{h\}\tau_s \quad (12.4)$$

$$\xi'=f\int\int dk'dl'\exp(2\pi i(k'x'+l'y'))F_{x',y'}\{h\}$$

$$m^2=4\pi^2(k'^2+l'^2)\frac{N^2-\frac{4\pi^2k'^2U^2}{a}}{4\pi^2k'^2U^2-a^2f^2} \quad (13.1)$$

$$u_o=(4\pi^2k'^2U-i2\pi al'f)\left(\frac{N^2-\frac{4\pi^2k'^2U^2}{a}}{4\pi^2k'^2U^2-a^2f^2}\right) \quad (13.2)$$

$$V_o=(4\pi^2k'l'U+i2\pi ak'f)\left(\frac{N^2-\frac{4\pi^2k'^2U^2}{a}}{4\pi^2k'^2U^2-a^2f^2}\right)$$

$$p_o=\left(N^2-\frac{4\pi^2k'^2N^2}{a}\right) \quad (13.4)$$

$$F_{x',y'}\{h\}=\int\int h(ax'ay')\exp(-2\pi i(k'x'+l'y))dx'dy' \quad (13.5)$$

而η_s, τ_s, k_s由以下式子所定義：

$$\eta_s=\exp(-Mz),\ M=\sqrt{-m^2}\ 當\ \frac{aN}{2\pi U}<|k|\ 或$$

$$|k|<\frac{af}{2\pi U} \quad (14.1)$$

$$\tau_s=\frac{-1}{M}\exp(-Mz)\ ，同上 \quad (14.2)$$

$$k_s=-M\exp(-Mz)，\ 同上 \quad (14.3)$$

$$\eta_s=\exp(imz)，當\ \frac{af}{2\pi U}<|k|<\frac{aN}{2\pi U} \quad (14.4)$$

$$\tau_s=\frac{-i}{M}\exp(imz)，\ ....同上... \quad (14.5)$$

$$k_s=im\exp(imz)，\ ....同上... \quad (14.6)$$

以下爲方便起見，我們用（x,y）代替（x',y'），用（k,l）代替（k',l'）。在Eq(12.1)-(12.5)中，我們得計算逆傅立葉轉換（Inverse Fourier transform），但假若被積函數爲band-limited，即被積函數只有在某一個區域內有值，則CIFT（Continuous Inverse Fourier Transform），可用DIFT（Discrete Inverse Fourier transform）近似（見附錄A和B），進一步可用IFFT（Inverse Fast Fourier Transform）去計算，因爲鐘形地形的傅立葉轉換爲$\exp(-2\pi\sqrt{k^2+l^2})$，當l=0,k=1.1其數量級大小爲$0(10^{-3})$，因此若我們選取｜k｜＞1，則被積函數滿足Band-limited考慮：

水平計算範圍　x:-24～24　y:-24～24
x方向取樣點數　M=128
y方向取樣點數　N=128
水平輸出範圍　x:-6～6　y:-6～6

注意水平單位爲地形尺度(a)，$\delta x=\frac{48}{M}$，$\delta y=\frac{48}{N}$，而爲滿足取樣定理（Sampling theorem）

取$\delta k=\frac{1}{M}\times\frac{1}{\delta x}$、$\delta l=\frac{1}{N}\times\frac{1}{\delta y}$ 則波數k方向計算區域爲〔-kc,kc〕、波動l方向計算區域[-lc,lc]，$kc=\frac{M}{2}\times\delta k=\frac{4}{3}$、$lc=\frac{N}{2}\times\delta l=\frac{4}{3}$。

上述取樣過程，被積函數滿足Band-limited，因此可以用IFFT計算。爲測試IFFT計算法則和程式，我們計算了一些結果，並且與現有的線性析解比較。爲配合不同的水平尺度，因此物理量均以山高單位，且(1) 當a=0.1km，我們利用程式來求得Eq(12.2)和Eq(12.3)之風場擾動量的數值解，其結果滿足位勢流(Potenial flow)型態，爲一偶流(圖9.b)，與解析解（圖9.1）吻合。(2)而a=700km，$f=10^{-4}$的結果（圖9.d），則與Buzzi & Tibaldi(1977)和Smith(1979a)的解（圖9.c）一致，風場擾動量呈一渦漩流。以上均爲定性比較，而個案(3)則是定量比較，在a=10km，吾人求得之壓力擾動量分析如（圖9.f），若和smith(1980)的結果比較（圖9.c），則可發現其極大值分爲3.83和3.8，誤差約1%。除以上比較外，值得注意的是，當相同地形尺度，但地形水平剖面爲橢圓時，而長軸和基本風場有一夾角，其解仍類似偶流和渦漩流（圖10）。這是否意謂橢圓地形在a=0.1km,a=700km 時仍可求得解析解呢？值得我們繼續研究。

附錄A：

取樣定理的構成：吾人以兩種方法來說明取樣

定理（sampling theorem）的函義及其推導的步驟。

（法一）（參考Rosenfeld & Kak(1982)）

$$\text{令} h(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k\triangle t)g(t-k\triangle t) \qquad (A.1)$$

$g(t-k\triangle t)$稱爲權重函數（weighting fvnction），若$g(t-k\triangle t)$可求，則吾人可利用$h(k\triangle t)$反求所有定義域上的函數值$h(t)$，因此$g(t-k\triangle t)$又稱爲內插函數（interpolation funtion），然而我們如何求得$g(t-k\triangle t)$呢？在以下的討論我們可以知道，當上式（Eq A.1）經由傅氏轉換後，等號仍成立所得之條件，即可求得$g(t-k\triangle t)$，亦可獲取樣定理成立的條件。我們知道：

$$h(k\triangle t)g(t-k\triangle t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(t-\tau)\cdot \delta(\tau-k\triangle t)d\tau \qquad (A.2)$$

$\delta(t)$爲廣義函數（delta function），將（Eq A.2）代入（Eq A.1）

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)g(t-\tau)\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\tau-k\triangle t)d\tau$$

$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\tau-k\triangle t)$爲脈衝列，若以$\triangle t$爲週期，其傅氏級數爲$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\triangle t}\exp\left(\frac{i2n\pi\tau}{\triangle t}\right)$，所以

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{i2n\pi\tau}{\triangle t}\right)\cdot\frac{g(t-\tau)}{\triangle t}d\tau \qquad (A.3)$$

若傅氏轉換爲

$$H(f)\equiv\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\cdot\exp(-i2\pi ft)dt$$

將（Eq A.3）左右取傅氏轉換，則

$$H(f)=\frac{G(f)}{\triangle t}\sum_{n=\infty}^{\infty} H\left(f-\frac{n}{\triangle t}\right) \qquad (A.4)$$

假設$H(f)$爲band-limited，即

$H(f)=0$　當　$|f|\geq fc$

$H(f)\neq 0$　當　$|f|<fc$

而且

$G(f)=\triangle t$　　$(f)\geq fc$

$\qquad 0$　　$(f)>fc$

則（Eq A.4）要避免混疊效應（aliasing effect），須滿足

$$-fc+\frac{1}{\triangle t}\geq fc \rightarrow \triangle t\leq\frac{1}{2fc}$$

而此時

$$g(t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(f)\exp(i2\pi ft)df=\int_{-fc}^{fc}\triangle t\exp(i2\pi ft)df$$

$$=\frac{\triangle t}{\pi t}\sin 2\pi fct$$

所以

$$g(t-k\triangle t)=\frac{\triangle t}{\pi(t-k\triangle t)}\sin 2\pi fc(t-k\triangle t) \qquad (A.5)$$

將（Eq A.5）代入（Eq A.1），則取樣定理可以寫成：

> 當$H(f)=0, |f|>fc$, fc爲截斷頻率（cut-off frequency），若$\triangle t$爲取樣間隔，當$\triangle t\leq\frac{1}{2fc}$，則
>
> $$h(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k\triangle t)\frac{\triangle t}{k(t-k\triangle t)}\cdot\sin 2\pi fc(t-k\triangle t) \qquad (A.6)$$

（法二）（參考weaver（1983））

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} H(f)\exp(i2\pi ft)df \qquad (A.7)$$

$$H(f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(t)\exp(-i2\pi ft)dt \qquad (A.8)$$

由（A.7）我們知道若$H(f)$可求，則$h(t)$可求，可是接著我們會問，$H(f)$是否可籍由離散的函數值（$h(k\triangle t)$）求得呢？

設$h(t)$爲band-limited，即

$H(f)=0$　　$|f|>fc>0$

則$H(f)$可以寫成傅氏級數，且其週期爲$2fc$

$$H(f)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} Ck\exp\left(\frac{i2\pi kf}{2fc}\right) \qquad (A.9)$$

根據Euler's formula

$$Ck=\frac{1}{2fc}\int_{-fc}^{fc} H(f)\exp\left(\frac{-i2\pi kf}{2fc}\right)df \qquad (A.10)$$

由（Eq A.7）

$$h(t)=\int_{-fc}^{fc} H(f)\exp(i2\pi ft)df \qquad (A.11)$$

比較（Eq A.10）和（Eq A.11），若令$t=\frac{-k}{2fc}$，則

$$h(t)=h\left(\frac{-k}{2fc}\right)=\int_{-fc}^{fc} H(f)\exp\left(\frac{-i2\pi kf}{2fc}\right)df$$

$$=2fck$$

$$Ck=\frac{1}{2fc}h\left(\frac{-k}{2fc}\right) \qquad (A.12)$$

由（Eq A.12)和(Eq A.9)我們知道，離散的函數（$h\left(\frac{-k}{2fc}\right)$）描述了$H(f)$，再將其代入（Eq A.7），則

$$h(t)=\int_{-fc}^{fc}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2fc}h\left(\frac{-k}{2fc}\right)\exp\left(\frac{i2\pi kf}{2fc}\right)\cdot\exp(i2\pi ft)df$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{h\left(\frac{-k}{2fc}\right)}{2fc}\int_{-fc}^{fc}\exp\left(i2\pi f\left(\frac{k}{2fc}+t\right)\right)df$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{h\left(\frac{-k}{2fc}\right)}{2fc}\cdot\frac{\sin 2\pi fc\left(\frac{k}{2fc}+t\right)}{\pi\left(\frac{k}{2fc}+t\right)}$$

若$t=\frac{-k}{2fc}$，$\triangle t=\frac{1}{2fc}$，$k\rightarrow -k$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\triangle t\, h(k\triangle t)\cdot\frac{\sin 2\pi fc(t-k\triangle t)}{\pi(t-k\triangle t)} \qquad (A.13)$$

我們將（Eq A.13）和（Eq.A.6）比較，可以發現兩種方法均可達到相同的結論，只是推導方式不同，而且（法二）的假設比較强烈。

（附錄B）

B.1 離散傅立葉轉換（D.F.T., Discrete Fourier Transform）

> THEOREM A:
>
> $$F(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\exp(-2\pi i\frac{kn}{N}\ n\epsilon[0,N-1] \qquad (B-1)$$
>
> $$f(k)=\sum_{n=0}^{N-1} F(n)\exp\left(2\pi i\frac{kn}{N}\right) \quad k\epsilon[0,N-1] \qquad (B-2)$$

說明：

1:$\frac{1}{N}$的factor可以放在Eq(B-1)or Eq(B-2)，或者兩式均各擺$\frac{1}{\sqrt{N}}$。(B-1)爲DFT,(B-2)爲IDFT

2:(i)$k=0\sim(N-1)$對應　$t:(0\sim T)$,

:(ii)$n=0\sim(\frac{N}{2}-1)$對應　$\omega:(0\sim\Omega)$，

$n=\frac{N}{2}\sim(N-1)$對應　$\omega:(-\Omega\sim 0)$

3:也就是說，$f(t):t\ [0,T]$，

$F(\omega):\omega\ [-\Omega,\Omega]$

4:$f(t)$爲實數，則$R(\omega)$爲偶函數，$I(\omega)$爲奇函數，所以頻率域（Frequency Domain）取爲$[-\Omega,\Omega]$是合理的。$F(\omega)\equiv R(\omega)+iI(\omega)$

5q(B-2)是由Eq(B-1)&Orthoganality

: $\sum\exp\left(2\pi i\frac{kn}{N}\right)\times\exp\left(-2\pi i\frac{rn}{N}\right)=0, r\neq k$

$=N, r=k$ 推得

由Eq(B-1),Eq(B-2)我們知道

> THEOREM B:（週期性）
>
> $F(j+N)=F(j)$　　(B-3)
>
> $f(j+N)=f(j)$　　(B-4)

證明：

(一)證明Eq(B-1)，考慮：

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-2\pi i\omega t)dt$$

$$=\int_{0}^{T} f(t)\exp(-2\pi i\omega t)dt$$

$t=k\triangle t, k=0\sim(N-1), N\triangle t=T$

$$=\triangle t\sum_{k=0}^{N-1} f(k\triangle t)\exp(-i2\pi\omega k\triangle t)$$

IF $\omega=n\triangle\omega$, $\omega\in[-\Omega,\Omega]$, $N\triangle\omega=2\Omega$,

$n\in[\frac{-N}{2}, \frac{N}{2}-1]$

let $\triangle\omega\cdot\triangle t=\frac{1}{N}$

$$=\triangle t\sum_{k=0}^{N-1} f(k\triangle t)\exp(-i2\pi\frac{nk}{N})$$

$$F(n\triangle\omega)=\triangle t\sum_{k=0}^{N-1} f(k\triangle t)\exp-(i2\pi\frac{nk}{N}) \quad \text{(B-1)}$$

(二)證明〔說明：2〕，考慮$F(n)$, $n\in[\frac{-N}{2}, \frac{N}{2}-1]$

(1): $n\in[0,\frac{N}{2}-1]$時　，$F(n)$不變

(2): $n\in[\frac{-N}{2}, -1]$時，由THEOREM B我們可以知道

$F(\frac{-N}{2})=F(\frac{-N}{2}+N)=F(\frac{N}{2})$...shift N

$F(\frac{-N}{2}+1)=F(\frac{-N}{2}+1+N)=F(\frac{N}{2}+1)$....shift N

$F(\frac{-N}{2}+2)=F(\frac{-N}{2}+2+N)=F(\frac{N}{2}+2)$...shift N

$F(-1)=F(-1+N)=F(N-1)$...shift N

(3)：由(1);,(2):我們可以知道：

$n\in[\frac{-N}{2}, -1]\rightarrow n\in[\frac{N}{2}, N-1]$ 所以

$n\in[\frac{-N}{2}, \frac{N}{2}-1]\rightarrow n\in[0,N-1]$

而其中$[\frac{N}{2}, N-1]$代表負頻率$[-\Omega, 0]$

THERÓREM C

我們可以知道，若$f(t)$爲實數，則$R(\omega)$爲偶函數，$I(\omega)$爲奇函數，所以若將頻率域$[\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1]$變爲 $[0,N-1]$則：參閱Fig B（摘自申1990）

$R(j+\frac{N}{2})=R(-j+\frac{N}{2})$，對$\frac{N}{2}$對稱，$j=1\sim(N-1)$

$I(j+\frac{N}{2})=-I(-j+\frac{N}{2})$，對$\frac{N}{2}$反對稱，$j=1\sim(N-1)$

但是注意

$$f(j+\frac{N}{2})\neq f(-j+\frac{N}{2})$$

證明：

若$f(t)$爲實數，則由Eq(B.1)，我們知道

$$R(n)=\triangle t\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\cos(\frac{2n\pi k}{N})$$

$$I(n)=-\triangle t\sum_{k=0}^{N-1} f(k)\sin(\frac{2n\pi k}{N})$$

1: $R(j+\frac{N}{2})$

$=\triangle t\Sigma f(k)\cos(\frac{2n\pi k}{N}+K\pi)$

$=\triangle t\Sigma(-1)^k(k)\cos(\frac{2n\pi k}{N})$

2: $R(-j+\frac{N}{2})$

$=\triangle t\Sigma f(k)\cos(\frac{-2n\pi k}{N}+k\pi)$

$=\triangle t\Sigma(-1)^k(k)\cos(\frac{-2n\pi k}{N})$

由1:,2:我們知道$R(j+\frac{N}{2})=R(-j+\frac{N}{2})$

3: $I(j+\frac{N}{2})$

$=-\triangle t\Sigma f(k)\sin(\frac{2n\pi k}{N}+k\pi)$

$=-\triangle t\Sigma(-1)^k(k)\sin(\frac{2n\pi k}{N})$

4: $I(-j+\frac{N}{2})$

$=-\triangle t\Sigma f(k)\sin(\frac{-2n\pi k}{N}+K\pi)$

$=-\triangle t\Sigma(-1)^k(k)\sin(\frac{-2n\pi k}{N})$

由3:,4:我們知道$I(j+\frac{N}{2})=-I(-j+\frac{N}{2})$。以上結果如圖<Fig B>。

B.2 D.F.T(Continuous Fourier Transform)

與D.F.T(Discrete Fourier Transform)

1.D.F.T→C.F.T.　由Eq(B.2)

$$f(k)=\sum_{N=0}^{N-1} F(n)\exp(i2\pi\frac{kn}{N})$$

$$=\sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} F(n)\exp(i2\pi\frac{kn}{N})+\sum_{n=\frac{N}{2}}^{N-1} F(n)\exp(i2\pi\frac{kn'}{N})$$

$$=\sum_{n=0}^{N-1} F(n)\exp(i2\pi\frac{kn}{N})+\sum_{n'=\frac{-N}{2}}^{-1} F(n'+N)\exp(i2\pi\frac{kn'}{N})$$

$$=\sum_{n=\frac{-N}{2}}^{\frac{N}{2}} F(n)\exp(i2\pi\frac{kn}{N})$$

$$=\frac{1}{\triangle f}\int_{-\Omega}^{\Omega} F(\omega)\exp(i2\pi i\omega t)dt$$

$\omega=n\triangle\omega$, $\omega[-\Omega,\Omega]$, $N\triangle\omega=2\Omega$,

$n\in[\frac{-N}{2}, \frac{N}{2}-1]$

2.反之C.F.T→D.F.T亦可推得

THEOREM D:

若$f(t)$:T　$[A,A+T]$, $F(\omega)\omega[-\Omega,\Omega]$則

$F(n\triangle\omega)=\exp(-i2\pi n\triangle\omega A)G(n\triangle\omega)$

$n[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$　　(B-5)

$$G(n'\triangle\omega)=\triangle t\sum_{k=0}^{N-1} g(k\triangle t)\exp-i2\pi\frac{nk}{N}$$

$n'\in[0,N-1]$　　(B-5-1)

$g(k\triangle t)=f(A+k\triangle t)$，k　$[0,N-1]$

所以吾人可利用IMSL中之FFTCF去計算$G(n'\triangle\omega)$, $n'[0,N-1]$，然後將$n'\in[\frac{N}{2}, N-1]$平移至$[-\frac{N}{2}, -1]$則可以得到$G(n\triangle\omega)$, $n\in[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}-1]$

據此便可以計算$F(n\triangle\omega)$了。

證明:

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-2\pi i\omega)tdt$$

$$=\int_{A}^{A+T} f(t)\exp(-2\pi i\omega t)dt$$

$t=t'+A$, $g(t')=f(t'+A)$, $t'\in[0,T]$

$$=\exp(-i2\pi\omega A)\int_{0}^{T} g(t')\exp(-2\pi i\omega t')dt'$$

$t'=k\triangle t'$, $k=0\sim(N-1)$, $N\triangle t'=T$

$$=\exp(-i2\pi\omega A)\ \triangle t\sum_{k=0}^{N-1} g(k\triangle t)\exp(-i2\pi\omega k\triangle t)$$

IF $\omega=n\triangle\omega$, $\omega\in[-\Omega,\Omega]$, $N\triangle\omega=2\Omega$,

$n\in[\frac{-N}{2}, \frac{N}{2}-1]$

let $\triangle\omega\cdot\triangle t=\frac{1}{M}$

滿足取樣定理（SAMPLEING THEOREM）

$$=\exp(-i2\pi n\triangle\omega A)\ \triangle t\sum_{k=0}^{N-1} g(k\triangle t)\exp(-i2\pi\frac{nk}{N})$$

$$F(n\triangle\omega)=\exp(-i2\pi n\triangle\omega A)G(n\triangle\omega) \quad \text{(B-5)}$$

$$G(n\triangle\omega)=\triangle t\sum_{k=0}^{N-1} g(k\triangle t)\exp(-i2\pi\frac{nk}{N})$$

$n\in[-\frac{N}{2}, \frac{N}{2}]$

根據THEOREM A:我們可以知道$G(n\triangle\omega)=G(n'\triangle\omega)$

$$G(n'\triangle\omega)=\triangle t\sum_{k=0}^{N-1} g(k\triangle t)\exp(-i2\pi\frac{nk}{N})$$

$n'\in[0,N-1]$

參考資料

申博文，1993：三維地形對大氣運動的影響一線性解。國立中央大學大氣物理研究所碩士論文85pp。

黃調元、鄭柏壽，1972：傅立葉分析，復漢出版社，362pp。

Buzzi, A., and S. Tibaldi, 1977:Inertial and frictional effects on rotations stratified flow over topography. Quart. Roy. Mateor. Soc., 103, 135-150.

Brigham, E.O.:The Fast Fouriaer Transform. 252pp.

Hilderbrand, F.B.,1976:Advanced Calculus for Application. Prentice-Hall, 733 pp, charpter 11, p636-637.

Kreyszig, 1983:Advanced Engineering Mathematics.台灣版

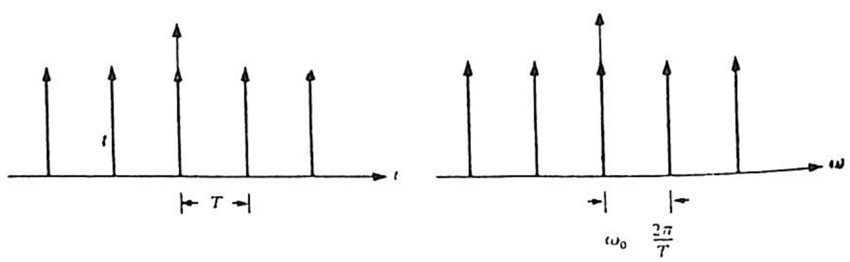
Rosenfeld, A., and A.C.Kak., 1982:Digital Picture Processing Academic Press. 435 pp, charpter 4,p71-75.

Smith, R.B., 1979 :The influence of mountain on the atmosphere. Advances in Geophysics, Vol.21, Academic Press, 87-230.

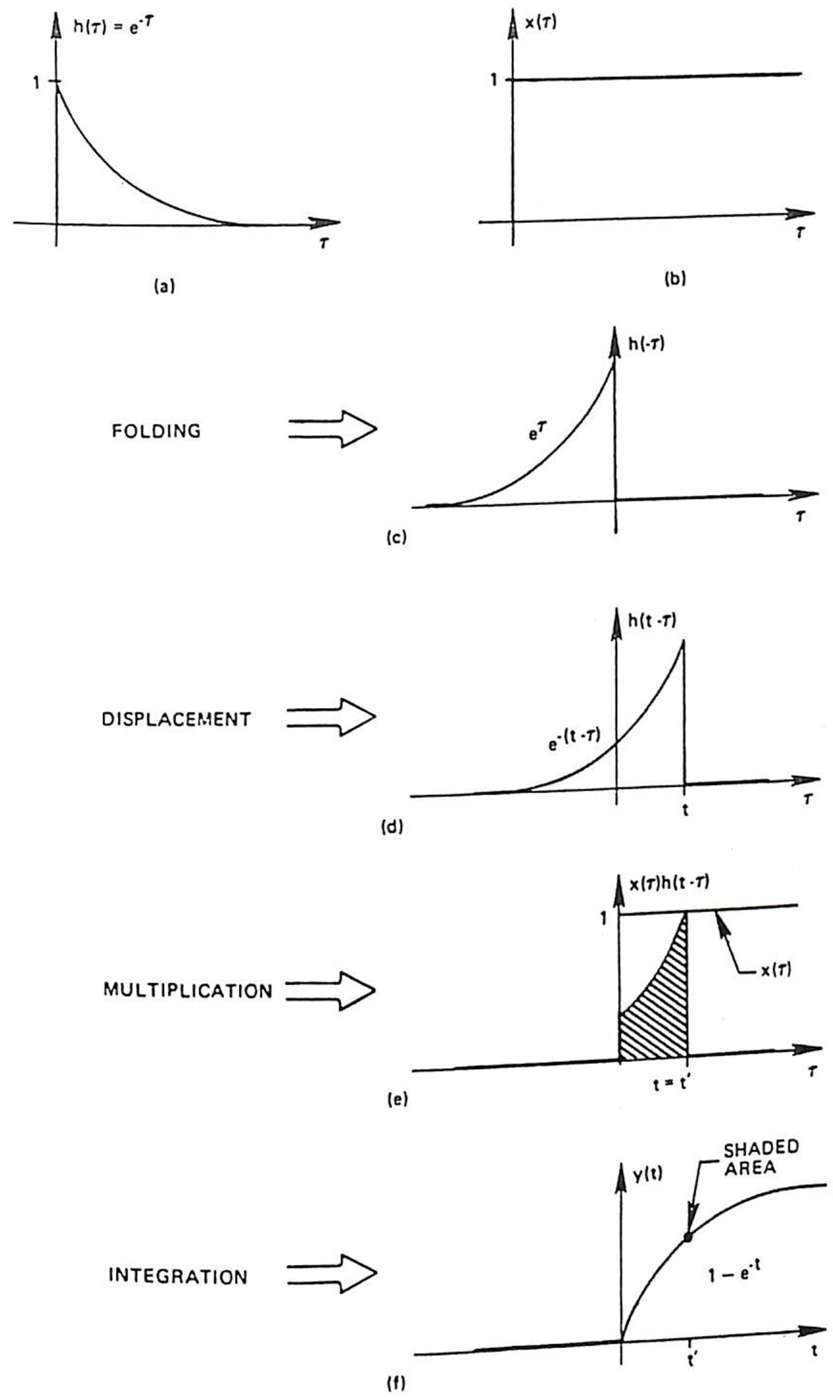
Smith, R.B., 1980:Linear theory of stratified of hydrostatic flow past an isoltated mountam. Tellus, 32,348-364.

Weaver, H.J., 1983:Applications of Discrete and Continuous Fourier Anaiysis. Wiley-Interscience. 375pp.

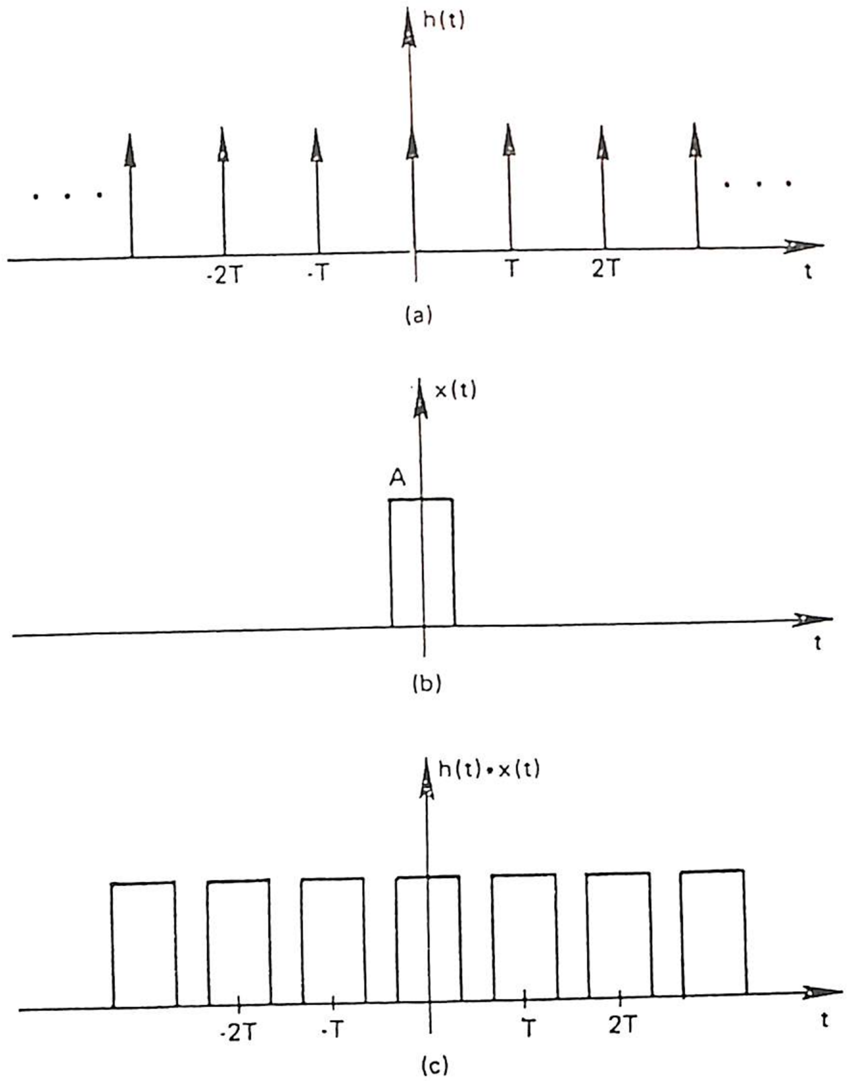
Yuan, S.W., 1972:Foundations of Fluid Mechanics. Prentice-Hall, Inc. 608pp. p234.



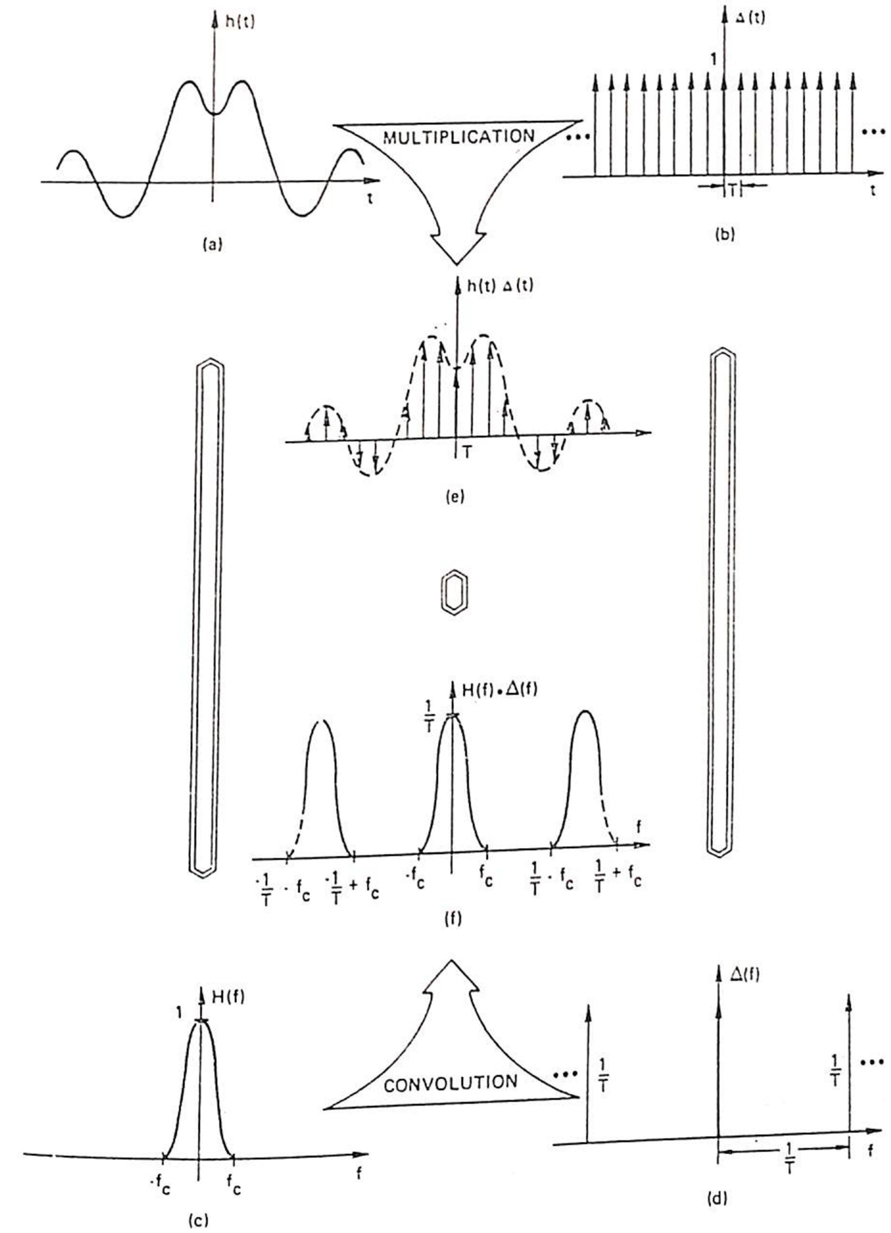
（圖１）：脈衝列及其傅氏轉換。摘自黃&鄭(1972)



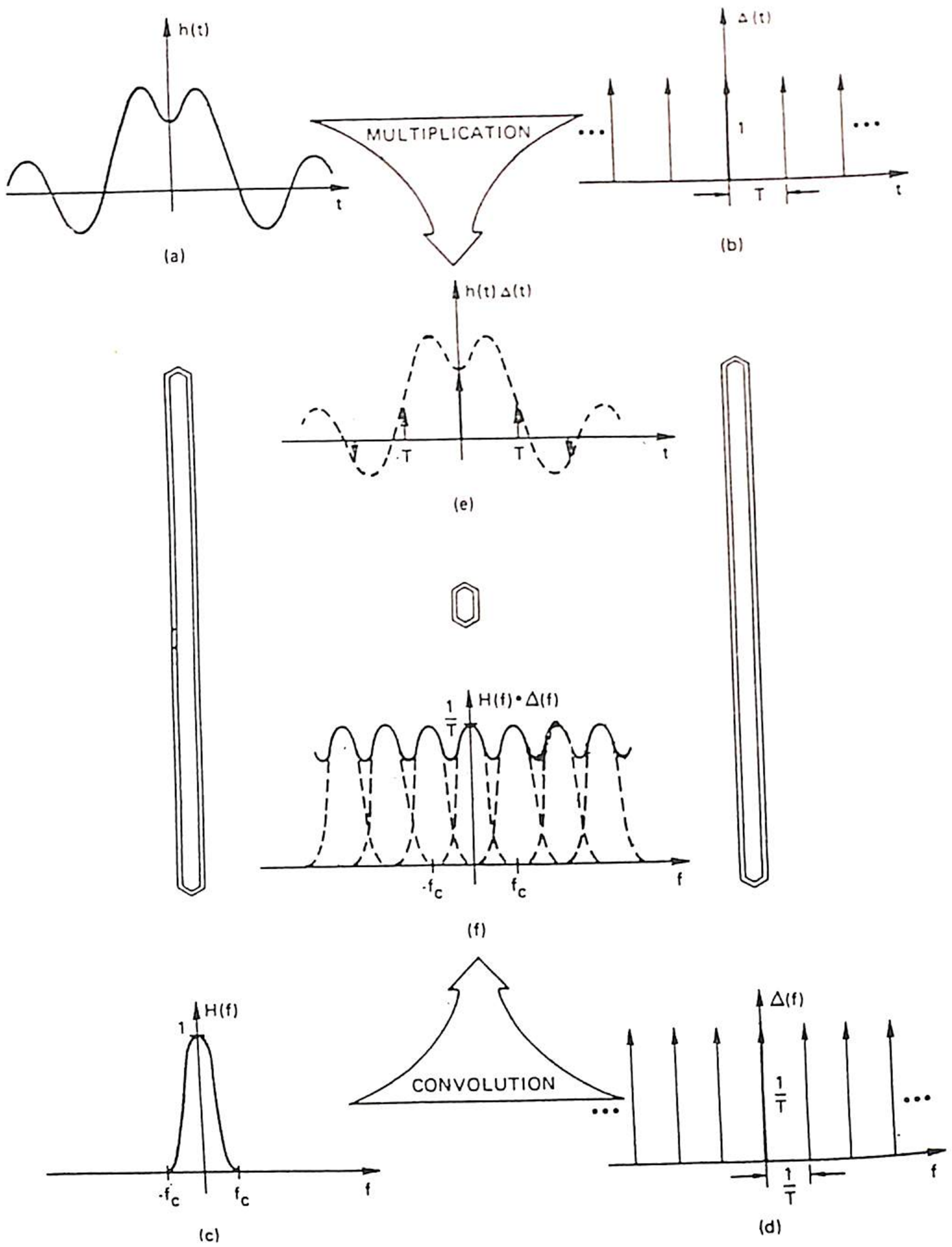
（圖２）：褶積的計算過程、折疊、位移、相乘、積分。摘自Brigham。



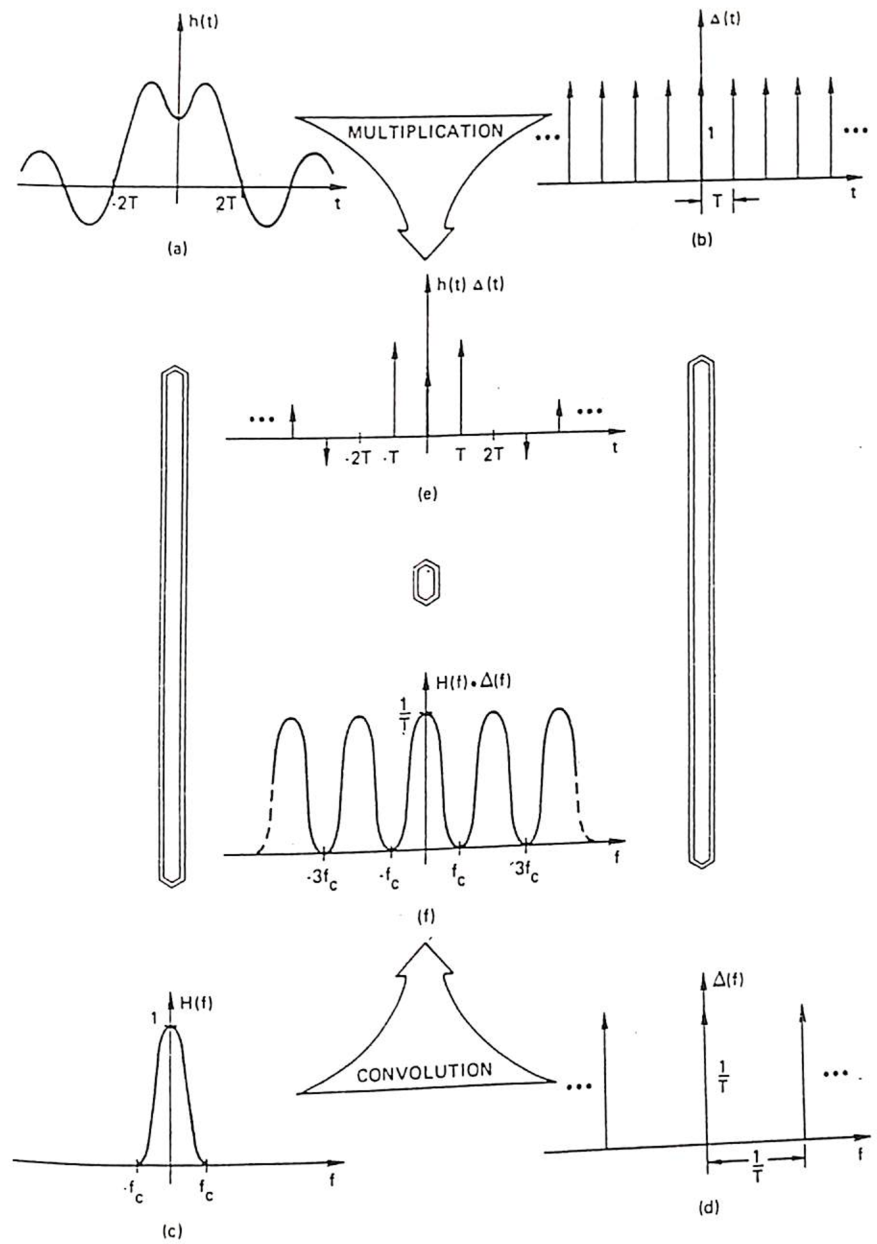
（圖３）：函數和脈衝列的褶積。摘自Brigham。



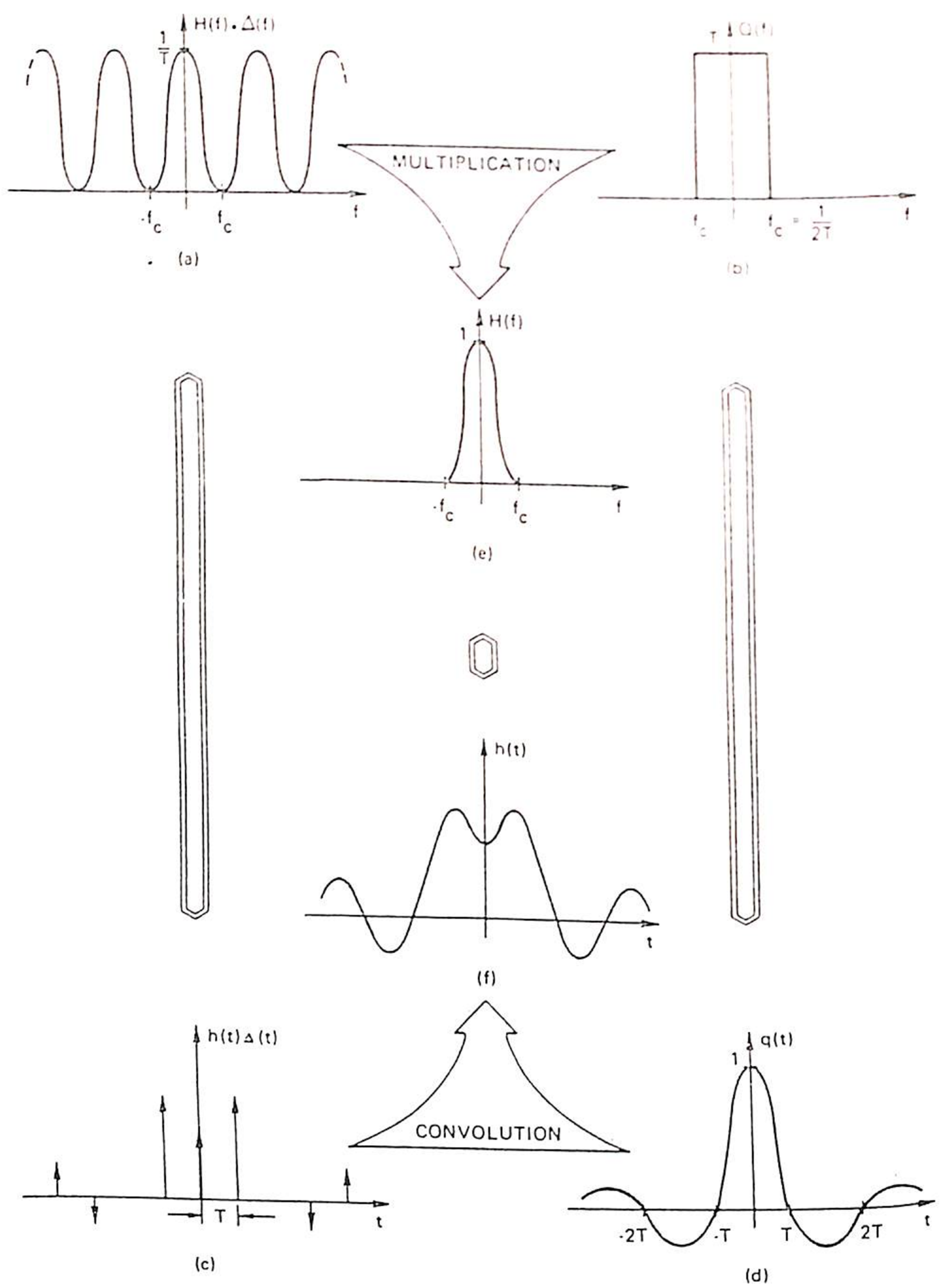
（圖４）：取樣㈠，取樣的圖解說明，fc為截斷頻率（Cut-off frequency），$T \leq \frac{1}{2fc}$，代表傅氏轉換或逆傅氏轉換。摘自Brigham。



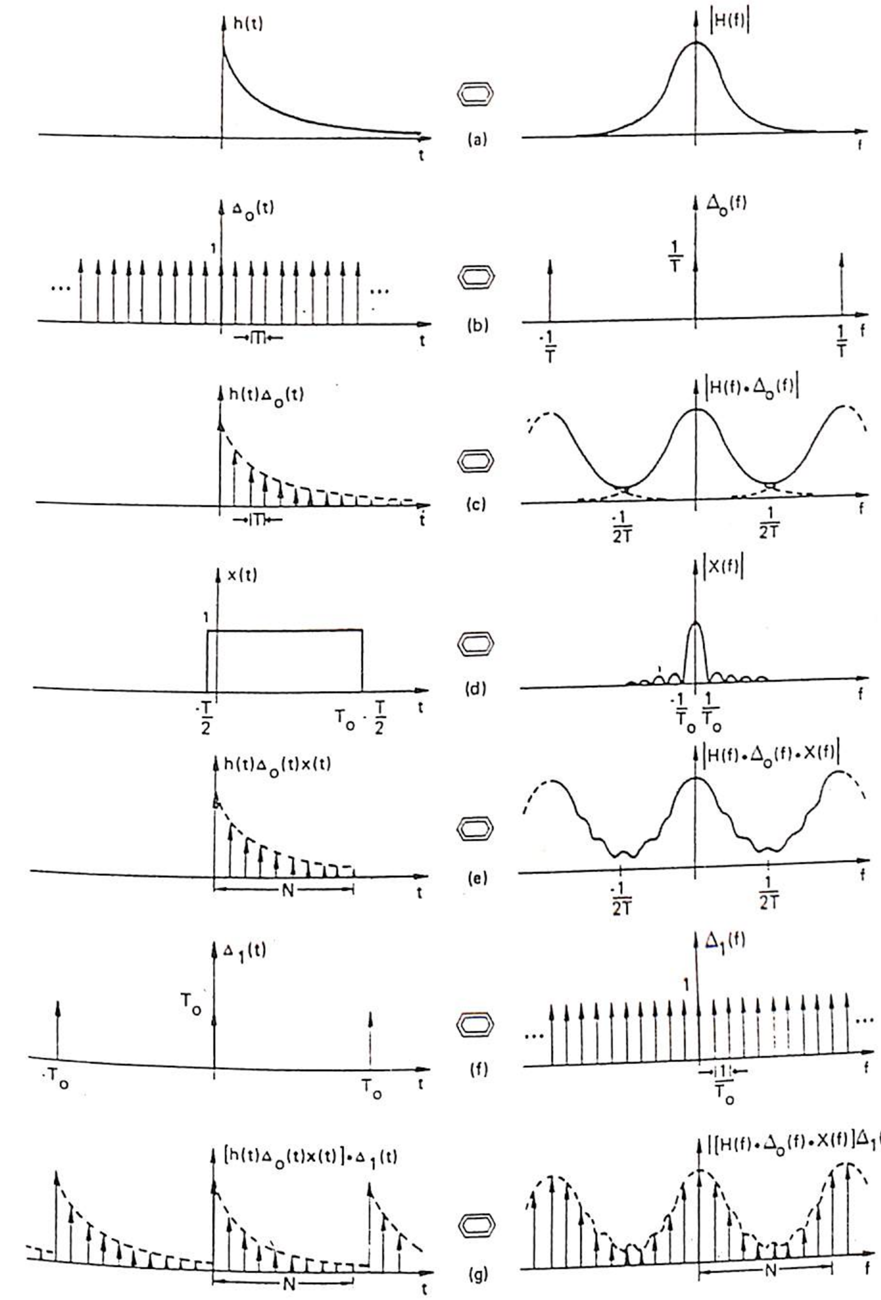
（圖５）：取樣(二)，說明同前，$T>\frac{1}{2fc}$，有混疊效應（aliasing effect）。摘自Bigham。



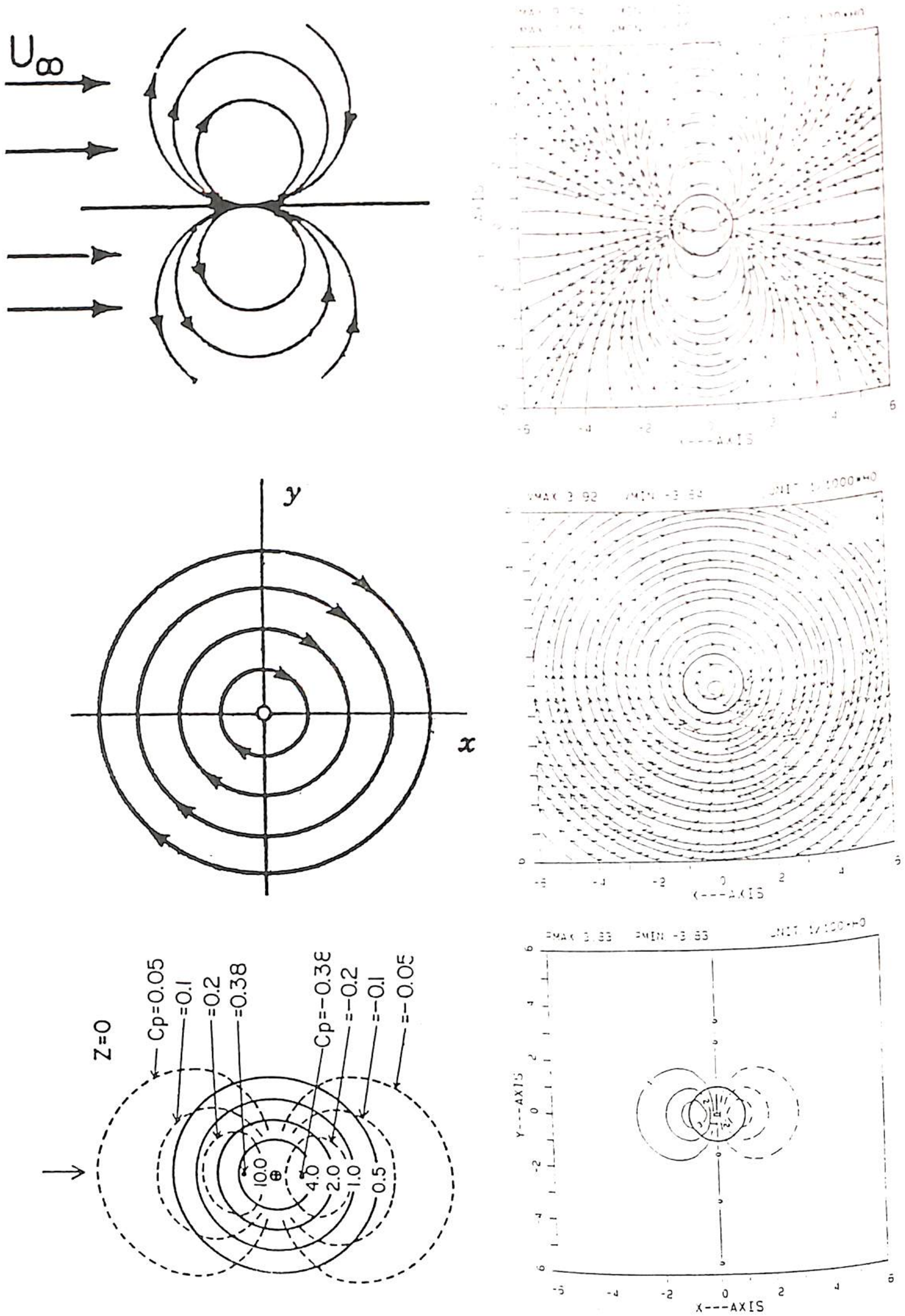
（圖６）：取樣(三)，說明同前．$T=\frac{1}{2fc}$。摘自Brigham。



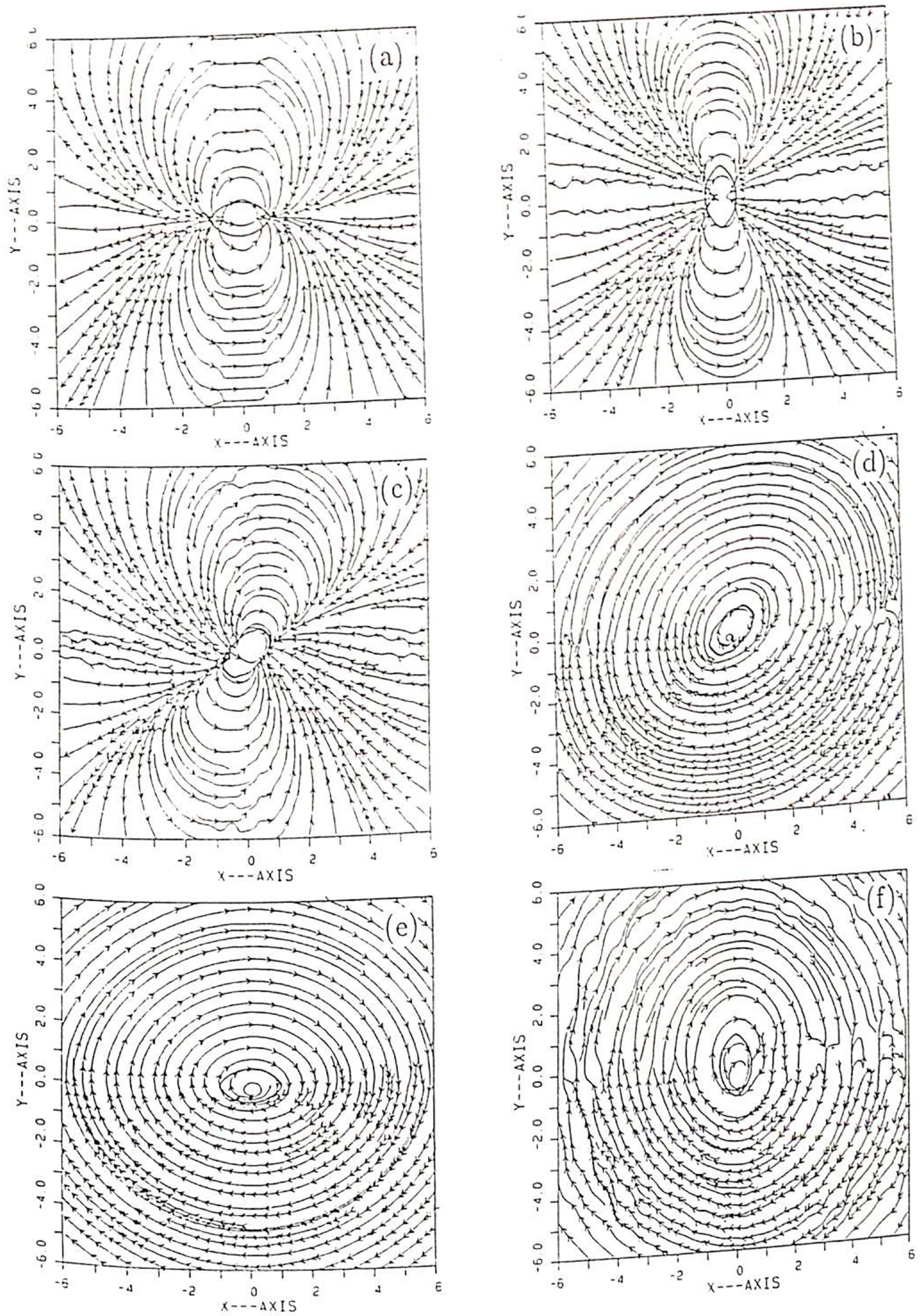
（圖７）：乘上Window函數,將周期函數取出一個周期。摘自Brigham。



（圖８）：產生離散傅氏轉換及逆離散傅氏轉換之圖解說明。摘自Brigham。

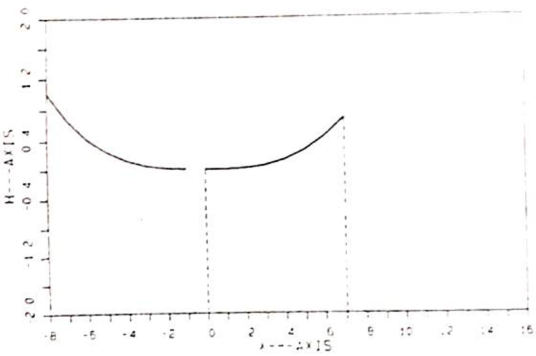


（圖9）：(a)偶流(donblet)，摘自Yuan(1967)。(c)渦旋流（point vortex），摘自Hiderbrand(1976)。(e)無科氏力，靜力下，壓力擾動量之穩定解，摘自Smith(1980)。(b),(d),(f)說明同(a),(c),(e)，但利用FFT求得之數值解。摘自申(1992)。

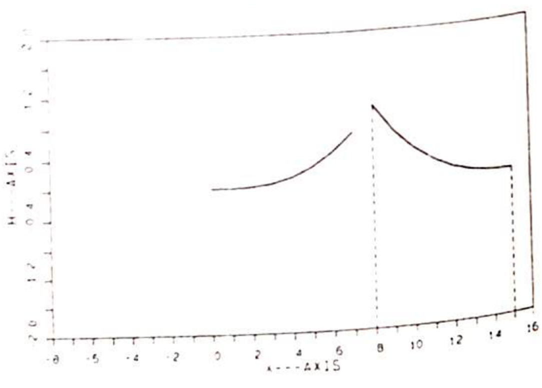


（圖10）不同旋轉角度之橢圓地形的流場分佈，長短軸比為2:1，θ為長軸與y軸的夾角，順時鐘為正。(a)$a = 0.1km, \theta = 90^o$。(b)$a = 0.1km, \theta = 0^o$。(c)$a = 0.1km, \theta = 45^o$。(d)$a = 700km, \theta = 45^o$。(e)$a = 700km, \theta = 90^o$。(f)$a = 700km, \theta = 0^o$。摘自申(1992)。

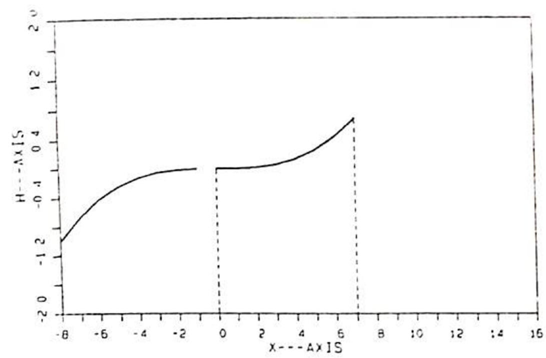
Fig(B.1.a)



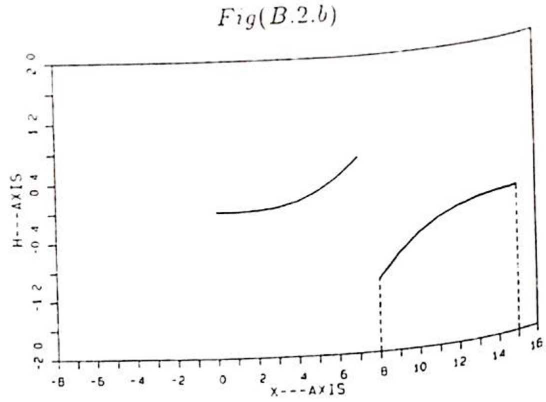
Fig(B.1.b)



Fig(B.2.a)



Fig(B.2.b)



$Fig(B.1.a)$: $R(\omega)$ 爲偶函數,所以對原點(n=0)對稱

$Fig(B.1.b)$: 平移後($[\frac{N}{2},-1] \Longrightarrow [\frac{N}{2},N-1]$) 則對 $n=\frac{N}{2}$ 成對稱

$Fig(B.2.a)$: $I(\omega)$ 爲奇函數,所以對原點(n=0)反對稱

$Fig(B.2.b)$: 平移後($[\frac{N}{2},-1] \Longrightarrow [\frac{N}{2},N-1]$) 則對 $n=\frac{N}{2}$ 成反對稱

注　意:　Fig(B.1.a),Fig(B.2.a)的第一點 ($n=\frac{N}{2}$) 沒有對應

Fig(B.1.b),Fig(B.2.b)的第一點(n=0)沒有對應